analyse complexe

Éric Amar
Étienne Matheron

CASSINI

ANALYSE COMPLEXE

À mon père.
É. A.

À la famille chat : Armelle grand chat, Mathilde petit chat et Juliette petit chaton.
É. M.

Enseignement des mathématiques

1. J.-Y. Ouvrard, *Probabilités I*
2. J. Hubbard, B. West, *Équations différentielles et systèmes dynamiques*
3. M. Cottrell, V. Genon-Catalot, Ch. Duhamel, Th. Meyre, *Exercices de probabilités*
4. F. Rouvière, *Petit guide de calcul différentiel à l'usage de la licence et de l'agrégation*
5. J.-Y. Ouvrard, *Probabilités II*
6. G. Zémor, *Cours de cryptographie*
7. A. Szpirglas, *Exercices d'algèbre*
8. B. Perrin-Riou, *Algèbre, arithmétique et Maple*

10-14. S. Francinou, H. Gianella, S. Nicolas, *Exercices de mathématiques — Oraux X-ENS*

15. H. Krivine, *Exercices de mathématiques pour physiciens*
16. J. Jacod, Ph. Protter, *Les bases de la théorie des probabilités*
17. M. Willem, *Analyse fonctionnelle élémentaire*
18. É. Amar, É. Matheron, *Analyse complexe*

ÉRIC AMAR ÉTIENNE MATHERON

Analyse complexe

CASSINI

ÉRIC AMAR est professeur à l'Université Bordeaux 1
ÉTIENNE MATHERON est maître de conférences à l'Université Bordeaux 1

Mathematics Subject Classification (2000) : 30-01

ISBN 2-84225-052-4
© Cassini, Paris, 2004.

Table des matières

Introduction 1

Prérequis et notations 3

1. Calcul différentiel 3
2. Mesures et intégration 3
3. Analyse fonctionnelle 5
4. Topologie 6

Chapitre 1. Intégrale curviligne 7

1.1. Formes différentielles de degré 1 7
1.1.1. Formes différentielles sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$ 7
1.1.2. Notation différentielle et fonctions composées 8
1.1.3. Cas du plan complexe 10
1.1.4. Image réciproque d'une 1-forme par une application 12
1.2. Chemins, lacets et courbes 13
1.2.1. Chemins et lacets 13
1.2.2. Courbes de Jordan 15
1.2.3. Équivalence de chemins, équivalence de lacets 16
1.3. Intégrale curviligne 17
1.3.1. Intégrale d'une 1-forme sur une partie de $\mathbb{R}$ 17
1.3.2. Intégrale sur un chemin de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux ; exemples 18
1.3.3. Propriétés de l'intégrale curviligne 19
1.3.4. Mesure $(dz)_\gamma$ associée à un chemin γ 21
1.4. Orientation 22
1.4.1. Orientation du plan 22
1.4.2. Orientation d'une courbe du plan 22
1.4.3. Notations 26
1.4.4. Intégrale sur une courbe orientée 26
1.5. Longueur 28
1.5.1. Longueur d'un chemin, longueur d'une courbe . . . 28
1.5.2. Mesure de longueur sur une courbe 30

Chapitre 2. Formes différentielles dans le plan 37

2.1. Formes exactes et formes fermées 37
2.1.1. Formule de Stokes pour un rectangle 37
2.1.2. Définitions et exemples 38
2.1.3. Lemme de Poincaré 39
2.1.4. Caractérisation des formes exactes 41
2.1.5. Cohomologie de de Rham 42
2.2. Formes différentielles de degré 2 43
2.2.1. Applications bilinéaires alternées 43
2.2.2. Formes différentielles 44
2.2.3. Image réciproque d'une 2-forme par une application 45
2.2.4. Dérivée extérieure d'une 1-forme 46
2.2.5. Intégration 48
2.3. Formule de Stokes 48
2.3.1. Compacts à bords réguliers 48
2.3.2. Formule de Stokes 50
2.3.3. Démonstration élémentaire dans le cas d'un « disque à trous » 56

Chapitre 3. Fonctions holomorphes I 65

3.1. Définitions et exemples 65
3.1.1. Fonctions $\mathbb{C}$-dérivables 65
3.1.2. Fonctions holomorphes 68
3.1.3. Exemples fondamentaux 69
a. Séries entières 69
b. Transformée de Cauchy d'une mesure de Radon 70
3.2. Fonctions usuelles 72
3.2.1. Exponentielle 72
a. Exponentielle complexe 72
b. Remarques sur la définition 74
c. Exponentielle d'un élément d'une algèbre de Banach 76
3.2.2. Fonctions trigonométriques 76
3.2.3. Logarithmes et arguments 77
3.2.4. Racines k-ièmes, puissances 80
3.3. Théorème de Cauchy, formule de Cauchy 81
3.3.1. Théorème de Cauchy 81
3.3.2. Formule de Cauchy-Pompeiu 81
3.3.3. Formule de Cauchy et conséquences immédiates . . 83
3.4. Développement en série entière 86
3.4.1. Principe du prolongement analytique 87

3.5. Inégalités de Cauchy et applications 88
3.5.1. Inégalités de Cauchy 88
3.5.2. Suites de fonctions holomorphes 90
a. Théorème de convergence de Weierstrass 90
b. Théorème de Montel 91
c. Topologie de $\mathcal{H}(\Omega)$ 93
3.5.3. Intégrales à paramètres 94
3.6. Formule de Cauchy pour un disque : démonstration directe . 95
3.7. Transformée de Cauchy d'une mesure borélienne 97
3.8. Noyau de Cauchy ; espaces $A(\mathbb{D})$ et $H^2(\mathbb{D})$ 99
3.8.1. Algèbre du disque $A(\mathbb{D})$ et noyau de Cauchy 99
3.8.2. Espace de Hardy $H^2(\mathbb{D})$ 100

Chapitre 4. Fonctions holomorphes II **125**

4.1. Primitives et logarithmes 125
4.2. Théorème de Morera 126
4.3. Théorème de Cauchy-Goursat 128
4.4. Zéros des fonctions holomorphes 131
4.4.1. Factorisation ; principe des zéros isolés 131
4.4.2. Formule de Jensen 133
4.4.3. Conséquences de la formule de Jensen 136
a. Intégrabilité du logarithme 136
b. Croissance et distribution des zéros 138
4.5. Séries de Laurent 140
4.6. Singularités isolées ; fonctions méromorphes 144
4.6.1. Singularités isolées 144
4.6.2. Fonctions méromorphes 147
4.6.3. Exemples : prolongements méromorphes de Γ et ζ . . 147
4.7. Théorème de Liouville 149
4.8. Principe du maximum 153
4.9. Lemme de Schwarz 156
4.10. Produits infinis 157
4.10.1. Exemples 159
a. Développement de $\sin \pi z$ en produit infini . . . 159
b. Développement de $1/\zeta$ 161
c. Développement de $1/\Gamma$ 162
d. Formule des compléments 163
4.10.2. Produits de Blaschke ; zéros des fonctions de $H^\infty(\mathbb{D})$ 164

Chapitre 5. Homotopie 181

5.1. Introduction 181
5.2. Intégrale curviligne : cas des chemins continus 182
5.2.1. Primitive d'une forme fermée le long d'un chemin . 182
5.2.2. Intégrale sur un chemin continu 185
5.3. Homotopie 187
5.3.1. Définitions ; invariance de l'intégrale par homotopie 187
5.3.2. Ouverts simplement connexes 190
5.4. Indice d'un lacet par rapport à un point 191
5.4.1. Déterminations du logarithme le long d'un chemin ; variation de l'argument 191
5.4.2. Définition de l'indice ; exemples ; calcul pratique . . 193
5.4.3. Formule de Cauchy homotopique 195
5.4.4. Propriétés de l'indice 196
a. Invariance par homotopie 196
b. Dépendance par rapport au point p 197
5.4.5. Indice et logarithmes continus 198

Chapitre 6. Topologie du plan 209

6.1. Degré d'une application définie sur un cercle 209
6.2. Théorème de Brouwer et théorème de l'image ouverte 211
6.3. Homotopie, extensions et logarithmes continus 212
6.3.1. Autre définition de l'indice 214
6.3.2. L'ensemble des exponentielles dans une algèbre de Banach 214
6.4. Théorème de Jordan 215
6.4.1. Les groupes $\mathcal{G}(K)$, $\mathcal{E}(K)$ et $\mathbf{G}(K)$ 216
6.4.2. Un exemple 216
6.4.3. Étude du groupe $\mathbf{G}(K)$ dans le cas général 217
6.4.4. Théorème de Jordan 220
6.5. Séparation de deux points du plan 221

Chapitre 7. Théorème de Cauchy homologique 231

7.1. Cycles, homologie 231
7.2. Théorème de Cauchy homologique 232
7.3. Remarques 235
7.3.1. Densité des fonctions rationnelles 235
7.3.2. Homologie et cohomologie 236

Chapitre 8. Résidus 239

8.1. Théorème des résidus 239
8.2. Calcul pratique d'un résidu 240
8.3. Dénombrement de zéros et de pôles ; applications 241
8.3.1. Principe de l'argument, théorème de Rouché 241
8.3.2. Comportement local d'une fonction holomorphe . . 243
8.3.3. Suites de fonctions holomorphes 245
8.4. Exemples de calculs d'intégrales 246
8.4.1. Intégrales trigonométriques 246
8.4.2. Intégrale d'une fonction rationnelle sans pôles réels 246
8.4.3. Intégrales de Fourier 248
8.4.4. Formule des compléments ; prolongement méromorphe de ζ à $\mathbb{C}$ 249

Chapitre 9. Théorème de Runge et applications 265

9.1. Théorème de Runge 265
9.2. Enveloppe d'holomorphie 269
9.3. Résolution de l'équation $\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} = v$ 274
9.4. Problème de Cousin et théorème de Mittag-Leffler 275
9.5. Théorème de Weierstrass 277

Chapitre 10. Représentation conforme 297

10.1. La sphère de Riemann 297
10.2. Fonctions holomorphes sur un ouvert de $\mathbb{S}_2$ 298
10.2.1. Définition et exemples 298
10.2.2. Biholomorphismes 300
10.3. Exemples : automorphismes de $\mathbb{C}$, de $\mathbb{S}_2$ et de $\mathbb{D}$ 301
10.3.1. Automorphismes de $\mathbb{C}$ 301
10.3.2. Automorphismes de $\mathbb{S}_2$ 302
a. Caractérisation 302
b. Homographies et cercles de $\mathbb{S}_2$ 303
10.3.3. Automorphismes du disque unité 304
10.4. Le théorème de la représentation conforme 306
10.4.1. Réduction au cas d'un domaine borné 306
10.4.2. Une propriété d'extremum 307
10.4.3. Preuve du théorème de Riemann 308
10.4.4. Un exemple explicite 308
10.5. Caractérisations des ouverts simplement connexes 312
10.6. Domaines de Jordan ; théorème de Carathéodory 313

Chapitre 11. Fonctions harmoniques 327

11.1. Définition et propriétés élémentaires 327
11.2. Harmonicité et holomorphie 328
11.3. Analyticité ; principe du prolongement analytique 330
11.4. Propriété de la moyenne ; principe du maximum 332
11.5. Formule de Poisson 333
11.5.1. Noyau de Poisson 334
11.5.2. Formule de Poisson 335
11.6. Inégalités de Cauchy, inégalités de Harnack 338
11.6.1. Inégalités de Cauchy 338
11.6.2. Inégalités de Harnack 339
11.7. Intégrale de Poisson ; problème de Dirichlet 342
11.7.1. Intégrale de Poisson 342
11.7.2. Problème de Dirichlet 344
11.7.3. Une application : harmonicité et propriété de la moyenne 345
11.8. Convergence des séries de Fourier au sens d'Abel-Poisson . 347
11.8.1. Convergence en norme 348
11.8.2. Convergence préfaible 350
11.8.3. Convergence presque partout 350
11.9. Espaces h^p 353
11.10. Formule de Green et applications 359
11.10.1. Formule de Green 359
11.10.2. Une formule du type « Cauchy-Pompeiu » 362
11.10.3. Potentiel logarithmique 365

Chapitre 12. Fonctions sous-harmoniques 383

12.1. Définitions et propriétés élémentaires 383
12.1.1. Semi-continuité 383
12.1.2. Fonctions sous-harmoniques ; exemples 386
12.1.3. Propriétés de stabilité 387
12.2. Principe du maximum 388
12.3. Propriété du majorant harmonique 390
12.4. Moyennes circulaires ; théorème des trois cercles 391
12.5. Intégrabilité 393
12.6. Approximation par convolution 395
12.7. Fonctions sous-harmoniques et distributions 398
12.7.1. Distributions positives 398
12.7.2. Distributions sous-harmoniques 399
12.7.3. Lemme de Weyl ; hypoellipticité 402
12.7.4. Théorème de décomposition de Riesz 403

12.7.5. Formule de Jensen 404
12.8. Exemples d'utilisation de la sous-harmonicité 405
12.8.1. Problème de Dirichlet 406
12.8.2. Opérateurs de composition sur $H^2(\mathbb{D})$ 410
12.8.3. Fonctions holomorphes de plusieurs variables . . . 412
12.8.4. Algèbres de Banach 417
a. Théorème de Vesentini 417
b. Algèbres semi-simples 418
c. Homomorphismes d'algèbres de Banach 419

Annexe A. Convolution, partitions de l'unité **431**

A.1. Convolution 431
A.1.1. Définition et exemples 431
A.1.2. Régularisation et approximation 433
A.2. Fonctions plateaux ; partitions de l'unité 434

Annexe B. Distributions **443**

B.1. Définition et exemples 443
B.2. Opérations algébriques, restriction 445
B.3. Dérivation 445
B.4. Support d'une distribution 446
B.5. Convolution 447

Bibliographie **455**

Commentaires bibliographiques succincts **459**

Index **465**

Index des notations **469**

Introduction

Ce livre reprend avec un certain nombre d'additions le contenu d'un cours de quatrième année donné par le premier auteur à l'Université Bordeaux 1. Il traite de la théorie des fonctions d'une variable complexe.

Le point de vue adopté est fortement inspiré par les progrès relativement récents survenus dans l'étude des fonctions de *plusieurs* variables complexes, l'idée générale étant d'employer des techniques aisément transposables en plusieurs variables. Cela se traduit par une utilisation systématique des formes différentielles. En particulier, un rôle central sera joué tout au long du livre par le lemme de Poincaré et par la formule de Stokes. Une telle présentation suppose bien sûr un certain nombre de préliminaires, ce qui explique que l'analyse complexe proprement dite n'apparaisse qu'au chapitre 3. Mais une fois la formule de Stokes établie, on obtient immédiatement la formule de Cauchy, et la théorie des fonctions holomorphes peut alors suivre son cours naturel.

Une autre « particularité » de ce livre est le recours occasionnel au langage de la théorie des distributions, qui éclaire notablement certaines situations. Une connaissance approfondie de cette théorie n'est absolument pas indispensable ; les quelques résultats nécessaires sont démontrés en annexe.

On a également essayé de mettre en valeur la position privilégiée de l'analyse complexe « à la croisée des chemins » entre la géométrie différentielle, la topologie, l'analyse fonctionnelle et l'analyse harmonique. Par exemple, le théorème de Liouville joue un rôle important dans la théorie des algèbres de Banach, la formule de Poisson et la formule de Cauchy sont directement liées à la description des formes linéaires continues sur certains espaces fonctionnels, et la notion d'homotopie, qui apparaît naturellement dès que l'on a affaire à des intégrales curvilignes, permet de démontrer de très beaux résultats de topologie. Dans cet esprit, il est souvent donné plusieurs démonstrations d'un même résultat, les différents points de vue permettant de mieux en apprécier la signification.

Il va sans dire que les exercices jouent un rôle important dans la compréhension du texte. Certains sont tout à fait « standard », mais d'autres sont beaucoup plus exigeants, et constituent une ouverture soit sur des questions traitées plus loin, soit sur des sujets plus avancés. Autant que possible, l'ordre des exercices suit le déroulement des chapitres.

Il n'y a par conséquent aucune corrélation entre le degré de difficulté ou l'« importance » d'un exercice et le numéro qui lui est attribué.

Sur un thème aussi classique, il était bien sûr difficile de faire preuve d'originalité. De fait, on s'est beaucoup inspiré des nombreux et excellents ouvrages déjà existants ; les emprunts les plus importants ont été répertoriés à la fin du livre. Par ailleurs, ce livre n'a bien entendu aucune prétention à l'exhaustivité. Que le lecteur averti ne s'étonne donc pas de n'y trouver ni fonctions elliptiques, ni surfaces de Riemann, ni fonction modulaire. Dans un ouvrage de ce volume, il est difficile d'éviter les omissions « impardonnables »...

Un grand merci à Nathalie Biguenet, Armelle petit ours, Chantal Menini, Stéphanie Nivoche, Hakim Bachir, Gilles Bailly-Maitre, André Bellaïche, Éric Charpentier, Robert Deville, Emmanuel Fricain, Iban Harlouchet, Julien Giol et au soldat Frédéric-Mickael Jourdan pour leur relecture attentive et leurs conseils avisés. Merci également à nos collègues bordelais Marcel Grangé, Nikolaï Nikolski, Alain Yger et Mohammed Zarrabi pour nous avoir permis d'utiliser leurs feuilles d'exercices.

Prérequis et notations

1. Calcul différentiel

On supposera connus les notions et résultats de base de calcul différentiel : applications différentiables, théorème des fonctions composées, inégalité des accroissements finis, théorème de Schwarz sur la symétrie des dérivées partielles « croisées », formule de Taylor, théorème d'inversion locale. En particulier, on utilisera souvent le résultat suivant : *Si une suite (f_n) de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$ converge uniformément sur les compacts et si toutes les dérivées partielles des f_n convergent uniformément sur les compacts, alors la fonction $g = \lim_n f_n$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et ses dérivées partielles sont les limites de celles des f_n.*

La différentielle d'une application f en un point a se notera $\mathrm{D}f(a)$ ou $\mathrm{D}f_a$; dans le cas d'une fonction *scalaire*, c'est-à-dire à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on écrira plutôt $df(a)$ ou df_a. Les dérivées partielles d'une fonction f définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$ seront notées $\partial_1 f, \dots, \partial_n f$, ou $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$. Dans $\mathbb{R}^2$, dont le « point générique » est habituellement noté (x, y), on écrira plutôt $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$.

Si Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, on note $\mathcal{C}^k(\Omega)$, $1 \leqslant k \leqslant \infty$ l'ensemble des fonctions scalaires de classe $\mathcal{C}^k$ sur Ω.

Enfin, rappelons que si Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, le **laplacien** d'une fonction $f \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ est la fonction Δf définie par

$$\Delta f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} \cdot$$

2. Mesures et intégration

On supposera connus les notions de base de théorie abstraite de la mesure (mesures positives, mesures complexes) et les théorèmes classiques de théorie de l'intégration. En particulier, on utilisera fréquemment le théorème de convergence dominée, le théorème de convergence monotone, le théorème de Fubini, le théorème de changement de variables, et les théorèmes usuels de continuité et de dérivabilité d'une intégrale à paramètre.

Énonçons par exemple une version du théorème de dérivabilité : *Soit* Ω *un ouvert de* $\mathbb{R}^n$, *soit* $(\mathrm{T}, \mathcal{T}, \mu)$ *un espace mesuré, et soit* $\mathrm{F} : \Omega \times \mathrm{T} \to \mathbb{C}$. *On suppose que pour tout* $x \in \Omega$, *la fonction* $t \mapsto \mathrm{F}(x,t)$ *est intégrable sur* T, *que pour tout* $t \in \mathrm{T}$, *l'application* $x \mapsto \mathrm{F}(x,t)$ *est de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* Ω, *et que pour tout compact* $\mathrm{L} \subset \Omega$ *et pour tout* $i \in \{1; \dots; n\}$, *il existe une fonction* $g \in \mathrm{L}^1(\mathrm{T}, \mu)$ *telle que* $\left|\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x_i}(x,t)\right| \leqslant g(t)$ *sur* $\mathrm{L} \times \mathrm{T}$. *Alors la fonction* $x \mapsto \int_{\mathrm{T}} \mathrm{F}(x,t)\, d\mu(t)$ *est de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* Ω, *et ses dérivées partielles s'obtiennent en dérivant sous le signe intégral.*

On notera toujours m la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$, quelle que soit la valeur de n. Pour $p \in [1; \infty]$, on écrira toujours $\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^n)$ au lieu de $\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^n, m)$, et la norme correspondante sera notée $\| \ \|_p$. En général, on ne distinguera pas une fonction intégrable de l'élément de L^1 qu'elle représente.

De même, on notera $\mathrm{L}^p(\mathbb{T})$ l'espace L^p correspondant à la mesure de Lebesgue normalisée sur le cercle $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C};\ |z| = 1\}$. Rappelons que la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{T}$, notée σ, est l'image par l'application $\theta \mapsto e^{i\theta}$ de la mesure de Lebesgue normalisée $d\theta/2\pi$ sur $[0\,; 2\pi]$. Une fonction f est donc intégrable sur $\mathbb{T}$ si et seulement si la fonction $\theta \mapsto f(e^{i\theta})$ est Lebesgue-intégrable sur $[0\,; 2\pi]$, et on a

$$\int_{\mathbb{T}} f\, d\sigma = \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})\, \frac{d\theta}{2\pi}\,.$$

On définit de même les espaces $\mathrm{L}^p(\Gamma)$ pour tout cercle $\Gamma \subset \mathbb{C}$.

On notera $\hat{f}(n)$, $n \in \mathbb{Z}$ les coefficients de Fourier d'une fonction $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{T})$:

$$\hat{f}(n) = \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) e^{-in\theta}\, \frac{d\theta}{2\pi}\,.$$

On supposera connus les rudiments de la théorie des séries de Fourier. En particulier, on utilisera la formule de Parseval, et on se servira du fait que la série de Fourier d'une fonction périodique de classe $\mathcal{C}^1$ converge normalement vers cette fonction.

Enfin, rappelons la définition du **support d'une mesure**.

Soit σ une mesure borélienne positive sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, et notons W_0 la réunion de tous les ouverts σ-négligeables. Comme $\mathbb{R}^n$ est à base dénombrable d'ouverts, on peut trouver une famille dénombrable d'ouverts $(\mathrm{W}_i)_{i=1}^{\infty}$ telle que $\sigma(\mathrm{W}_i) = 0$ pour tout i et $\mathrm{W}_0 = \bigcup_1^{\infty} \mathrm{W}_i$. Comme σ est une mesure, on a donc $\sigma(\mathrm{W}_0) = \sigma(\bigcup_1^{\infty} \mathrm{W}_i) = 0$. Ainsi, W_0 est un ouvert σ-négligeable qui est visiblement le *plus grand* ouvert σ-négligeable. Le support de σ, noté $\mathrm{supp}(\sigma)$, est par définition le complémentaire de cet ouvert (relativement à Ω).

Si μ est une mesure complexe, on pose $\mathrm{supp}(\mu) = \mathrm{supp}(|\mu|)$, où $|\mu|$ est la variation totale de μ.

3. Analyse fonctionnelle

Si X est un espace topologique, on note $\mathcal{C}^0(\mathrm{X})$ l'ensemble des fonctions continues sur X à valeurs complexes ; et si K est un espace topologique compact, on note $\mathcal{C}(\mathrm{K})$ l'espace de Banach $(\mathcal{C}^0(\mathrm{K}), \| \ \|_\infty)$.

En ce qui concerne les espaces de fonctions continues, on utilisera le théorème d'Ascoli au chapitre 3, sous sa forme la plus simple : *Soit* (f_n) *une suite de fonctions continues à valeurs complexes sur un espace métrique compact. On suppose que la suite* (f_n) *est uniformément bornée, et que toutes les* f_n *sont* M*-lipschitziennes, pour une constante* M *indépendante de* n. *Alors la suite* (f_n) *admet une sous-suite uniformément convergente.*

On aura également besoin des deux versions suivantes du **théorème de représentation de Riesz**.

(1) *Soit* Ω *un ouvert de* $\mathbb{R}^n$, *et notons* $\mathcal{K}(\Omega)$ *l'ensemble des fonctions continues sur* Ω *à support compact. Si* L *est une forme linéaire* **positive** *sur* $\mathcal{K}(\Omega)$ – *ce qui signifie qu'on a* $\mathrm{L}(\varphi) \geqslant 0$ *pour toute fonction positive* $\varphi \in \mathcal{K}(\Omega)$ – *alors il existe une (unique) mesure borélienne positive* σ *sur* Ω, *finie sur les compacts, telle que* $\mathrm{L}(\varphi) = \int \varphi \, d\sigma$ *pour toute fonction* $\varphi \in \mathcal{K}(\Omega)$.

(2) *Soit* K *un espace métrique compact. Si* L *est une forme linéaire continue sur* $\mathcal{C}(\mathrm{K})$, *alors il existe une (unique) mesure borélienne complexe* μ *sur* K *telle que* $\mathrm{L}(\varphi) = \int \varphi \, d\mu$ *pour toute fonction* $\varphi \in \mathcal{C}(\mathrm{K})$.

Le théorème de représentation de Riesz n'étant pas un résultat élémentaire, on ne l'utilisera qu'en cas de réelle nécessité. De fait, il est fréquent qu'une mesure apparaisse naturellement comme forme linéaire continue et non comme mesure abstraite. Il est donc souhaitable de disposer d'un nom particulier pour désigner les formes linéaires continues sur $\mathcal{C}(\mathrm{K})$ lorsque K est un espace métrique compact : conformément à un certain usage, on les appellera **mesures de Radon sur** K. On notera $\langle \mu, \varphi \rangle$ le résultat de l'action d'une mesure de Radon μ sur une fonction $\varphi \in \mathcal{C}(\mathrm{K})$.

Les autres résultats d'analyse fonctionnelle dont on se servira sont le théorème de Hahn-Banach (chapitres 4, 9 et 11), le théorème du graphe fermé (chapitre 12) et le théorème de Banach-Alaoglu (chapitre 11). Le théorème de Banach-Alaoglu sera utilisé sous la forme suivante : *Si* X *est un espace de Banach séparable, alors toute suite bornée* $(x_n^*) \subset \mathrm{X}^*$

admet une sous-suite (y_n^*) *qui converge simplement sur* X *vers un certain* $y^* \in X^*$ *; on dit encore que* (y_n^*) *converge* **préfaiblement** *dans* X^*. *Ici, bien sûr,* X^* *est le dual de* X.

Enfin, rappelons la définition d'une **algèbre de Banach** : Une algèbre de Banach est une algèbre A sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, muni d'une norme $\| \ \|$ qui en fait un espace de Banach, et qui est *sous-multiplicative* : $\|ab\| \leqslant \|a\| \, \|b\|$ pour tous $a, b \in A$. Si A possède une unité $\mathbf{1}$, on impose de plus $\|\mathbf{1}\| = 1$.

4. Topologie

On utilisera le théorème d'extension de Tietze-Urysohn au chapitre 6, sous la forme suivante : *Si* F *est un fermé de* $\mathbb{R}^n$, *alors toute fonction continue* $u : F \to \mathbb{C}$ *peut se prolonger en une fonction continue* $\tilde{u} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$.

On aura également recours au théorème de Baire dans les chapitres 9 et 12.

On se servira souvent du fait que si U est un ouvert d'un espace vectoriel normé E, alors ses composantes connexes sont également des ouverts de E, et sont en fait connexes par arcs.

Si (X, d) est un espace métrique, on note $d(a, A)$ la distance d'un point $a \in X$ à un ensemble $A \subset X$. On note également $d(A, B)$ la distance entre deux parties de X, définie par

$$d(A, B) = \inf \{d(a, b);\ a \in A,\ b \in B\}.$$

Enfin, rappelons la définition du **support d'une application** : si X est un espace topologique et si E est un espace vectoriel, le support d'une application $f : X \to E$ est l'adhérence de l'ensemble $\{x \in X;\ f(x) \neq 0\}$.

Chapitre 1

Intégrale curviligne

1.1. Formes différentielles de degré 1

1.1.1. Formes différentielles sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$

Dans cette section, Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et la lettre $\mathbb{K}$ désigne indifféremment $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

On note $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ l'ensemble des applications $\mathbb{R}$-linéaires de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{K}$. Muni de ses opérations naturelles, $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n. Si on note $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et $(e_1^*, \dots, e_n^*)$ la base duale dans $(\mathbb{R}^n)^*$, définie par les relations $\langle e_i^*, e_j \rangle = \delta_{ij}$, alors $(e_1^*, \dots, e_n^*)$ est une base de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$.

Définition 1.1.1. *On appelle* **forme différentielle de degré** 1 **sur** Ω *(ou plus brièvement :* 1**-forme différentielle sur** Ω*), à valeurs dans* $\mathbb{K}$*, toute application* $\omega : \Omega \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$*. On note* $\mathcal{A}^1(\Omega, \mathbb{K})$ *l'ensemble des* 1*-formes différentielles sur* Ω*, et* $\mathcal{A}^1_k(\Omega, \mathbb{K})$ *l'ensemble des* 1*-formes différentielles de classe* $\mathcal{C}^k$ *(*$k \geqslant 0$*).*

Exemple 1.1.2. *Si* $f : \Omega \to \mathbb{K}$ *est différentiable, alors* df *est une* 1*-forme différentielle sur* Ω*; elle est de classe* $\mathcal{C}^k$ *si* f *est de classe* $\mathcal{C}^{k+1}$*.*

Remarques. 1) Il sera parfois commode de pouvoir parler de 1-formes différentielles sur une partie quelconque de $\mathbb{R}^n$. La définition est identique.

2) On définit la **somme** de deux 1-formes ω_1 et ω_2 en posant $(\omega_1 + \omega_2)(x) = \omega_1(x) + \omega_2(x)$, et le **produit** d'une 1-forme ω par une fonction $f : \Omega \to \mathbb{K}$ en posant $(f\omega)(x) = f(x)\omega(x)$. De cette façon, on munit $\mathcal{A}^1(\Omega, \mathbb{K})$ d'une structure de module sur la $\mathbb{K}$-algèbre $\mathbb{K}^\Omega$ de toutes les fonctions $f : \Omega \to \mathbb{K}$; et avec ces mêmes opérations, chaque $\mathcal{A}^1_k(\Omega, \mathbb{K})$ devient un module sur $\mathcal{C}^k(\Omega)$.

3) Pour simplifier les notations, on omettra la plupart du temps la référence au corps $\mathbb{K}$. On écrira ainsi $\mathcal{A}^1(\Omega)$ au lieu de $\mathcal{A}^1(\Omega, \mathbb{K})$.

Notons $x_1, \dots, x_n$ les « fonctions coordonnées » sur Ω, c'est-à-dire les restrictions à Ω des applications $e_1^*, \dots, e_n^*$. Comme les e_i^* sont linéaires, les x_i sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ et on a

$$dx_i(a) = e_i^*$$

pour tout $a \in \Omega$. Ainsi, $(dx_1, \dots, dx_n)$ est en tout point une base de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$. On en déduit que si $\omega \in \mathcal{A}^1(\Omega, \mathbb{K})$, alors il existe un unique n-uplet de fonctions scalaires $(\omega_1, \dots, \omega_n)$ tel que

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} \omega_i \, dx_i \ ,$$

les ω_i étant de classe $\mathcal{C}^k$ si (et seulement si) ω est de classe $\mathcal{C}^k$. En d'autres termes, $(dx_1, \dots, dx_n)$ est une *base* du module $\mathcal{A}^1(\Omega, \mathbb{K})$ et de chacun des modules $\mathcal{A}^1_k(\Omega, \mathbb{K})$. On dira que $(dx_1, \dots, dx_n)$ est la **base canonique** de $\mathcal{A}^1(\Omega, \mathbb{K})$.

Comme $dx_i(a) \cdot h = h_i$ pour $a \in \Omega$ et $h = (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n$, la formule $df(a) \cdot h = \sum_1^n h_i \partial_i f(a)$ donne l'expression de la différentielle d'une fonction différentiable $f : \Omega \to \mathbb{K}$ dans la base $(dx_1, \dots, dx_n)$: on a

$$df = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \, dx_i \, .$$

Il est important de remarquer que les dx_i dépendent du choix d'un système de fonctions coordonnées : si on décidait de repérer les points de Ω par leurs coordonnées dans une autre base que la base canonique $(e_1, \dots, e_n)$, on obtiendrait une autre base pour $\mathcal{A}^1(\Omega, \mathbb{K})$. Par ailleurs, la notation dx_i n'a elle-même rien de « canonique », puisqu'elle est imposée par le nom qu'on a donné aux fonctions coordonnées : si par exemple Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^2$, la base canonique de $\mathcal{A}^1(\Omega, \mathbb{K})$ se note plutôt $(dx\,, dy)$, et la différentielle d'une fonction f s'écrit en conséquence

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} \, dx + \frac{\partial f}{\partial y} \, dy \, .$$

1.1.2. Notation différentielle et fonctions composées

Le formalisme qu'on vient d'introduire se révèle particulièrement efficace pour le calcul de la différentielle d'une fonction composée.

Soient en effet $x_1, \dots, x_n : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ des applications différentiables dans un ouvert $\mathrm{W} \subset \mathbb{R}^m$, et pour $p \in \mathrm{W}$, posons $x(p) = (x_1(p), \dots, x_n(p))$. Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{K}$ est différentiable dans un ouvert contenant $x(\mathrm{W})$, alors, d'après le théorème des fonctions composées, la fonction $\mathbf{f}$ définie par $\mathbf{f}(p) = f(x(p))$ est différentiable dans W et on a, pour $p \in \mathrm{W}$ et $h \in \mathbb{R}^m$:

$$\begin{aligned} d\mathbf{f}(p)\cdot h &= df(x(p))\ \cdot\ [\mathrm{D}x(p)\cdot h] \\ &= \sum_{i=1}^{n} \partial_i f(x(p)) \times [\mathrm{D}x(p)\cdot h]_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} \partial_i f(x(p)) \times [dx_i(p)\cdot h]\ . \end{aligned}$$

On obtient donc

$$d\mathbf{f} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\, dx_i\ ,$$

égalité entre 1-formes différentielles où $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ est maintenant une abréviation signifiant $\partial_i f \circ x$.

En d'autres termes, le théorème des fonctions composées signifie simplement que si f est une fonction de la variable $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et si on substitue à x une fonction – encore notée x – d'une autre variable p, alors la différentielle de la fonction $\mathbf{f}(p) = f(x(p))$ s'obtient en remplaçant, dans l'expression $df = \sum \frac{\partial f}{\partial x_i}\, dx_i$, les dx_i par les différentielles des fonctions $x_i(p)$ et le point générique $x \in \mathbb{R}^n$ par la fonction $x(p)$. On obtient ainsi une règle mécanique pour le calcul de la différentielle d'une fonction apparaissant comme fonction composée.

Par exemple, si $u\,, v$ sont des fonctions différentiables, alors

$$d(uv) = v\,du + u\,dv\ ,\ \ d\Big(\frac{u}{v}\Big) = \frac{v\,du - u\,dv}{v^2}\ ,\ d(\ln u) = \frac{du}{u}$$

dès que ces expressions ont un sens.

Comme illustration, retrouvons les formules classiques pour les « dérivées partielles d'une fonction en coordonnées polaires ». On sait que l'application $(r,\theta) \mapsto (r\cos\theta, r\sin\theta)$, est un $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme de $\Omega = \{(r,\theta) \in \mathbb{R}^2;\ r > 0,\ \theta \in\ ]-\pi;\pi[\}$ sur $\Omega' = \mathbb{R}^2 \backslash \{(x\,, 0);\ x \leqslant 0\}$. On peut donc identifier entièrement un point $(x\,, y) \in \Omega'$ et ses « coordonnées polaires » (r,θ), et assimiler une fonction $f : \Omega' \to \mathbb{K}$ à la fonction $\mathbf{f}$ définie sur Ω par $\mathbf{f}(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$. En posant

$$x(r,\theta) = r\cos\theta\ ,\ \ y(r,\theta) = r\sin\theta$$

et en notant r, θ les fonctions coordonnées sur Ω, on a

$$\begin{aligned} d\mathbf{f} &= \frac{\partial f}{\partial x}\, dx + \frac{\partial f}{\partial y}\, dy \\ &= \frac{\partial f}{\partial x} \times (\cos\theta\, dr - r\sin\theta\, d\theta) + \frac{\partial f}{\partial y} \times (\sin\theta\, dr + r\cos\theta\, d\theta) \\ &= \left(\cos\theta\, \frac{\partial f}{\partial x} + \sin\theta\, \frac{\partial f}{\partial y}\right) dr + \left(r\cos\theta\, \frac{\partial f}{\partial y} - r\sin\theta\, \frac{\partial f}{\partial x}\right) d\theta \end{aligned}$$

En écrivant désormais f au lieu de $\mathbf{f}$, on en déduit

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial r} = \cos\theta \dfrac{\partial f}{\partial x} + \sin\theta \dfrac{\partial f}{\partial y} \\ \dfrac{\partial f}{\partial \theta} = r\cos\theta \dfrac{\partial f}{\partial y} - r\sin\theta \dfrac{\partial f}{\partial x} \end{cases}$$

d'où, en inversant le système :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = \cos\theta \dfrac{\partial f}{\partial r} - \dfrac{\sin\theta}{r} \dfrac{\partial f}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = \sin\theta \dfrac{\partial f}{\partial r} + \dfrac{\cos\theta}{r} \dfrac{\partial f}{\partial \theta} \end{cases}$$

1.1.3. Cas du plan complexe

On identifiera constamment $\mathbb{C}$ et $\mathbb{R}^2$ via l'application

$$(x\,,y) \mapsto z = x + iy.$$

Si Ω est un ouvert de $\mathbb{C}$, alors, comme expliqué plus haut, on note $(dx\,,dy)$ la base canonique de $\mathcal{A}^1(\Omega,\mathbb{C})$. Pour $a \in \Omega$ et $h = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$, on a ainsi

$$\begin{cases} dx(a)\cdot h = \alpha = \mathrm{Re}(h) \\ dy(a)\cdot h = \beta = \mathrm{Im}(h) \end{cases}$$

Notons $z, \bar{z} : \Omega \to \mathbb{C}$ les restrictions à Ω de l'identité et de la conjugaison complexe. Comme l'identité et la conjugaison sont des applications $\mathbb{R}$-linéaires, z et $\bar{z}$ sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ et on a, pour $a \in \Omega$ et $h \in \mathbb{C}$:

$$\begin{cases} dz(a)\cdot h = h \\ d\bar{z}(a)\cdot h = \overline{h} \end{cases}$$

Voici une autre manière de dire la même chose : compte tenu de l'identification entre $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{C}$, on a $z(x\,,y) = x + iy$, $\bar{z}(x\,,y) = x - iy$, d'où

$$dz = dx + idy \;\;,\;\; d\bar{z} = dx - idy\,.$$

On en déduit

$$dx = \frac{1}{2}\,(dz + d\bar{z})\;,\;\; dy = \frac{1}{2i}\,(dz - d\bar{z})\;,$$

ce qui prouve que $(dz, d\bar{z})$ est également une base de $\mathcal{A}^1(\Omega,\mathbb{C})$ et de chacun des $\mathcal{A}^1_k(\Omega,\mathbb{C})$.

Si $\omega = \mathrm{P}\,dx + \mathrm{Q}\,dy \in \mathcal{A}^1(\Omega,\mathbb{C})$, alors

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{1}{2}\mathrm{P} \times (dz + d\bar{z}) + \frac{1}{2i}\mathrm{Q} \times (dz - d\bar{z}) \\ &= \frac{1}{2}(\mathrm{P} - i\mathrm{Q})\,dz + \frac{1}{2}(\mathrm{P} + i\mathrm{Q})\,d\bar{z}\,. \end{aligned}$$

En particulier, si f est une fonction scalaire différentiable sur Ω, alors

$$df = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right)dz + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right)d\bar{z}\,.$$

Cela conduit à la définition suivante.

Définition 1.1.3. *Si f est une fonction différentiable sur Ω, on pose*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial z} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x} - i\dfrac{\partial f}{\partial y}\right) \\ \dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x} + i\dfrac{\partial f}{\partial y}\right) \end{cases}$$

Avec ces notations, on a donc

$$df = \frac{\partial f}{\partial z}\,dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\,d\bar{z}\,.$$

Il est dès lors naturel de vouloir interpréter $\frac{\partial}{\partial z}$ et $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ comme opérateurs de « dérivation par rapport aux variables z et $\bar{z}$ ». Prise à la lettre, cette expression n'a pas grand sens, car z et $\bar{z}$ ne sont évidemment pas des variables indépendantes. Cependant, la formule précédente laisse à penser que les opérateurs $\frac{\partial}{\partial z}$ et $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ traitent effectivement z et $\bar{z}$ comme deux variables indépendantes et ont vocation à jouer le rôle d'opérateurs de dérivation par rapport à ces deux variables. Avec cette interprétation, une fonction f vérifiant $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$ devrait « ne dépendre que de z », et une fonction f vérifiant $\frac{\partial f}{\partial z} = 0$ devrait « ne dépendre que de $\bar{z}$ ». On verra plus tard que cette intuition est parfaitement justifiée.

Pour le moment, on peut déjà constater qu'on a

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial z} = 1 = \dfrac{\partial \bar{z}}{\partial \bar{z}} \\ \dfrac{\partial z}{\partial \bar{z}} = 0 = \dfrac{\partial \bar{z}}{\partial z} \end{cases}$$

Comme de façon générale, on a $\frac{\partial(uv)}{\partial z} = u\frac{\partial v}{\partial z} + v\frac{\partial u}{\partial z}$ et $\frac{\partial(uv)}{\partial \bar{z}} = u\frac{\partial v}{\partial \bar{z}} + v\frac{\partial u}{\partial \bar{z}}$, on en déduit que si $f(z)$ s'exprime comme polynôme ou comme fraction rationnelle en z et $\bar{z}$, alors $\frac{\partial f}{\partial z}$ et $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}$ s'obtiennent effectivement en « dérivant par rapport à z et à $\bar{z}$ ». Par exemple :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial |z|^2}{\partial z} = \dfrac{\partial (z\bar{z})}{\partial z} = \bar{z} \\ \dfrac{\partial |z|^2}{\partial \bar{z}} = \dfrac{\partial (z\bar{z})}{\partial \bar{z}} = z \end{cases}$$

Remarquons également que pour toute fonction f différentiable sur Ω, on a

$$\frac{\partial \overline{f}}{\partial \bar{z}} = \overline{\frac{\partial f}{\partial z}} \, .$$

Enfin, notons une relation importante entre $\frac{\partial}{\partial z}$, $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ et l'opérateur de Laplace

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \, .$$

Proposition 1.1.4. *Pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^2(\Omega)$, on a*

$$\Delta f = 4 \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial \bar{z}} = 4 \frac{\partial^2 f}{\partial \bar{z} \partial z} \, .$$

La vérification est laissée en exercice.

1.1.4. Image réciproque d'une 1-forme par une application

Définition 1.1.5. *Soient* W *un ouvert de* $\mathbb{R}^m$, Ω *un ouvert de* $\mathbb{R}^n$ *et* $\varphi : \mathrm{W} \to \Omega$ *une application différentiable. Si* ω *est une* 1*-forme différentielle sur* Ω, *l'***image réciproque de** ω **par** φ *est la* 1*-forme différentielle* $\varphi^*\omega$ *définie sur* W *par*

$$\varphi^*\omega(p) = \omega(\varphi(p)) \circ \mathrm{D}\varphi(p) \, .$$

Cette définition formelle est la traduction d'une idée très simple : la 1-forme ω s'exprime à l'origine en fonction des n variables $x_1, \dots, x_n$, et si ces n variables sont elles-mêmes fonctions de m variables $p_1, \dots, p_m$, ce qui s'écrit $x = \varphi(p)$, alors $\varphi^*\omega$ est la 1-forme obtenue en « exprimant ω à l'aide de $p_1, \dots, p_m$ ». De façon précise, si $\omega = \sum_1^n \omega_i dx_i$ et si on pose $\varphi(p) = (x_1(p), \dots, x_n(p))$, alors

$$\varphi^*\omega = \sum_{i=1}^{n} (\omega_i \circ \varphi) \, dx_i \, ,$$

où dx_i est maintenant la différentielle de la fonction $x_i(p)$.

Si f est une fonction scalaire différentiable sur Ω, le théorème des fonctions composées donne

$$\varphi^*(df) = d(f \circ \varphi) \, .$$

En particulier, si φ est à valeurs dans $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$, on a

$$\begin{cases} \varphi^*(dz) = d\varphi \\ \varphi^*(d\bar{z}) = d\overline{\varphi} \end{cases}$$

Considérons par exemple l'application $\varphi :]0\,;+\infty[\times\mathbb{R} \to \mathbb{C}^*$ définie par

$$\varphi(r, \theta) = re^{i\theta} \, .$$

En notant $r\cos\theta$ et $r\sin\theta$ les fonctions $(r,\theta)\mapsto r\cos\theta$ et $(r,\theta)\mapsto r\sin\theta$, on a

$$\begin{cases} \varphi^*(dx) = d(r\cos\theta) = \cos\theta\, dr - r\sin\theta\, d\theta \\ \varphi^*(dy) = d(r\sin\theta) = \sin\theta\, dr + r\cos\theta\, d\theta \end{cases}$$

De même,

$$\begin{cases} \varphi^*(dz) = d(re^{i\theta}) = e^{i\theta}dr + ire^{i\theta}d\theta \\ \varphi^*(d\bar{z}) = d(re^{-i\theta}) = e^{-i\theta}dr - ire^{-i\theta}d\theta \end{cases}$$

Des calculs simples donnent alors

$$\varphi^*\left(\frac{dz}{z}\right) = \frac{dr}{r} + id\theta\ ,$$

et, en posant $\omega_0 = \dfrac{xdy - ydx}{x^2+y^2}$:

$$\varphi^*(\omega_0) = d\theta\ .$$

Les 1-formes $\frac{dz}{z}$ et ω_0 réapparaîtront souvent dans ce livre, et le lecteur est vivement encouragé à effectuer en détail les calculs précédents.

Remarquons pour finir que si $\varphi : W \to W'$ et $\psi : W' \to W''$ sont différentiables, alors

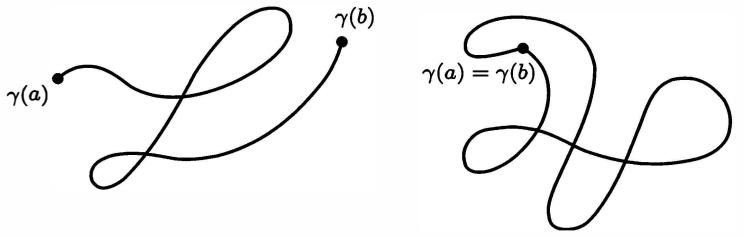
$$(\psi\circ\varphi)^* = \varphi^*\psi^*\ .$$

1.2. Chemins, lacets et courbes

Dans cette section, la lettre X désignera toujours un espace topologique séparé.

1.2.1. Chemins et lacets

Définition 1.2.1. *On appelle* **chemin dans** X *toute application continue* $\gamma : J \to X$, *où* $J = [a\,;b]$ *est un intervalle compact de* $\mathbb{R}$ *non réduit à un point.*



Si $\gamma : [a\,;b] \to X$ est un chemin, on note $\mathrm{Im}(\gamma)$ l'image de γ, c'est-à-dire l'ensemble $\gamma([a\,;b])$, qui est un compact de X. Lorsque γ est un chemin dans $\mathbb{C}$, on ne doit bien entendu pas confondre son image et sa partie imaginaire !

Les points $p = \gamma(a)$, $q = \gamma(b)$ sont appelés les **extrémités** du chemin γ. On dit que p est le **point initial** de γ, et que q est le **point terminal** de γ ; on dit également que γ est un chemin **de** p **vers** q, et que γ **relie** p **à** q **dans** X.

On dit qu'un chemin $\gamma : [a\,;b] \to \mathbb{R}^n$ est **de classe** $\mathcal{C}^k$ **par morceaux** ($k \geqslant 1$) s'il existe une subdivision $\mathbf{s} = (s_0, \ldots, s_N)$ de l'intervalle $[a\,;b]$ telle que la restriction de γ à chaque intervalle $[s_i\,;s_{i+1}]$ soit de classe $\mathcal{C}^k$.

Pour un chemin $\gamma : [a\,;b] \to \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, on notera toujours U_γ l'ensemble des points $t \in]a\,;b[$ où γ est dérivable ; U_γ est donc une réunion finie d'intervalles ouverts deux à deux disjoints. On note encore γ la restriction de γ à U_γ.

Enfin, un chemin $\gamma : [a\,;b] \to \mathbb{R}^n$ est dit **régulier** s'il est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux et si γ' ne s'annule en aucun point de U_γ.

Définition 1.2.2. *On dit qu'un chemin* $\gamma : [a\,;b] \to X$ *est un* **lacet** *si* $\gamma(b) = \gamma(a)$.

Le lemme suivant établit une correspondance entre lacets dans X et applications continues du cercle $\mathbb{T}$ dans X.

Lemme 1.2.3. *Soit* $\gamma : [a\,;b] \to X$ *un lacet dans* X. *Si on note* $p : [a\,;b] \to \mathbb{T}$ *la « surjection canonique » définie par* $p(t) = e^{2i\pi t/(b-a)}$, *alors il existe une unique application* $\hat{\gamma} : \mathbb{T} \to \mathrm{Im}(\gamma)$ *telle que* $\gamma = \hat{\gamma} \circ p$, *et cette application est continue. On appellera* $\hat{\gamma}$ *l'***application quotient** *associée au lacet* γ.

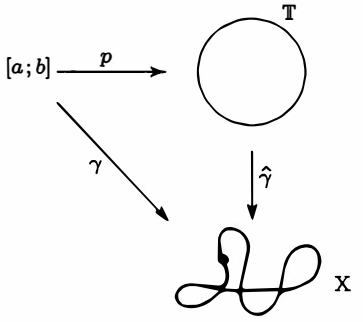


FIG. 2. Application quotient

Preuve. L'existence et l'unicité de $\hat{\gamma}$ sont évidentes : on *doit* poser $\hat{\gamma}(w) = \gamma(t)$ si $w \neq p(a) = p(b)$, où t est l'unique antécédent de w par p, et $\hat{\gamma}(w) = \gamma(a) = \gamma(b)$ si $w = p(a) = p(b)$. Il reste à prouver la continuité.

Soit F un fermé de X. La surjectivité de p montre qu'on a $\hat{\gamma}^{-1}(F) = p(\gamma^{-1}(F))$. Comme γ est continue, $\gamma^{-1}(F)$ est un fermé de $[a\,;b]$, et est donc compact. Par continuité de p, on en déduit que $\hat{\gamma}^{-1}(F)$ est compact, donc fermé dans $\mathbb{T}$. Comme F est un fermé arbitraire de X, cela prouve que $\hat{\gamma}$ est continue.

Si $\gamma : [a\,;b] \to X$ est un lacet et si on pose $T = b - a$, alors γ se prolonge de manière unique en une application continue et T-périodique $G : \mathbb{R} \to X$. On dira que deux lacets γ et λ sont **translatés** l'un de l'autre si leurs extensions périodiques G et L le sont, autrement dit s'il existe un nombre réel t_0 tel que $G(t) \equiv L(t_0 + t)$. Il revient au même de dire que les applications quotients $\hat{\gamma}$ et $\hat{\lambda}$ sont translatées l'une de l'autre au sens où on l'entend habituellement pour des fonctions définies sur un groupe : $\hat{\gamma}(\xi) \equiv \hat{\lambda}(\xi_0\xi)$, pour un certain $\xi_0 \in \mathbb{T}$ fixé ; et de manière sans doute plus imagée, cela signifie que γ et λ sont les « mêmes » lacets, mais qu'ils ne commencent peut-être pas au même point. Par exemple, les lacets définis sur $[0\,;2\pi]$ par $\gamma(t) = e^{it}$ et $\lambda(t) = -e^{it}$ sont translatés l'un de l'autre car $-e^{it} = e^{i(t+\pi)}$.

1.2.2. Courbes de Jordan

On dit qu'un chemin $\gamma : [a\,;b] \to X$ est un **chemin de Jordan** si γ est injectif, et que γ est un **lacet de Jordan** si γ est un lacet et si la restriction de γ à $[a\,;b[$ est injective.

Une **courbe de Jordan** $\Gamma \subset X$ est par définition l'image d'un chemin de Jordan (auquel cas on dit que Γ est une courbe **simple**) ou d'un lacet de Jordan (et on dit alors que Γ est une courbe **fermée**) ; un tel chemin (ou lacet) est appelé un **paramétrage** de la courbe Γ.

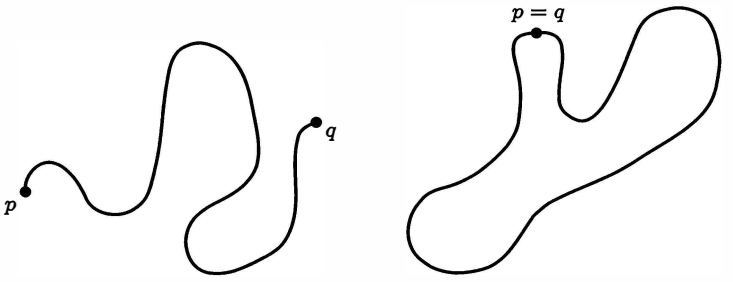


FIG. 3. Courbe de Jordan simple. Courbe de Jordan fermée

On dira qu'une courbe de Jordan $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ est une **courbe régulière** si Γ admet un paramétrage régulier, et que Γ est une courbe (régulière) **de**

classe $\mathcal{C}^k$ par morceaux si Γ admet un paramétrage (régulier) de classe $\mathcal{C}^k$ par morceaux. On définit de même les courbes (régulières) de classe $\mathcal{C}^k$, avec une petite subtilité : lorsque la courbe est fermée, on impose au paramétrage $\gamma : [a\,;b] \to \mathbb{R}^n$ de vérifier $\gamma^{(j)}(b) = \gamma^{(j)}(a)$ pour tout $j \leqslant k$; autrement dit, on exige que le prolongement périodique de γ soit de classe $\mathcal{C}^k$.

Si $\gamma : [a\,;b] \to \mathrm{X}$ est un chemin de Jordan, alors γ est une bijection continue de $[a\,;b]$ sur $\mathrm{Im}(\gamma)$; et si γ est un lacet de Jordan, alors l'application quotient $\hat{\gamma} : \mathbb{T} \to \mathrm{X}$ est une bijection continue de $\mathbb{T}$ sur $\mathrm{Im}(\gamma)$. Comme $[a\,;b]$ et $\mathbb{T}$ sont compacts, on obtient donc le résultat suivant :

Lemme 1.2.4. *Soit $\gamma : [a\,;b] \to \mathrm{X}$ un chemin d'image Γ.*

a) *Si γ est un chemin de Jordan, alors γ est un homéomorphisme de $[a\,;b]$ sur Γ.*

b) *Si γ est un lacet de Jordan, alors l'application quotient $\hat{\gamma} : \mathbb{T} \to \Gamma$ est un homéomorphisme de $\mathbb{T}$ sur Γ.*

Corollaire 1.2.5. *Une courbe de Jordan simple est homéomorphe à $[0\,;1]$, et une courbe de Jordan fermée est homéomorphe à $\mathbb{T}$.*

1.2.3. Équivalence de chemins, équivalence de lacets

On appellera **changement de paramètre** tout homéomorphisme θ entre deux intervalles compacts de $\mathbb{R}$. Deux chemins γ et λ seront dits **équivalents** s'ils se déduisent l'un de l'autre par un changement de paramètre croissant, autrement dit s'il existe un changement de paramètre croissant θ tel que $\gamma = \lambda \circ \theta$; et on dira que γ et λ sont **anti-équivalents** s'ils se déduisent l'un de l'autre par un changement de paramètre décroissant. Deux *lacets* γ et λ seront dits **(anti-)équivalents en tant que lacets** s'ils admettent des translatés (anti-)équivalents.

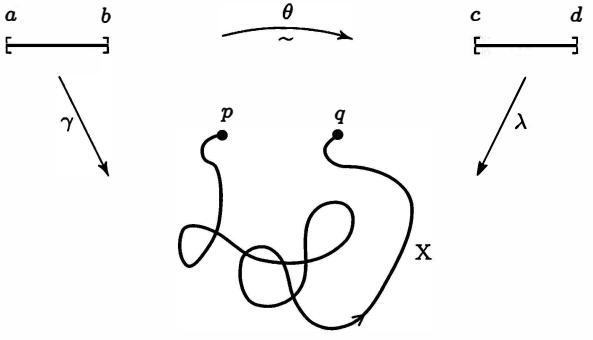


FIG. 4. Équivalence de chemins

Exemples. 1) Les chemins dans $\mathbb{C}$ définis respectivement sur $[-\pi/2\,;\pi/2]$ et $[-\pi/4\,;\pi/4]$ par $\gamma(t) = e^{it}$ et $\lambda(t) = e^{2it}$ sont équivalents.

2) Si $\gamma : [a\,;b] \to X$ est un chemin et si on note γ^- le **chemin inverse**, défini par

$$\gamma^-(t) = \gamma(b+a-t)\,,$$

alors γ et γ^- sont anti-équivalents. En particulier, les lacets $t \mapsto e^{it}$ et $t \mapsto e^{-it}$ $(t \in [0\,;2\pi])$ sont anti-équivalents.

3) Les lacets $t \mapsto e^{it}$ et $t \mapsto -e^{it} = e^{i(\pi+t)}$ $(t \in [0\,;2\pi])$ sont translatés l'un de l'autre et donc équivalents en tant que lacets. Ils ne sont pas équivalents en tant que chemins car ils n'ont pas les mêmes extrémités.

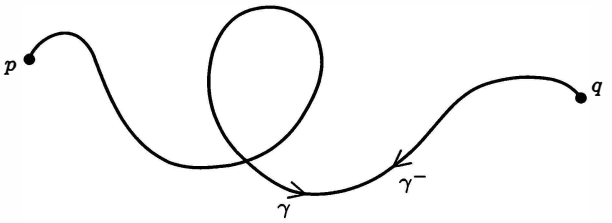


FIG. 5. Chemin inverse

Proposition 1.2.6. *Deux paramétrages d'une même courbe de Jordan sont toujours équivalents ou anti-équivalents.*

Preuve. Soient γ et λ deux paramétrages d'une même courbe de Jordan Γ. Notons $[a\,;b]$ et $[c\,;d]$ leurs intervalles de définition respectifs.

Si γ et λ sont des chemins de Jordan, le résultat est une conséquence du lemme 1.2.4 : $\theta = \lambda^{-1} \circ \gamma$ est un homéomorphisme de $[a\,;b]$ sur $[c\,;d]$.

Si γ et λ sont des lacets de Jordan, on peut supposer, quitte à translater, qu'ils ont le même point initial. Si on note ce point x_0, alors, toujours d'après le lemme 1.2.4, $\gamma_{|]a\,;b[}$ est un homéomorphisme de $]a\,;b[$ sur $\Gamma\backslash\{x_0\}$, et $\lambda_{|]c\,;d[}$ est un homéomorphisme de $]c\,;d[$ sur $\Gamma\backslash\{x_0\}$. Il existe donc un homéomorphisme $\tilde{\theta} :]a\,;b[\to]c\,;d[$ tel que $\gamma(t) \equiv \lambda(\tilde{\theta}(t))$ sur $]a\,;b[$. L'application $\tilde{\theta}$ se prolonge en un homéomorphisme θ de $[a\,;b]$ sur $[c\,;d]$, qui vérifie $\gamma = \lambda \circ \theta$ par continuité. Cela termine la démonstration.

1.3. Intégrale curviligne

1.3.1. Intégrale d'une 1-forme sur une partie de $\mathbb{R}$

Si A est une partie mesurable de $\mathbb{R}$, et si $\omega = f\,dt$ est une 1-forme différentielle définie sur A, on dit que ω est **intégrable** sur A si la fonction f est (Lebesgue-)intégrable sur A, et on définit l'intégrale de ω sur A par la formule $\int_A \omega = \int_A f\,dm$, où m est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$.

Dans le langage des formes différentielles, le théorème de changement de variables pour les intégrales se traduit de manière particulièrement

agréable. En effet, si $\varphi : U \to U'$ est un difféomorphisme entre deux ouverts de $\mathbb{R}$ et si $\omega = f dt$ est une 1-forme sur U', alors

$$\varphi^*\omega = (f \circ \varphi)\, d\varphi = (f \circ \varphi)\varphi'\, dt.$$

On obtient donc le résultat suivant.

Proposition 1.3.1. *Soit $\varphi : U \to U'$ un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme entre deux ouverts de $\mathbb{R}$. Si A est une partie mesurable de U, alors $\varphi(A)$ est mesurable, et une 1-forme différentielle $\omega \in \mathcal{A}^1(U')$ est intégrable sur $\varphi(A)$ si et seulement si $\varphi^*\omega$ est intégrable sur A. Dans ce cas, on a $\int_{\varphi(A)} \omega = \int_A \varphi^*\omega$ si φ est croissant, et $\int_{\varphi(A)} \omega = -\int_A \varphi^*\omega$ si φ est décroissant.*

1.3.2. Intégrale sur un chemin de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux ; exemples

Rappelons que si $\gamma : [a\,;b] \to \mathbb{R}^n$ est un chemin de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, on note U_γ l'ensemble des points $t \in]a\,;b[$ en lesquels γ est dérivable.

Définition 1.3.2. *Soit $\gamma : [a\,;b] \to \mathbb{R}^n$ est un chemin de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux. Si ω est une 1-forme différentielle définie sur $\mathrm{Im}(\gamma)$, on dit que ω est* **intégrable sur** *γ si la 1-forme $\gamma^*\omega$ est intégrable sur U_γ, et on définit* **l'intégrale de** *ω* **sur** *γ par la formule*

$$\int_\gamma \omega = \int_{U_\gamma} \gamma^*\omega = \int_a^b \omega(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt \ .$$

Remarques. 1) Toute 1-forme ω continue sur $\mathrm{Im}(\gamma)$ est intégrable sur γ, car la fonction $t \mapsto \omega(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)$ se prolonge par continuité à l'adhérence de chacun des intervalles constituant U_γ.

2) Si on note $i : [a\,;b] \to \mathbb{R}$ le chemin « injection canonique » défini par $i(t) = t$, et si $f : [a\,;b] \to \mathbb{K}$ est une fonction continue, alors $\int_i f dt = \int_a^b f(t)\, dt$.

La définition de l'intégrale curviligne peut paraître un peu formelle, mais le « mode d'emploi » est extrêmement simple : pour intégrer $\omega = \sum \omega_i dx_i$ sur $\gamma : [a\,;b] \to \mathbb{R}^n$, on écrit $\gamma(t) = (x_1, \dots, x_n)$, $dx_i = x_i'(t)dt$, et on intègre entre a et b. De même, pour intégrer $\omega = A dz + B d\bar{z}$ sur un chemin $\gamma : [a\,;b] \to \mathbb{C}$, il suffit simplement d'écrire $z = \gamma(t)$, $dz = \gamma'(t)dt$ et $d\bar{z} = \overline{\gamma}'(t)dt$.

Par exemple, si A est une fonction continue sur le bord d'un disque $D(z_0, R)$, alors, en notant $\partial D(z_0, R)$ le lacet $\theta \mapsto z_0 + Re^{i\theta}$ (défini sur $[0\,;2\pi]$), on a

$$\int_{\partial D(z_0,R)} A(z)\,dz = \int_0^{2\pi} A(z_0 + Re^{i\theta})\,iRe^{i\theta}\,d\theta\,.$$

Exemple 1.3.3. *Soient* $R > 0$, $\theta_0 \leqslant \theta_1$, *et soit* $\gamma : [\theta_0;\theta_1] \to \mathbb{C}^*$ *le chemin défini par* $\gamma(\theta) = Re^{i\theta}$.

a) On a $\displaystyle\int_\gamma \frac{dz}{z} = i(\theta_1 - \theta_0)$.

b) En posant $\omega_0 = \dfrac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2}$, *on a* $\displaystyle\int_\gamma \omega_0 = \theta_1 - \theta_0\,.$

Preuve. Soit $\varphi :]0;+\infty[\times\mathbb{R} \to \mathbb{C}^*$ l'application $(r,\theta) \mapsto re^{i\theta}$.

On sait qu'on a $\varphi^*(\frac{dz}{z}) = \frac{dr}{r} + id\theta$. D'autre part, on a $\gamma = \varphi \circ \lambda$, où λ est le chemin défini sur $[\theta_0;\theta_1]$ par $\lambda(\theta) = (R,\theta)$. Par suite, $\gamma^*(\frac{dz}{z}) = \lambda^*(\frac{dr}{r} + id\theta)$ et $\int_\gamma \frac{dz}{z} = \int_\lambda \left(\frac{dr}{r} + id\theta\right) = 0 + \int_{\theta_0}^{\theta_1} id\theta$. Le même raisonnement vaut pour ω_0, car $\varphi^*\omega_0 = d\theta$.

Autre preuve. Pour *a)*, on écrit $\int_\gamma \frac{dz}{z} = \int_{\theta_0}^{\theta_1} \frac{iRe^{i\theta}}{Re^{i\theta}}\,d\theta = i\int_{\theta_0}^{\theta_1} d\theta$. Pour *b)*, on utilise l'identité $\frac{dz}{z} = d(\ln|z|) + i\omega_0$, dont la vérification est laissée en exercice, et le corollaire 1.3.6 démontré ci-après.

1.3.3. Propriétés de l'intégrale curviligne

La première propriété importante de l'intégrale curviligne est son **additivité** par rapport au chemin. La vérification est immédiate.

Lemme 1.3.4. *Soit* $\gamma : [a\,;b] \to \mathbb{R}^n$ *un chemin de classe* $\mathcal{C}^1$, *et soit* $c \in]a\,;b[$. *Si* ω *est une* 1*-forme intégrable sur* γ, *alors* ω *est intégrable sur* $\gamma_{|[a;c]}$ *et sur* $\gamma_{[c;b]}$, *et on a* $\int_\gamma \omega = \int_{\gamma_{|[a;c]}} \omega + \int_{\gamma_{|[c;b]}} \omega\,.$

La deuxième propriété essentielle découle directement du « théorème fondamental de l'analyse ».

Théorème 1.3.5. *Si* Ω *est un ouvert de* $\mathbb{C}$ *et si* $F \in \mathcal{C}^1(\Omega)$, *alors, pour tout chemin* $\gamma : [a\,;b] \to \Omega$ *de classe* $\mathcal{C}^1$ *par morceaux, on a*

$$\int_\gamma dF = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))\,.$$

Preuve. Quitte à subdiviser l'intervalle $[a\,;b]$, on peut, grâce à la propriété d'additivité, supposer que γ est de classe $\mathcal{C}^1$. Dans ce cas, l'application $F \circ \gamma$ est de classe $\mathcal{C}^1$, avec $(F\circ\gamma)'(t) \equiv dF(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)$, et donc

$$\int_\gamma dF = \int_a^b (F\circ\gamma)'(t)\,dt = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))\,.$$

Corollaire 1.3.6. *Si* $F \in \mathcal{C}^1(\Omega)$, *alors* $\int_\gamma dF = 0$ *pour tout lacet dans* Ω *de classe* $\mathcal{C}^1$ *par morceaux.*

La troisième propriété essentielle de l'intégrale curviligne est son **invariance** par changement de paramètre.

Proposition 1.3.7. *Soient* γ *et* λ *deux chemins ou deux lacets de classe* $\mathcal{C}^1$ *par morceaux dans* $\mathbb{R}^n$, *équivalents ou anti-équivalents, d'image commune* Γ. *Si* γ *et* λ *sont équivalents, alors* $\int_\gamma \omega = \int_\lambda \omega$ *pour toute* 1*-forme différentielle* ω *continue sur* Γ. *Si* γ *et* λ *sont anti-équivalents, alors* $\int_\gamma \omega = -\int_\lambda \omega$ *pour toute* 1*-forme* $\omega \in \mathcal{A}^1_0(\Gamma)$.

Par exemple, si $[a\,;b]$ est un intervalle de $\mathbb{R}$ et si i et i^- sont les chemins dans $\mathbb{R}$ définis par $i(t) = t$ et $i^-(t) = a + b - t$, alors $\int_i \omega = -\int_{i^-} \omega$ pour toute 1-forme différentielle continue sur $[a\,;b]$, ce qui est en accord avec la convention d'écriture $\int_b^a f(t)\,dt = -\int_a^b f(t)\,dt$ pour une fonction f continue sur $[a\,;b]$.

Preuve de 1.3.7 *dans un cas particulier important.* La preuve est très simple si on suppose que $\gamma : [a\,;b] \to \mathbb{R}^n$ et $\lambda : [c\,;d] \to \mathbb{R}^n$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ et se déduisent l'un de l'autre par un changement de paramètre $\theta : [a\,;b] \to [c\,;d]$ de classe $\mathcal{C}^1$ ainsi que son inverse. En effet, on peut alors écrire $\int_\gamma \omega = \int_{]a;b[} \gamma^*\omega = \int_{]a;b[} \theta^*(\lambda^*\omega)$, et comme θ induit un difféomorphisme de $]a\,;b[$ sur $]c\,;d[$, le théorème de changement de variables donne directement le résultat.

Pour démontrer 1.3.7 dans le cas où le changement de paramètre est seulement supposé continu, on a besoin du lemme suivant.

Lemme 1.3.8. *Soit* $\gamma : \mathrm{J} \to \mathbb{R}^n$ *un chemin de classe* $\mathcal{C}^1$ *par morceaux d'image* Γ, *et soit* ω *une* 1*-forme différentielle continue sur* Γ. *Notons* $\mathcal{S}$ *l'ensemble des subdivisions de l'intervalle* J, *et pour* $\mathbf{s} = (s_0, \dots, s_N) \in \mathcal{S}$, *posons* $L_\omega(\gamma, \mathbf{s}) = \sum_0^{N-1} \omega(\gamma(s_i)) \cdot (\gamma(s_{i+1}) - \gamma(s_i))$. *Alors* $L_\omega(\gamma, \mathbf{s})$ *tend vers* $\int_\gamma \omega$ *quand le pas de la subdivision* $\mathbf{s}$ *tend vers* 0.

Preuve. On notera $\delta(\mathbf{s})$ le pas d'une subdivision $\mathbf{s}$, et on écrira L au lieu de L_ω.

Si $\mathbf{s} = (s_0, \dots, s_N) \in \mathcal{S}$, on peut écrire $\gamma(s_{i+1}) - \gamma(s_i) = \int_{s_i}^{s_{i+1}} \gamma'(t)\,dt$ pour tout $i \leqslant N - 1$, et donc

$$L(\gamma, \mathbf{s}) - \int_\gamma \omega = \sum_0^{N-1} \int_{s_i}^{s_{i+1}} [\omega(\gamma(s_i)) - \omega(\gamma(t))] \cdot \gamma'(t)\,dt\,.$$

En choisissant une norme $\|\ \|$ sur $\mathbb{R}^n$ et en notant aussi $\|\ \|$ la norme subordonnée sur $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$, on en déduit

$$\left| \mathrm{L}(\gamma, \mathbf{s}) - \int_\gamma \omega \right| \leqslant \mathrm{C}(\mathbf{s}) \int_a^b \|\gamma'(t)\|\, dt\ ,$$

où $\mathrm{C}(\mathbf{s}) = \sup\{\|\omega(\gamma(u)) - \omega(\gamma(v))\|;\ |u - v| \leqslant \delta(\mathbf{s})\}$. On conclut grâce à l'uniforme continuité de $\omega \circ \gamma$.

Preuve de la proposition 1.3.7. Notons $[a\,;b]$ et $[c\,;d]$ les intervalles de définition respectifs de γ et λ, et fixons une 1-forme ω continue sur Γ.

Supposons que γ et λ soient des chemins équivalents, et choisissons un changement de paramètre croissant $\theta : [a\,;b] \to [c\,;d]$ tel que $\gamma = \lambda \circ \theta$. Si $\mathbf{s} = (s_0, \dots, s_N)$, alors $\theta\mathbf{s} = (\theta(s_0), \dots, \theta(s_N))$ est une subdivision de $[c\,;d]$ car θ est une bijection strictement croissante de $[a\,;b]$ sur $[c\,;d]$, et avec les notations du lemme précédent, on a $\mathrm{L}_\omega(\gamma, \mathbf{s}) = \mathrm{L}_\omega(\lambda, \theta\mathbf{s})$. Enfin, comme θ est uniformément continue, le pas de la subdivision $\theta\mathbf{s}$ tend vers 0 avec celui $\mathbf{s}$. Le résultat découle donc immédiatement du lemme. Si γ et λ sont des chemins anti-équivalents, le raisonnement est identique en posant $\theta\mathbf{s} = (\theta(s_N), \dots, \theta(s_0))$ et en observant qu'on a cette fois $\mathrm{L}_\omega(\gamma, \mathbf{s}) = -\mathrm{L}_\omega(\lambda, \theta\mathbf{s})$.

Supposons enfin que γ et λ soient des lacets translatés l'un de l'autre. En notant G l'extension périodique de γ, on a $\lambda(t) \equiv \mathrm{G}(t + t_0)$ pour un certain $t_0 \in \mathbb{R}$, donc $\int_\lambda \omega = \int_{c+t_0}^{d+t_0} \omega(\mathrm{G}(t)) \cdot \mathrm{G}'(t)\, dt$. Comme G est périodique de période $b - a = d - c$, on en déduit

$$\int_\lambda \omega = \int_a^b \omega(\mathrm{G}(t)) \cdot \mathrm{G}'(t)\, dt = \int_\gamma \omega\ .$$

1.3.4. Mesure $(dz)_\gamma$ associée à un chemin γ

Si $\gamma : [a\,;b] \to \mathbb{C}$ est un chemin de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux d'image Γ, alors l'application $\mathcal{C}(\Gamma) \ni \varphi \mapsto \int_\gamma \varphi\, dz$ est une mesure de Radon sur Γ : en effet, on a $|\int_\gamma \varphi\, dz| \leqslant \mathrm{C}\|\varphi\|_\infty$ pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{C}(\Gamma)$, où $\mathrm{C} = \int_a^b |\gamma'(t)|\, dt$. On notera $(dz)_\gamma$ cette mesure de Radon. Ainsi,

$$\langle (dz)_\gamma, \varphi \rangle = \int_\gamma \varphi\, dz$$

pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{C}(\Gamma)$.

La mesure borélienne associée à $(dz)_\gamma$ sera également notée $(dz)_\gamma$. Dans ce cas précis, il est inutile d'invoquer le théorème de représentation de Riesz. En effet, $(dz)_\gamma$ est simplement l'image par γ de la mesure $\gamma' dm$

sur $[a\,;b]$, où m est la mesure de Lebesgue : $(dz)_\gamma(\mathrm{A}) = \int_{\gamma^{-1}(\mathrm{A})} \gamma'(t)\,dm(t)$ pour tout borélien $\mathrm{A} \subset \Gamma$.

1.4. Orientation

1.4.1. Orientation du plan

Le plan euclidien $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ sera toujours muni de son orientation usuelle, donnée par la base canonique $\mathbf{e} = (e_1, e_2) = (1, i)$. Ainsi, un couple de vecteurs $(u\,, v) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ est positivement orienté si et seulement si $\det_{\mathbf{e}}(u\,, v) > 0$.

Un isomorphisme $\mathrm{T} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ préserve l'orientation si et seulement si son déterminant est positif. Par analogie, on dira qu'un difféomorphisme entre deux ouverts de $\mathbb{R}^2$ **préserve l'orientation** si son déterminant jacobien est partout positif, et qu'il **renverse l'orientation** si son jacobien est partout négatif.

1.4.2. Orientation d'une courbe du plan

Si Γ est une courbe de Jordan, la proposition 1.2.6 montre qu'il y a exactement *deux* classes d'équivalence de paramétrages de Γ ; ces classes d'équivalences sont par définition les **orientations** de la courbe Γ. On appellera **courbe orientée** la donnée d'une courbe de Jordan Γ et d'une orientation de Γ. Il faudra parfois distinguer la courbe orientée de son « support géométrique » (la courbe de Jordan elle-même).

Lorsque Γ est une courbe simple, d'extrémités p et q, cette notion « abstraite » d'orientation a un sens géométrique très clair : deux paramétrages définissent la même orientation si et seulement si ils ont le même point initial. En effet, le changement de paramètre faisant passer de l'un à l'autre est croissant s'ils ont le même point initial, et décroissant sinon. L'expression « la courbe Γ orientée de p vers q » a donc un sens bien précis. Pour une courbe *fermée*, cette expression n'a bien sûr plus aucune signification, et il est a priori moins facile de donner un sens géométrique précis à l'orientation abstraite. On va le faire ici pour une courbe régulière du plan. Dans ce qui suit, V est un ouvert de $\mathbb{C}$.

Si $\gamma : [a\,;b] \to \mathbb{C}$ est un chemin régulier, on note $\mathrm{N}_\gamma(t)$ le **vecteur normal** à γ en un point $t \in \mathrm{U}_\gamma$, c'est-à-dire le vecteur unitaire directement orthogonal à $\gamma'(t)$. On rappelle que U_γ est l'ensemble des points de dérivabilité de γ dans $]a\,;b[$.

Définition 1.4.1. *On dit qu'un chemin régulier γ dans $\partial\mathrm{V}$ est* **positivement orienté relativement à** V *si pour tout $t \in \mathrm{U}_\gamma$, on peut trouver $\varepsilon > 0$ tel que le segment $]\gamma(t)\,;\gamma(t) + \varepsilon\mathrm{N}_\gamma(t)]$ soit contenu dans* V *tandis*

que le segment $]\gamma(t)\,;\gamma(t) - \varepsilon \mathrm{N}_\gamma(t)]$ *ne rencontre pas* $\overline{\mathrm{V}}$. *On dit que* γ *est* **négativement orienté** *relativement à* V *si le chemin inverse* γ^- *est positivement orienté relativement à* V.

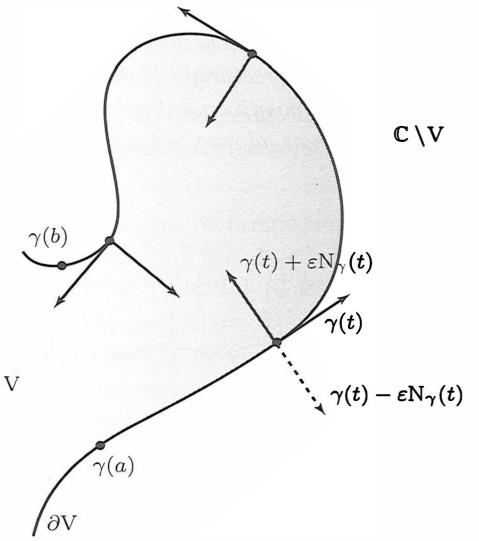


FIG. 6.

Exemples. 1) Si $0 < r < \mathrm{R}$ et si $\mathrm{V} = \{z \in \mathbb{C};\ r < |z| < \mathrm{R}\}$, alors les chemins définis par $\gamma(t) = \mathrm{R}e^{it}$ et $\lambda(t) = re^{-it}$ $(t \in [0\,;2\pi])$ sont positivement orientés relativement à V.

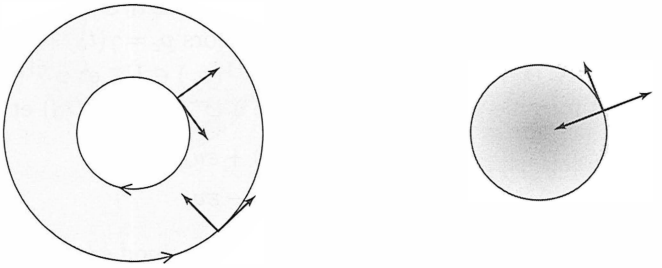


FIG. 7.

2) Si $\mathrm{V} = \{z \in \mathbb{C};\ |z| \neq 1\}$, alors le chemin γ défini par $\gamma(t) = e^{it}$ n'est ni positivement orienté, ni négativement orienté relativement à V.

Intuitivement, le fait que γ soit positivement orienté relativement à V signifie que lorsqu'on parcourt le chemin γ, on a constamment l'ouvert V « à sa gauche ». Cette interprétation est justifiée par le lemme suivant.

Lemme 1.4.2. *Soit φ un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme d'un rectangle ouvert $\mathrm{U} =]-\alpha_0;\alpha_0[\times\mathrm{I} \subset \mathbb{R}^2$ sur un ouvert $\mathrm{W} \subset \mathbb{R}^2$. Soit également $[a\,;b] \subset \mathrm{I}$ un intervalle compact, et soit γ le chemin défini sur $[a\,;b]$ par $\gamma(t) = \varphi(0\,,t)$. Enfin, notons U^- le demi-rectangle $\{(x\,,y) \in \mathrm{U};\ x < 0\}$. Si φ préserve l'orientation, alors γ est positivement orienté relativement à $\mathrm{V} = \varphi(\mathrm{U}^-)$. Si φ renverse l'orientation, alors γ est négativement orienté relativement à V.*

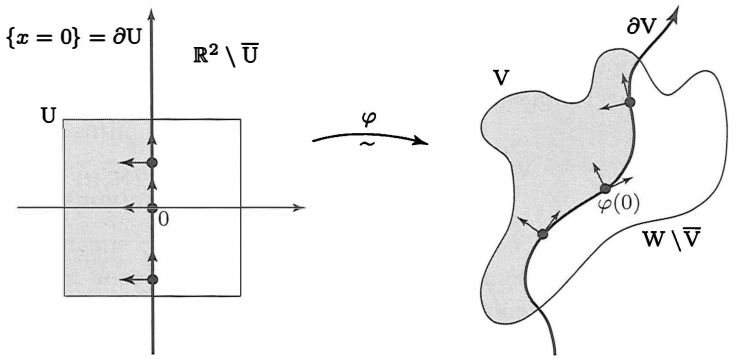


FIG. 8.

Preuve. Le chemin γ est bien un chemin dans $\partial\mathrm{V}$ car φ est un homéomorphisme. Il est de classe $\mathcal{C}^1$, et il est régulier car $\gamma'(t) = \mathrm{D}\varphi(0\,,t)\cdot e_2$ est non nul pour tout t.

Supposons que φ préserve l'orientation, et fixons $t_0 \in]a\,;b[$. Il s'agit de montrer que si $\varepsilon > 0$ est suffisamment petit, alors $p_\varepsilon = \gamma(t_0) + \varepsilon \mathrm{N}_\gamma(t_0) \in \mathrm{V}$ et $q_\varepsilon = \gamma(t_0) - \varepsilon \mathrm{N}_\gamma(t_0) \notin \overline{\mathrm{V}}$, autrement dit $\varphi^{-1}(p_\varepsilon) \in \mathrm{U}^-$ et $\varphi^{-1}(q_\varepsilon) \notin \overline{\mathrm{U}^-}$.

D'après la formule de Taylor appliquée à φ^{-1} entre $\gamma(t_0)$ et p_ε, on a

$$\begin{cases} \varphi^{-1}(p_\varepsilon) = (0\,,t_0) + \varepsilon u_\varepsilon \\ \varphi^{-1}(q_\varepsilon) = (0\,,t_0) - \varepsilon v_\varepsilon \end{cases}$$

où

$$u_\varepsilon = \int_0^1 \mathrm{D}\varphi^{-1}(\gamma(t_0) + s\varepsilon \mathrm{N}_\gamma(t_0)) \cdot \mathrm{N}_\gamma(t_0)\, ds$$

et

$$v_\varepsilon = \int_0^1 \mathrm{D}\varphi^{-1}(\gamma(t_0) - s\varepsilon \mathrm{N}_\gamma(t_0)) \cdot \mathrm{N}_\gamma(t_0)\, ds.$$

Quand ε tend vers 0, u_ε et v_ε tendent vers $u = \mathrm{D}\varphi^{-1}(\gamma(t_0)) \cdot \mathrm{N}_\gamma(t_0)$. Comme $\mathrm{D}\varphi^{-1}(\gamma(t_0)) \cdot \gamma'(t_0) = e_2$ et comme φ^{-1} préserve l'orientation, le couple (e_2, u) est positivement orienté car $(\gamma'(t_0), \mathrm{N}_\gamma(t_0))$ est positivement orienté. On a donc $(0, t_0) + u \in \mathrm{U}^-$ et $(0, t_0) - u \notin \overline{\mathrm{U}^-}$. Par conséquent $\varphi^{-1}(p_\varepsilon) \in \mathrm{U}^-$ et $\varphi^{-1}(q_\varepsilon) \notin \overline{\mathrm{U}^-}$ pour ε assez petit.

Si φ renverse l'orientation, on pose $\tilde{\varphi}(x, y) = \varphi(x, -y)$ et on applique le premier cas à $\tilde{\varphi}$. Cela termine la preuve du lemme.

Définition 1.4.3. *On dit qu'une courbe régulière* $\Gamma \subset \partial\mathrm{V}$ *est* **orientable relativement à** V *si* Γ *admet un paramétrage régulier positivement orienté relativement à* V.

Exemples. 1) Si V est un disque, un rectangle ou un triangle, alors ∂V est orientable relativement à V.

2) Si V est la couronne $\{r < |z| < \mathrm{R}\}$ $(0 < r < \mathrm{R})$, alors les deux cercles $\mathrm{C}_r = \{|z| = r\}$ et $\mathrm{C}_\mathrm{R} = \{|z| = \mathrm{R}\}$ sont orientables relativement à V. Les paramétrages de C_R et C_r définis par $\gamma_\mathrm{R}(t) = \mathrm{R}e^{it}$ et $\gamma_r(t) = re^{-it}$ sont positivement orientés relativement à V.

3) Si $\mathrm{V} = \{|z| \neq 1\}$, alors le cercle $\{|z| = 1\}$ n'est pas orientable relativement à V.

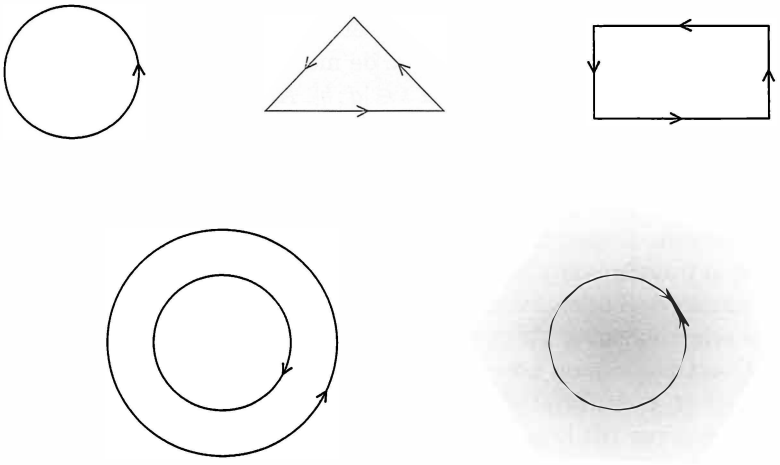


FIG. 9. Le bord de V est orientable relativement à V si V est un disque, un triangle, un rectangle ou une couronne. Il ne l'est pas si V est l'ouvert $\{|z| \neq 1\}$

Le lemme suivant montre que la définition de l'orientabilité relativement à V est compatible avec la notion « abstraite » d'orientation définie par les classes d'équivalence de paramétrages.

Lemme 1.4.4. *Si $\Gamma \subset \partial V$ est une courbe régulière orientable relativement à V, alors tous les paramétrages de Γ positivement orientés relativement à V sont équivalents. Ils définissent donc la même orientation abstraite.*

Preuve. On sait que deux paramétrages d'une même courbe sont équivalents ou anti-équivalents. Tout revient donc à montrer que si λ est un chemin régulier dans ∂V positivement orienté relativement à V et si θ est un changement de paramètre tel que $\gamma = \lambda \circ \theta$ soit lui aussi positivement orienté relativement à V, alors θ est croissant. Fixons $\lambda : [c\,;d] \to \partial V$ et $\theta : [a\,;b] \to [c\,;d]$.

Quitte à subdiviser les intervalles de définition, on peut supposer que γ et λ sont tous les deux de classe $\mathcal{C}^1$. En écrivant

$$\frac{\gamma(t+h)-\gamma(t)}{h} = \frac{\lambda(\theta(t+h))-\lambda(\theta(t))}{\theta(t+h)-\theta(t)} \times \frac{\theta(t+h)-\theta(t)}{h}$$

et en se rappelant que λ' ne s'annule jamais, on constate alors que θ est dérivable en tout point $t \in]a\,;b[$.

On peut donc écrire $\gamma'(t) \equiv \theta'(t)\lambda'(\theta(t))$, ce qui entraîne que $\gamma'(t)$ et $\lambda'(\theta(t))$ sont toujours colinéaires, et donc que $N_\gamma(t)$ et $N_\lambda(\theta(t))$ sont également colinéaires. Comme de plus γ et λ sont positivement orientés relativement à V, les vecteurs $N_\gamma(t)$ et $N_\lambda(\theta(t))$ sont nécessairement toujours de même sens ; il en va donc de même pour $\gamma'(t)$ et $\lambda'(\theta(t))$, et par conséquent $\theta'(t) > 0$ pour tout $t \in]a\,;b[$. Ainsi θ est croissant, ce qui termine la démonstration.

1.4.3. Notations

Si V est un disque, un triangle ou un rectangle, on désignera par ∂V à la fois la frontière de V et la courbe orientée constituée par la frontière de V munie de l'orientation définie par un paramétrage positivement orienté relativement à V.

Si $D = D(z_0, r_0)$, on notera également ∂D le lacet défini par $\partial D(t) = z_0 + r_0 e^{it}$ $(t \in [0\,;2\pi])$; et si $R = [a\,;b] \times [c\,;d]$ est un rectangle, on désigne aussi par ∂R le lacet défini sur $[0\,;4]$ obtenu de manière évidente en paramétrant affinement le bord de R dans le sens trigonométrique à partir du point $(a\,,c)$.

Ces ambiguïtés de notation ne prêteront jamais à confusion.

1.4.4. Intégrale sur une courbe orientée

La proposition 1.3.7 permet de définir l'intégrale d'une 1-forme ω sur une courbe orientée C : $\int_C \omega$ est l'intégrale $\int_\gamma \omega$, où γ est n'importe quel paramétrage donnant l'orientation de C.

Dans la pratique, la courbe C (plus exactement, son support géométrique) apparaît souvent comme la réunion d'un certain nombre de courbes de classe $\mathcal{C}^1$ qui se paramètrent de façon très simple, mais par des chemins dont les intervalles de définition naturels ne se raccordent pas nécessairement. Il est inutile de reparamétrer ces courbes pour écrire explicitement un paramétrage de C : compte tenu de la proposition 1.3.7 et de la propriété d'additivité, l'intégrale d'une 1-forme sur C se calcule en ajoutant les intégrales correspondantes.

Par exemple, si R est un rectangle $[a\,;b] \times [c\,;d]$, les côtés de ∂R se paramètrent de manière évidente par les intervalles $[a\,;b]$ et $[c\,;d]$. Si P et Q sont des fonctions continues sur ∂R, on a alors

$$\int_{\partial \mathrm{R}} \mathrm{P}\,dx+\mathrm{Q}\,dy = \int_a^b \mathrm{P}(x,c)\,dx + \int_c^d \mathrm{Q}(b,y)\,dy - \int_a^b \mathrm{P}(x,d)\,dx - \int_c^d \mathrm{Q}(a,y)\,dy.$$

Si on subdivise R en 4 rectangles $\mathrm{R}_1, \ldots, \mathrm{R}_4$ en traçant les médiatrices de ses côtés, alors l'intégrale d'une 1-forme sur ∂R est égale à la somme des intégrales sur les $\partial \mathrm{R}_i$: en effet, vu les conventions d'orientation, les intégrales sur les côtés des R_i intérieurs à R se détruisent mutuellement.

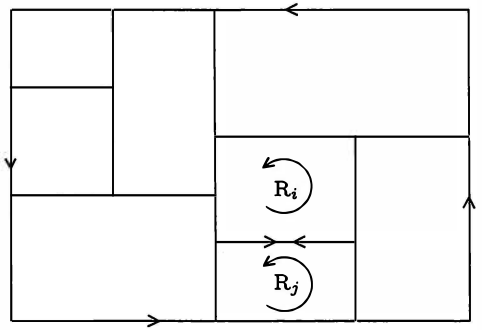


FIG. 10. Compensation des intégrales

Plus généralement, on obtient le lemme suivant, qui sera plusieurs fois utilisé.

Lemme 1.4.5. *Soit* R *un rectangle de* $\mathbb{C}$, *et soient* $\mathrm{R}_1, \ldots, \mathrm{R}_n$ *des sous-rectangles constituant un « pavage » de* R. *Si* ω *est une* 1*-forme continue sur* R, *alors*

$$\int_{\partial \mathrm{R}} \omega = \sum_{i=1}^{n} \int_{\partial \mathrm{R}_i} \omega\,.$$

1.5. Longueur

On aura souvent besoin dans ce livre de majorer le module d'une intégrale curviligne $\int_\gamma f\,dz$. Si le chemin $\gamma : [a\,;b] \to \mathbb{C}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et si la fonction f est continue sur $\mathrm{Im}(\gamma)$, cela peut se faire comme suit :

$$\left|\int_\gamma f\,dz\right| = \left|\int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt\right| \leqslant ||f||_\infty \times \int_a^b |\gamma'(t)|\,dt\ .$$

Le nombre $l(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)|\,dt$, qui apparaît naturellement dans cette majoration, s'appelle la **longueur** du chemin γ.

Dans cette section, on montre qu'on peut définir la longueur d'un chemin seulement supposé continu, et on établit quelques propriétés de base de la fonction longueur.

1.5.1. Longueur d'un chemin, longueur d'une courbe

Définition 1.5.1. *Soit* (X, d) *un espace métrique, et soit* $\gamma : \mathrm{J} \to \mathrm{X}$ *un chemin continu. Si* $\mathbf{s} = (s_0, \dots, s_\mathrm{N})$ *est une subdivision de* J, *on pose* $l(\gamma, \mathbf{s}) = \sum_0^{\mathrm{N}-1} d(\gamma(s_{i+1}), \gamma(s_i))$. *La* **longueur** *du chemin* γ *est alors le nombre* $l(\gamma) \in [0\,;+\infty]$ *défini par* $l(\gamma) = \sup\{l(\gamma, \mathbf{s});\ \mathbf{s} \in \mathcal{S}\}$, *où on a noté* $\mathcal{S}$ *l'ensemble de toutes les subdivisions de* J.

On a donné la définition dans le cadre des espaces métriques pour bien montrer que la notion de longueur est très générale. Mais dans tout ce qui suit, le seul espace métrique considéré sera $\mathbb{R}^n$ muni de la norme euclidienne, que l'on notera $|\ |$.

Le résultat suivant montre que la définition générale est compatible avec celle donnée plus haut.

Théorème 1.5.2. *Si* $\gamma : [a\,;b] \to \mathbb{R}^n$ *est un chemin de classe* $\mathcal{C}^1$ *par morceaux, alors*

$$l(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)|\,dt\ .$$

En particulier, tout chemin de classe $\mathcal{C}^1$ *par morceaux est de longueur finie.*

Preuve. Si $\gamma : [a\,;b] \to \mathbb{R}^n$ est un chemin de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, alors $\gamma(d) - \gamma(c) = \int_c^d \gamma'(t)\,dt$ pour tout intervalle $[c\,;d] \subset [a\,;b]$. Il suffit donc de montrer que si $f : [a\,;b] \to \mathbb{R}^n$ est une application continue par morceaux et si, pour $\mathbf{s} = (s_0, \dots, s_\mathrm{N}) \in \mathcal{S}$, on pose

$\mathrm{I}(f,\mathbf{s}) = \sum_0^{\mathrm{N}-1} \left| \int_{s_i}^{s_{i+1}} f(t)\,dt \right|$, alors

$$\sup\{\mathrm{I}(f,\mathbf{s});\ \mathbf{s}\in\mathcal{S}\} = \int_a^b |f(t)|\,dt\ .$$

Fixons donc $f : [a\,;b] \to \mathbb{R}^n$ continue par morceaux, et posons

$$\mathrm{I}(f) = \sup\{\mathrm{I}(f,\mathbf{s});\ \mathbf{s}\in\mathcal{S}\}\ .$$

On a visiblement $\mathrm{I}(f,\mathbf{s}) \leqslant \int_a^b |f(t)|\,dt$ pour toute subdivision $\mathbf{s}\in\mathcal{S}$, et donc $\mathrm{I}(f) \leqslant \int_a^b |f(t)|\,dt$. Inversement, pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver une fonction en escalier g telle que $\|g - f\|_\infty \leqslant \varepsilon$. Si $\mathbf{s} = (s_0, \dots, s_\mathrm{N})$ est une subdivision de $[a\,;b]$ telle que g soit constante sur chaque intervalle $]s_i\,;s_{i+1}[$, alors $\left| \int_{s_i}^{s_{i+1}} g(t)\,dt \right| = \int_{s_i}^{s_{i+1}} |g(t)|\,dt$ pour tout i, et donc $\mathrm{I}(g,\mathbf{s}) = \int_a^b |g(t)|\,dt \geqslant \int_a^b |f(t)|\,dt - \varepsilon(b-a)$. Comme de façon générale, on a $\mathrm{I}(u+v,\mathbf{s}) \leqslant \mathrm{I}(u,\mathbf{s}) + \mathrm{I}(v,\mathbf{s})$, on en déduit

$$\mathrm{I}(f,\mathbf{s}) \geqslant \mathrm{I}(g,\mathbf{s}) - \mathrm{I}(g-f,\mathbf{s}) \geqslant \int_a^b |f(t)|\,dt - 2\varepsilon(b-a)$$

pour tout $\varepsilon > 0$, donc $\mathrm{I}(f) \geqslant \int_a^b |f(t)|\,dt$.

Corollaire 1.5.3. *Si le chemin $\gamma : [a\,;b] \to \mathbb{R}^n$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]a\,;b[$ alors la formule précédente reste valable. En particulier, γ est de longueur finie si et seulement si $|\gamma'|$ est intégrable sur $]a\,;b[$.*

Preuve. Notons $\mathcal{I}$ la famille de tous les sous-intervalles compacts de $]a\,;b[$. D'après le théorème précédent, on a $\int_\mathrm{I} |\gamma'(t)|\,dt = l(\gamma_{|\mathrm{I}})$ pour tout intervalle $\mathrm{I}\in\mathcal{I}$. D'autre part, il découle du théorème de convergence monotone qu'on a $\int_{]a;b[} |\gamma'(t)|\,dt = \sup\{\int_\mathrm{I} |\gamma'(t)|\,dt;\ \mathrm{I}\in\mathcal{I}\}$. Il suffit donc de montrer qu'on a également

$$l(\gamma) = \sup\{l(\gamma_{|\mathrm{I}});\ \mathrm{I}\in\mathcal{I}\}\ .$$

On a bien sûr $l(\gamma_{|\mathrm{I}}) \leqslant l(\gamma)$ pour tout $\mathrm{I}\in\mathcal{I}$, et donc $l(\gamma) \geqslant \sup_\mathcal{I} l(\gamma_{|\mathrm{I}})$.

Inversement, soit $\mathbf{s} = (s_0, \dots, s_\mathrm{N})$ une subdivision quelconque de $[a;b]$, et soit $\varepsilon > 0$. Si $a', b' \in [a;b]$ vérifient $s_0 < a' < s_1 < \cdots < s_{\mathrm{N}-1} < b' < s_\mathrm{N}$ et $|\gamma(a') - \gamma(a)| + |\gamma(b') - \gamma(b)| < \varepsilon$, alors, en posant $\mathrm{I} = [a';b']$ et $\mathbf{s}' = (a', s_1, \dots, s_{\mathrm{N}-1}, b')$, on a $l(\gamma,\mathbf{s}) \leqslant l(\gamma_{|\mathrm{I}},\mathbf{s}') + \varepsilon$. Par conséquent, $l(\gamma,\mathbf{s}) \leqslant \sup_\mathcal{I} l(\gamma_{|\mathrm{I}}) + \varepsilon$. Comme $\mathbf{s}$ et ε sont arbitraires, on en déduit $l(\gamma) \leqslant \sup_\mathcal{I} l(\gamma_{|\mathrm{I}})$, ce qui termine la preuve.

Le lemme suivant permet de définir la longueur d'une courbe de Jordan.

Lemme 1.5.4. *Si γ et λ sont deux chemins ou deux lacets équivalents ou anti-équivalents, alors γ et λ ont la même longueur. En particulier, deux paramétrages d'une même courbe de Jordan ont la même longueur.*

Preuve. On traite seulement le cas des chemins. Soient $\gamma : [a\,;b] \to \mathbb{R}^n$ et $\lambda : [c\,;d] \to \mathbb{R}^n$ deux chemins équivalents ou anti-équivalents, et soit $\theta : [a\,;b] \to [c\,;d]$ un changement de paramètre tel que $\gamma = \lambda \circ \theta$. Si $\mathbf{s}=(s_0\,,\dots,s_N)$ est une subdivision de $[a\,;b]$, on pose $\theta\mathbf{s}=(\theta(s_0),\dots,\theta(s_N))$ ou $\theta\mathbf{s} = (\theta(s_N)\,,\dots,\theta(s_0))$ selon que θ est croissant ou décroissant. Quand $\mathbf{s}$ décrit l'ensemble des subdivisions de $[a\,;b]$, $\theta\mathbf{s}$ décrit l'ensemble des subdivisions de $[c\,;d]$, et on a $l(\gamma,\mathbf{s}) = l(\lambda\,,\theta\mathbf{s})$. Le résultat suit.

Définition 1.5.5. *La* **longueur** *d'une courbe de Jordan $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ est la longueur d'un paramétrage quelconque de Γ ; on la note $l(\Gamma)$.*

1.5.2. Mesure de longueur sur une courbe

Appelons *sous-arc* d'une courbe de Jordan Γ toute courbe de Jordan Γ_1 contenue dans Γ.

Si Γ est une courbe de Jordan de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux dans $\mathbb{R}^n$, alors il existe une unique mesure borélienne positive σ sur Γ telle que $\sigma(\Gamma_1) = l(\Gamma_1)$ pour tout sous-arc $\Gamma_1 \subset \Gamma$: l'unicité vient du fait que la famille des sous-arcs de Γ engendre la tribu borélienne de Γ, et pour l'existence, il suffit de poser

$$\sigma(\mathrm{A}) = \int_a^b \mathbf{1}_{\mathrm{A}}\,(\gamma(t))\,|\gamma'(t)|\,dt\ ,$$

où $\gamma : [a\,;b] \to \mathbb{R}^n$ est un paramétrage de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux de Γ arbitrairement choisi. La mesure σ est appelée la **mesure de longueur** sur la courbe de Jordan Γ.

Si Γ est une courbe dans le plan et si γ est un paramétrage de Γ (de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux), alors la mesure de longueur sur Γ est en fait la variation totale de la mesure $(dz)_\gamma$. Cela suggère de noter $|dz|_\Gamma$ ou simplement $|dz|$ la mesure de longueur sur Γ. On a donc

$$\int_\Gamma f\,|dz| = \int_a^b f(\gamma(t))\,|\gamma'(t)|\,dt$$

pour toute fonction borélienne bornée $f : \Gamma \to \mathbb{C}$.

Par exemple, si D est un disque $\mathrm{D}(z_0,r)$, dont le bord se paramètre par $z = z_0 + re^{i\theta}$, alors

$$\int_{\partial \mathrm{D}} f\,|dz| = r\int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta})\,d\theta\ ,$$

et si R est un rectangle $[a\,;b]\times[c\,;d]$, alors

$$\int_{\partial \mathrm{R}} f\,|dz| = \int_a^b f(x\,,c)\,dx + \int_c^d f(b\,,y)\,dy + \int_a^b f(x\,,d)\,dx + \int_c^d f(a\,,y)\,dy$$

pour toute fonction f borélienne bornée.

Notons enfin les majorations suivantes, essentielles dans la pratique :

$$\left|\int_\gamma f\,dz\right| \leqslant \int_\Gamma |f|\,|dz| \leqslant ||f||_\infty \times l(\Gamma)\ .$$

Exercices

1.1. Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel. Montrer que toute application $\mathbb{R}$-linéaire $\mathrm{T} : \mathrm{E} \to \mathbb{C}$ se décompose de manière unique sous la forme $\mathrm{T} = \mathrm{T}_1 + \mathrm{T}_2$, où T_1 est $\mathbb{C}$-linéaire et T_2 est $\mathbb{C}$-antilinéaire.

1.2. Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, et soit $\Phi : \mathrm{E} \to \mathbb{C}$ une application $\mathbb{R}$-linéaire. Quelle relation doit-il exister entre $\varphi = \mathrm{Re}(\Phi)$ et $\psi = \mathrm{Im}(\Phi)$ pour que Φ soit $\mathbb{C}$-linéaire ?

1.3. Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel. Montrer que si $\varphi : \mathrm{E} \to \mathbb{R}$ est une application $\mathbb{R}$-linéaire, alors il existe une unique application $\mathbb{C}$-linéaire $\Phi : \mathrm{E} \to \mathbb{C}$ telle que $\varphi = \mathrm{Re}(\Phi)$.

1.4. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On dit qu'une fonction f définie sur $\mathbb{R}^n\backslash\{0\}$ est **homogène de degré** α si on a $f(\lambda x) \equiv \lambda^\alpha f(x)$ pour tout $\lambda > 0$. Montrer qu'une fonction f de classe $\mathcal{C}^1$ est homogène de degré α si et seulement si $df(x)\cdot x = \alpha f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n\backslash\{0\}$.

1.5. À l'aide de l'exercice précédent, déterminer toutes les fonctions $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$ vérifiant $x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = (x^4+y^4)^{1/2}$.

1.6. Déterminer les différentielles des fonctions $z \mapsto \ln|z|$ et $z \mapsto |z|^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

1.7. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Pour $f \in \mathcal{C}^2(\Omega)$, exprimer Δf en coordonnées polaires.

1.8. Soient $f : \Omega \to \Omega'$ et $g : \Omega' \to \mathbb{K}$ différentiables, où Ω et Ω' sont deux ouverts de $\mathbb{C}$. Exprimer $\frac{\partial(g\circ f)}{\partial z}$ et $\frac{\partial(g\circ f)}{\partial \bar z}$ à l'aide de f, g, $\frac{\partial f}{\partial z}$, $\frac{\partial f}{\partial \bar z}$, $\frac{\partial g}{\partial z}$ et $\frac{\partial g}{\partial \bar z}$.

1.9. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$. Pour $f \in \mathcal{C}^1(\Omega)$, exprimer $\frac{\partial f}{\partial z}$ et $\frac{\partial f}{\partial \bar z}$ en coordonnées polaires.

1.10. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$. Montrer que si $f \in \mathcal{C}^2(\Omega)$, alors

$$\Delta\,|f|^2 = 4\left|\frac{\partial f}{\partial z}\right|^2 + 2\,\mathrm{Re}\,(\overline{f}\,\Delta f) + 4\left|\frac{\partial f}{\partial \bar z}\right|^2\ .$$

1.11. Si Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, on note ∇u le **gradient** d'une fonction $u : \Omega \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$: $\nabla u = (\partial_1 u, \dots, \partial_n u)$. Dans le cas d'une fonction définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$, quelle relation y a-t-il entre $\frac{\partial u}{\partial z}$ et la norme euclidienne de ∇u ?

1.12. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Montrer que si $u, v : \Omega \to \mathbb{R}$ sont de classe $\mathcal{C}^2$, alors

$$\Delta(uv) = u\,\Delta v + 2\,\langle \nabla u\,,\, \nabla v\rangle + v\,\Delta u\,,$$

où $\langle\ ,\ \rangle$ est le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^n$.

1.13. Un **champ de vecteurs** sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ est une application $p : \Omega \to \mathbb{R}^n$. Si $p = (p_1, \dots, p_n)$ est de classe $\mathcal{C}^1$, la **divergence** de p est la fonction $\operatorname{div}(p) = \sum_1^n \frac{\partial p_i}{\partial x_i}$. Montrer que si $u : \Omega \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^2$, alors $\Delta u = \operatorname{div}(\nabla u)$.

1.14. Soit $\varphi :]0\,;+\infty[\to \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^2$, et soit $u : \mathbb{R}^n\backslash\{0\} \to \mathbb{C}$ la fonction définie par $u(x) = \varphi(|x|)$, où $|\ |$ est la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$. Exprimer $\Delta u(x)$ en fonction de $|x|$ et des dérivées de la fonction φ.

1.15. On dit qu'une fonction $u : \mathbb{R}^n\backslash\{0\} \to \mathbb{C}$ est **radiale** si $u(x)$ ne dépend que de $|x|$. Déterminer toutes les fonctions radiales de classe $\mathcal{C}^2$ vérifiant $\Delta u = 0$.

1.16. Soit T une isométrie de $\mathbb{R}^n$. Montrer que pour toute fonction $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n)$, on a

$$\Delta(u \circ \mathrm{T}) = (\Delta u) \circ \mathrm{T}\,.$$

1.17. On définit la **radialisée** d'une fonction $u \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^n)$ par la formule

$$u^*(x) = \int_{\mathbf{S}^{n-1}} u(|x|\,\zeta)\; d\sigma(\zeta)\,,$$

où $|\ |$ est la norme euclidienne et σ est la mesure de surface sur la sphère unité $\mathbf{S}^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$.

1) Soit O_n le groupe des isométries de $\mathbb{R}^n$. Montrer que si $u \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^n)$, alors

$$u^*(x) = \sigma(\mathbf{S}^{n-1}) \int_{\mathrm{O}_n} u(\mathrm{T}x)\; d\mathrm{T}\,,$$

où on a noté $d\mathrm{T}$ la mesure de Haar normalisée sur le groupe compact O_n. On pourra commencer par vérifier qu'on a $u^*(x) = \int_{\mathrm{O}_n} u^*(\mathrm{T}x)\, d\mathrm{T}$, puis utiliser le théorème de Fubini et le fait que O_n opère transitivement sur les sphères de $\mathbb{R}^n$.

2) Montrer que si u est de classe $\mathcal{C}^2$, alors u^* est également de classe $\mathcal{C}^2$ et

$$(\Delta u)^* = \Delta u^*\,.$$

1.18. (Principe du maximum.)

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, et soit $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ continue sur $\overline{\Omega}$, de classe $\mathcal{C}^2$ dans Ω.

0) Montrer que u est bornée et atteint sa borne supérieure.

1) On suppose qu'on a $\Delta u > 0$ dans Ω. Montrer que $\sup_{\overline{\Omega}} u$ ne peut pas être atteint en un point intérieur à Ω.

2) On suppose seulement qu'on a $\Delta u \geqslant 0$ dans Ω. En considérant $u_\varepsilon(x) = u(x) + \varepsilon|x|^2$ pour $\varepsilon > 0$, montrer qu'on a

$$\sup_{\overline{\Omega}} u = \sup_{\partial\Omega} u .$$

3) Montrer que si $\Delta u \equiv 0$ dans Ω et si $u(x) \equiv 0$ sur $\partial\Omega$, alors $u = 0$.

1.19. Soit Γ le graphe de l'application $t \mapsto |t|$ sur $[-1\,;1]$. La courbe Γ admet-elle un paramétrage de classe $\mathcal{C}^1$? Admet-elle un paramétrage *régulier* de classe $\mathcal{C}^1$?

1.20. (Reparamétrisation $\mathcal{C}^1$.)

1) Soit I un intervalle compact de $\mathbb{R}$ non réduit à un point. Construire une bijection strictement croissante θ de $[0\,;1]$ sur I qui soit de classe $\mathcal{C}^1$ et vérifie $\theta'(0) = 0 = \theta'(1)$.

2) Montrer que tout chemin de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux est équivalent à un chemin de classe $\mathcal{C}^1$.

1.21. Soit $\omega_0 = \dfrac{x\,dy - y\,dx}{x^2 + y^2}$. Calculer $\int_{\partial \mathrm{R}} \omega_0$, où R est le carré $[-1;1] \times [-1;1]$.

1.22. Soit $\omega = 2xy^3\,dx + 3x^2y^2\,dy$. Calculer $\int_\gamma \omega$, où γ est l'arc de la parabole d'équation $y = x^2$ joignant $(0,0)$ à $(2,4)$.

1.23. Soit γ un chemin de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux dans $\mathbb{C}$. Soit également f une fonction continue sur $\mathrm{Im}(\gamma)$, et soit f^* la fonction définie par

$$f^*(z) = \overline{f(\bar{z})} .$$

Montrer qu'on a

$$\overline{\int_\gamma f\,dz} = \int_{\overline{\gamma}} f^*\,dz ,$$

et que si $\gamma = \partial\mathbb{D}$, où $\mathbb{D}$ est le disque unité, alors

$$\overline{\int_\gamma f\,dz} = -\int_\gamma \overline{f}\,\frac{dz}{z^2} .$$

1.24. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et soit $\varphi : \Omega \to \mathbb{C}^*$ de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer que si γ est un chemin de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux dans Ω, alors

$$\int_\gamma \frac{d\varphi}{\varphi} = \int_{\varphi\circ\gamma} \frac{dz}{z} .$$

Généraliser ce résultat en remplaçant dz/z par une 1-forme ω.

1.25. On dit que deux chemins de classe $\mathcal{C}^1$ sont $\mathcal{C}^1$-équivalents s'ils se déduisent l'un de l'autre par un changement de paramètre croissant de classe $\mathcal{C}^1$

ainsi que son inverse, et que deux lacets sont $\mathcal{C}^1$-équivalents s'ils admettent des translatés $\mathcal{C}^1$-équivalents. Montrer que si V est un ouvert de $\mathbb{C}$, alors l'orientation relativement à V est préservée par $\mathcal{C}^1$-équivalence de chemins ou de lacets : si γ est un chemin (ou un lacet) dans ∂V positivement orienté relativement à V, alors tout chemin (ou lacet) $\mathcal{C}^1$-équivalent à γ est positivement orienté relativement à V.

1.26. Si V est un ouvert de $\mathbb{C}$, l'orientation relativement à V est-elle préservée par équivalence de chemins ou de lacets ?

1.27. Montrer que tout chemin lipschitzien est de longueur finie.

1.28. Donner un exemple de chemin de longueur infinie.

1.29. Calculer la longueur de l'arc de la parabole d'équation $y = x^2$ compris entre $(0,0)$ et $M = (1,1)$.

1.30. (Paramétrage par longueur d'arc.)

Soit $\gamma : [a\,;b] \to \mathbb{R}^n$ un chemin régulier de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer que l'application s définie par $s(t) = \int_a^t |\gamma'(u)|\,du$ est un changement de paramètre croissant, et en déduire qu'il existe un unique chemin $\lambda : [0\,;l(\gamma)] \to \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^1$ vérifiant les propriétés suivantes : λ est $\mathcal{C}^1$-équivalent à γ (voir l'exercice 1.25) et $|\lambda'(s)| = 1$ pour tout s.

1.31. Soit $\Gamma \subset \mathbb{C}$ une courbe de Jordan fermée régulière de classe $\mathcal{C}^2$. Pour $\varepsilon > 0$, on pose

$$\Gamma_\varepsilon = \{z \in \mathbb{C};\ d(z,\Gamma) \leqslant \varepsilon\}\ .$$

1) Soit $\gamma : [a\,;b] \to \mathbb{C}$ un paramétrage de Γ régulier de classe $\mathcal{C}^2$. Pour $\varepsilon > 0$, on note R_ε le rectangle $[a\,;b] \times [-\varepsilon;\varepsilon]$ et on définit $\Phi_\varepsilon : R_\varepsilon \to \mathbb{C}$ par

$$\Phi_\varepsilon(t,s) = \gamma(t) + s\mathrm{N}(t)\ ,$$

où $\mathrm{N}(t)$ est le vecteur normal à γ au point t.

a) Montrer que l'image de Φ_ε est égale à Γ_ε, et que $\Phi(\partial R_\varepsilon)$ est de mesure nulle dans $\mathbb{C}$ (voir au besoin la remarque 2.3.3).

b) Montrer que si ε est assez petit, alors la restriction de Φ_ε à $\mathring{R}_\varepsilon$ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme sur son image.

c) Déduire de *a*) et *b*) que pour ε assez petit, on peut écrire

$$m(\Gamma_\varepsilon) = \int_a^b \left(\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \left(|\gamma'(t)| + s\varphi(t)\right) ds \right) dt\ ,$$

où φ est une fonction continue sur $[a\,;b]$.

2) Montrer que la longueur de Γ est donnée par la formule

$$l(\Gamma) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{m(\Gamma_\varepsilon)}{2\varepsilon}\ .$$

1.32. Soit (X, d) un espace métrique et soit $\gamma : J \to X$ un chemin de longueur finie. Pour toute subdivision $\mathbf{s} = (s_0, \dots, s_N)$ de l'intervalle J, on pose

$$l(\mathbf{s}) = \sum_0^{N-1} d(\gamma(s_i), \gamma(s_{i+1}))\,.$$

1) Soit $\mathbf{t} = (t_0, \dots, t_N)$ une subdivision de J. Montrer que si $\mathbf{s}$ est une subdivision de J de pas δ inférieur à celui de $\mathbf{t}$, alors $l(\mathbf{s}) \geqslant l(\mathbf{t}) - 2N\omega(\delta)$, où $\omega(\delta) = \sup\{d(\gamma(u), \gamma(v));\ |u - v| \leqslant \delta\}$.

2) Montrer que $l(\mathbf{s})$ tend vers $l(\gamma)$ quand le pas de la subdivision $\mathbf{s}$ tend vers 0.

1.33. Soit (X, d) un espace métrique, et soit $\gamma : [a\,;b] \to X$ un chemin de longueur finie l. Pour tout intervalle compact $I \subset [a\,;b]$, on note $\mathbf{V}(I)$ la longueur du chemin $\gamma_{|I}$, et pour $t \in [a\,;b]$, on pose $V(t) = \mathbf{V}([a\,;t])$. Montrer que la fonction V est croissante et *continue*.

1.34. Soit (X, d) un espace métrique, et soit $\gamma : [a\,;b] \to X$ un chemin de longueur finie l. Pour $t \in [a\,;b]$, on note $V(t)$ la longueur du chemin $\gamma_{|[a;t]}$. En utilisant l'exercice précédent, montrer qu'il existe une unique application $\gamma_0 : [0\,;l] \to X$ vérifiant $\gamma = \gamma_0 \circ V$, et que γ_0 est un chemin 1-lipschitzien.

1.35. Soit (X, d) un espace métrique.

1) Soit $\gamma : [a\,;b] \to X$ un chemin de longueur finie, et soit $l > l(\gamma)$. Pour $t \in [a\,;b]$, on note $V(t)$ la longueur du chemin $\gamma_{|[a;t]}$.

a) On définit $\theta : [a\,;b] \to [0\,;1]$ par $\theta(t) = \frac{1}{l}V(t) + c(t - a)$, où $c > 0$ est choisi de sorte que $\theta(b) = 1$. En utilisant 1.33, montrer que θ est un changement de paramètre croissant.

b) Montrer que γ est équivalent à un chemin l-lipschitzien $\lambda : [0\,;1] \to X$.

2) Conclure qu'un chemin γ dans X est de longueur finie si et seulement si il est équivalent à un chemin lipschitzien.

1.36. (Existence de plus courts chemins.)

Dans tout l'exercice, (X, d) est un espace métrique.

1) Soit γ un chemin de longueur finie dans X, et soit $l > l(\gamma)$. En utilisant l'un des deux exercices précédents, montrer qu'il existe un chemin $\tilde{\gamma} : [0\,;1] \to X$ vérifiant les propriétés suivantes :

(a) $\tilde{\gamma}$ a même point initial et même point terminal que γ.
(b) $l(\tilde{\gamma}) \leqslant l(\gamma)$.
(c) $\tilde{\gamma}$ est l-lipschitzien.

2) On suppose X compact. Montrer que si p et q sont deux points de X et s'il existe un chemin joignant p et q dans X, alors il en existe un de longueur minimale.

3) Le résultat de 2) est-il valable si X n'est pas supposé compact ?

Chapitre 2

Formes différentielles dans le plan

Dans tout le chapitre, on identifiera constamment $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{C}$.

2.1. Formes exactes et formes fermées

Dans ce qui suit, Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

2.1.1. Formule de Stokes pour un rectangle

Soit $\omega = \mathrm{P}\,dx + \mathrm{Q}\,dy$ une 1-forme différentielle continue sur Ω. Si $\mathrm{R} = [a\,;b] \times [c\,;d]$ est un rectangle entièrement contenu dans Ω, alors l'intégrale de ω sur le bord de R est donnée par la formule

$$\int_{\partial \mathrm{R}} \omega = \int_a^b \mathrm{P}(x\,,c)\,dx + \int_c^d \mathrm{Q}(b\,,y)\,dy - \int_a^b \mathrm{P}(x\,,d)\,dx - \int_c^d \mathrm{Q}(a\,,y)\,dy\,.$$

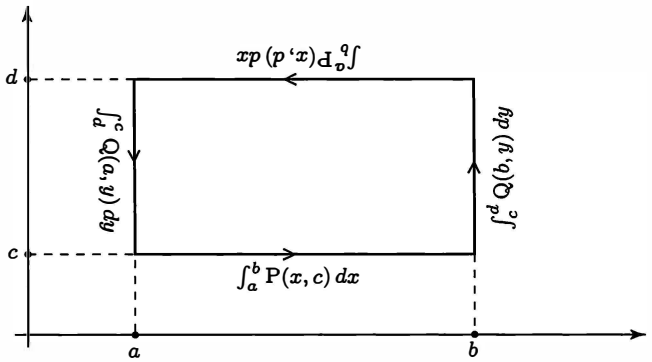


FIG. 11.

Si de plus ω est de classe $\mathcal{C}^1$, alors on peut écrire

$$\begin{cases} \mathrm{P}(x\,,c) - \mathrm{P}(x\,,d) = -\displaystyle\int_c^d \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial y}(x\,,y)\,dy \\ \mathrm{Q}(b\,,y) - \mathrm{Q}(a\,,y) = \displaystyle\int_a^b \frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial x}(x\,,y)\,dx \end{cases}$$

En regroupant les deux intégrales contenant P et les deux intégrales contenant Q, on en déduit

$$\int_{\partial \mathrm{R}} \mathrm{P}\,dx + \mathrm{Q}\,dy = \int_{\mathrm{R}} \left(\frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial x} - \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial y} \right) dm\,,$$

où m est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^2$. Cette identité est un cas particulier de la **formule de Stokes**, dont on établira une version générale à la fin de ce chapitre. La formule de Stokes est l'analogue bi-dimensionnel de l'identité $f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t)\,dt$. Elle sera systématiquement utilisée par la suite, et constitue le résultat principal du chapitre.

2.1.2. Définitions et exemples

Définition 2.1.1. *Soit ω une 1-forme continue sur Ω. On dit qu'une fonction F est une* **primitive** *de ω si $\mathrm{F} \in \mathcal{C}^1(\Omega)$ et $d\mathrm{F} = \omega$; et on dit que ω est* **exacte sur** *Ω si elle y admet une primitive.*

Contrairement à ce qui se passe pour les fonctions d'une variable réelle, une 1-forme différentielle continue n'admet pas nécessairement de primitives. En effet, si $\omega = \mathrm{P}\,dx + \mathrm{Q}\,dy$ est de classe $\mathcal{C}^1$, alors toute primitive F de ω est en fait de classe $\mathcal{C}^2$. D'après le théorème de Schwarz, on doit avoir $\frac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial y \partial x}$, ce qui s'écrit encore

$$(*) \qquad \frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial x} = \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial y}\,.$$

On voit donc apparaître une obstruction immédiate à l'existence de primitives. Par exemple, $\omega = x\,dy$ n'est pas exacte sur $\mathbb{R}^2$.

Grâce à la formule de Stokes, la condition $(*)$ peut se reformuler sans faire appel aux dérivées partielles $\frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial x}$, $\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial y}$: elle est équivalente à

$$(**) \qquad \int_{\partial \mathrm{R}} \omega = 0 \qquad \text{pour tout rectangle } \mathrm{R} \subset \Omega\,.$$

En effet, d'après la formule de Stokes pour un rectangle, $(**)$ est vérifiée si et seulement si $\int_{\mathrm{R}} (\frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial x} - \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial y})\,dm = 0$ pour tout rectangle $\mathrm{R} \subset \Omega$, et cette dernière propriété est elle-même équivalente à $(*)$ car $\frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial x} - \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial y}$ est une fonction continue.

Définition 2.1.2. *On dira qu'une 1-forme continue $\omega \in \mathcal{A}^1_0(\Omega)$ est* **fermée** *si elle vérifie $\int_{\partial \mathrm{R}} \omega = 0$ pour tout rectangle $\mathrm{R} \subset \Omega$.*

Cette définition n'est pas tout à fait conforme à l'usage : en général les formes fermées sont définies soit comme étant les formes de classe $\mathcal{C}^1$ vérifiant la propriété $(*)$, soit comme étant les formes *localement exactes*, c'est-à-dire admettant des primitives au voisinage de chaque point. La première définition a l'inconvénient de ne considérer a priori que des

formes de classe $\mathcal{C}^1$. Quant à la deuxième, on verra plus loin (grâce au lemme de Poincaré 2.1.4) qu'elle est équivalente à celle adoptée ici.

Le lemme suivant précise le lien entre « fermeture » et « exactitude ».

Lemme 2.1.3. *Si ω est une forme exacte sur Ω, alors $\int_\gamma \omega = 0$ pour tout lacet dans Ω ; en particulier, toute forme exacte est fermée. En revanche, les 1-formes $\omega = \frac{dz}{z}$ et $\omega_0 = \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2}$ sont fermées, mais elles ne sont pas exactes sur $\mathbb{C}^*$.*

Preuve. La première assertion vient du corollaire 1.3.6. Un calcul immédiat montre que ω et ω_0 vérifient la propriété $(*)$, donc ω et ω_0 sont fermées. Enfin, on a vu au chapitre 1 (exemple 1.3.3) que si on note $\mathbb{D}$ le disque unité $\{|z| < 1\}$, alors $\int_{\partial\mathbb{D}} \frac{dz}{z} = 2i\pi \neq 0$ et $\int_{\partial\mathbb{D}} \omega_0 = 2\pi \neq 0$. Par conséquent, ω et ω_0 ne sont pas exactes sur $\mathbb{C}^*$.

2.1.3. Lemme de Poincaré

On vient de voir qu'une forme exacte est toujours fermée, mais que la réciproque est fausse pour $\Omega = \mathbb{C}^*$. Dans le cas d'un ouvert plus « simple », le fait d'être fermée devient en revanche suffisant pour assurer l'existence d'une primitive.

Proposition 2.1.4. (Lemme de Poincaré.)
Si $\Omega = \mathbb{R}^2$, ou si Ω est un disque ou un rectangle ouvert, alors toute 1-forme fermée sur Ω est exacte sur Ω.

Preuve. Supposons qu'on ait $\Omega = \mathbb{R}^2$, ou que Ω soit un disque ou un rectangle, et notons $(x_0\,,y_0)$ son centre (en prenant par exemple $(x_0\,,y_0) = (0\,,0)$ si $\Omega = \mathbb{R}^2$). Fixons également une 1-forme fermée $\omega = \mathrm{P}\,dx + \mathrm{Q}\,dy \in \mathcal{A}^1_0(\Omega)$.

La forme particulière de Ω entraîne que si $(x\,,y) \in \Omega$, alors les segments $[(x_0\,,y_0)\,;(x\,,y_0)]$ et $[(x\,,y_0)\,;(x\,,y)]$ sont contenus dans Ω. On peut donc poser

$$\mathrm{F}(x\,,y) = \int_{x_0}^{x} \mathrm{P}(s\,,y_0)\,ds + \int_{y_0}^{y} \mathrm{Q}(x\,,t)\,dt$$

pour tout point $(x\,,y) \in \Omega$. On va montrer que la fonction F ainsi définie est une primitive de ω.

Soit $(x\,,y) \in \Omega$. Si $h \in \mathbb{R}$ et si $(x+h\,,y) \in \Omega$, on a

$$\mathrm{F}(x+h\,,y) - \mathrm{F}(x\,,y) = \int_{x}^{x+h} \mathrm{P}(s\,,y_0)\,ds + \int_{y_0}^{y} \mathrm{Q}(x+h\,,t)\,dt + \int_{y}^{y_0} \mathrm{Q}(x\,,t)\,dt\,.$$

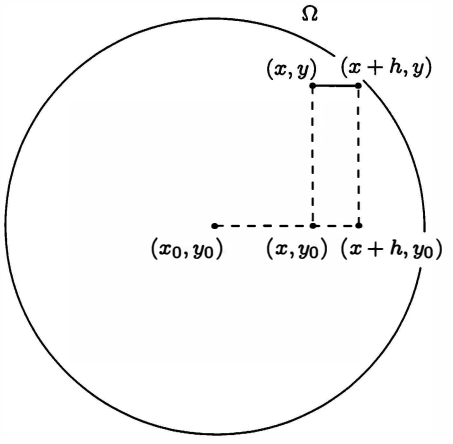


FIG. 12.

Comme le rectangle de sommets $(x\,,y)$, $(x\,,y_0)$, $(x+h\,,y_0)$, $(x+h\,,y)$ est contenu dans Ω, l'intégrale de ω sur le bord de ce rectangle est nulle, et on peut donc écrire

$$\mathrm{F}(x+h\,,y)-\mathrm{F}(x\,,y)=\int_x^{x+h}\mathrm{P}(s\,,y)\,ds\ .$$

Comme P est continue, on en déduit, en divisant par h et en faisant tendre h vers 0, que $\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x}$ existe en tout point, et qu'on a $\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x}=\mathrm{P}$. De la même façon, on montre que $\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial y}$ existe en tout point et $\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial y}=\mathrm{Q}$. La fonction F est donc une primitive de ω.

Corollaire 2.1.5. *Si Ω est un ouvert de $\mathbb{C}$ quelconque, alors une 1-forme continue sur Ω est fermée si et seulement si elle est* **localement exacte,** *ce qui signifie que tout point de Ω admet un voisinage sur lequel elle est exacte.*

Preuve. D'après le lemme de Poincaré, toute forme fermée est localement exacte.

Inversement, soit $\omega\in\mathcal{A}_0^1(\Omega)$ une 1-forme localement exacte, et soit R un rectangle fermé contenu dans Ω. Par hypothèse, tout point $z\in\mathrm{R}$ possède un voisinage ouvert V_z (contenu dans Ω) sur lequel ω est exacte. Par compacité de R, il existe un nombre $\varepsilon>0$ tel que tout ensemble $\mathrm{A}\subset\mathrm{R}$ de diamètre inférieur à ε soit contenu dans l'un des V_z (on utilise ici le *lemme de Lebesgue* : voir la section 5.2.1). On peut donc trouver un « pavage » de R en rectangles fermés $\mathrm{R}_1,\dots,\mathrm{R}_n$ chacun contenu dans un certain V_z. On a alors $\int_{\partial\mathrm{R}}\omega=\sum_{i=1}^n\int_{\partial\mathrm{R}_i}\omega$ car les intégrales sur les côtés des R_i intérieurs à R se compensent, et donc $\int_{\partial\mathrm{R}}\omega=0$ puisque $\int_{\partial\mathrm{R}_i}\omega=0$ pour tout i. La 1-forme ω est donc fermée.

Remarque 2.1.6. *Pour une* 1*-forme de classe* $\mathcal{C}^1$*, l'implication* (localement exacte) $\Rightarrow$ (fermée) *est immédiate : si* $\omega = \mathrm{P}\,dx + \mathrm{Q}\,dy$ *est localement exacte et de classe* $\mathcal{C}^1$*, alors* $\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial y} = \frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial x}$ *au voisinage de chaque point, donc partout, donc* ω *est fermée.*

Au vu du lemme de Poincaré et des exemples de formes fermées mais non exactes sur $\mathbb{C}^*$, on est conduit à la question suivante : quels sont les ouverts sur lesquels toute forme fermée est nécessairement exacte ? Cette question est en fait l'un des fils directeurs de ce livre. On y répondra complètement au chapitre 10.

2.1.4. Caractérisation des formes exactes

On sait que si ω est une 1-forme exacte sur Ω, alors $\int_\gamma \omega = 0$ pour tout lacet γ dans Ω. Cette propriété est en fait caractéristique des formes exactes, comme le montre le théorème suivant.

Théorème 2.1.7. *Soit* Ω *un ouvert de* $\mathbb{C}$*. Pour une forme différentielle continue* $\omega \in \mathcal{A}^1_0(\Omega)$*, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(1) ω *est exacte sur* Ω *;*

(2) $\int_\gamma \omega = \int_\lambda \omega$ *pour tous chemins* γ, λ *dans* Ω *de classe* $\mathcal{C}^1$ *par morceaux ayant même point initial et même point terminal ;*

(3) $\int_\gamma \omega = 0$ *pour tout lacet* γ *dans* Ω *de classe* $\mathcal{C}^1$ *par morceaux.*

Preuve. L'implication (1)$\Rightarrow$(2) vient du théorème 1.3.5, et la propriété (3) découle de (2) en prenant pour λ un chemin constant.

Pour démontrer l'implication (3)$\Rightarrow$(2), fixons deux chemins de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux γ, λ dans Ω ayant même point initial et même point terminal. On peut supposer que γ est paramétré par $[0\,;1]$, et λ par $[1\,;2]$. Le chemin $\gamma \cdot \lambda^- : [0\,;2] \to \Omega$ défini par $\gamma \cdot \lambda^-(t) = \gamma(t)$ si $t \in [0\,;1]$ et $\gamma \cdot \lambda^-(t) = \lambda^-(t) = \lambda(3-t)$ si $t \in [1\,;2]$ est alors un lacet (de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux) dans Ω, et on a $\int_{\gamma\cdot\lambda^-} \omega = \int_\gamma \omega - \int_\lambda \omega$. Si (3) est vérifiée, on a donc $\int_\gamma \omega = \int_\lambda \omega$.

Supposons maintenant la condition (2) vérifiée, et montrons que ω est exacte. En considérant séparément chaque composante connexe de Ω, on se ramène au cas où Ω est connexe, donc en fait connexe par arcs. Fixons un point $p \in \Omega$.

Si $z \in \Omega$, alors, d'après (2), la valeur de l'intégrale $\int_\gamma \omega$ est la même pour tous les chemins reliant p à z dans Ω. Définissons alors $\mathrm{F} : \Omega \to \mathbb{C}$ par la formule

$$\mathrm{F}(z) = \int_{\gamma_z} \omega$$

où γ_z est n'importe quel chemin de p vers z dans Ω. On va montrer que F est une primitive de ω sur U.

Écrivons $\omega = \mathrm{P}\,dx + \mathrm{Q}\,dy$, et fixons $z = (x\,,y) \in \Omega$. Fixons également $r > 0$ vérifiant $\mathrm{D}(z,r) \subset \Omega$.

Si $h \in \mathbb{R}$ et si $|h| < r$, alors le segment $[z; z+h]$ est contenu dans Ω ; on peut donc choisir, pour calculer $\mathrm{F}(z+h)$, le chemin constitué par γ_z suivi du paramétrage de $[z; z+h]$ défini par $\lambda(t) = z + th,\ t \in [0\,;1]$. On en déduit $\mathrm{F}(z+h) - \mathrm{F}(z) = \int_0^h \mathrm{P}(x+t, y)\,dt$, et donc

$$\frac{\mathrm{F}(x+h\,,y) - \mathrm{F}(x\,,y)}{h} = \frac{1}{h}\int_0^h \mathrm{P}(x+t, y)\,dt$$

pour tout $h \in\,]-r; r[$. Comme la fonction P est continue, cela entraîne que $\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x}(z)$ existe et vaut $\mathrm{P}(z)$. De même, $\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial y}(z)$ existe et vaut $\mathrm{Q}(z)$. Puisque z est un point quelconque de Ω, la fonction F est bien une primitive de ω.

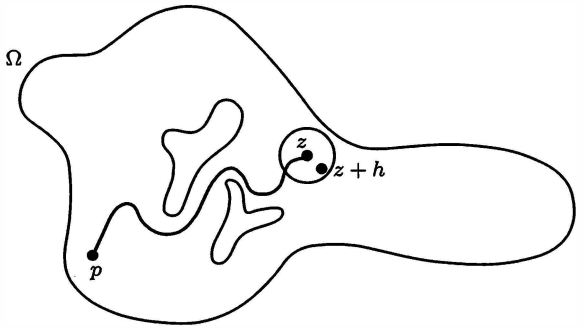


FIG. 13.

Remarque 2.1.8. *La démonstration précédente fournit une expression explicite d'une primitive de ω : il suffit de poser $\mathrm{F}(z) = \int_{\gamma_z} \omega$, où γ_z est n'importe quel chemin joignant p à z dans Ω.*

2.1.5. Cohomologie de de Rham

Notons $\mathrm{B}^1(\Omega)$ l'espace vectoriel des 1-formes fermées de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω, et $\mathrm{Z}^1(\Omega)$ le sous-espace vectoriel de $\mathrm{B}^1(\Omega)$ constitué par les 1-formes exactes (de classe $\mathcal{C}^1$). L'espace vectoriel quotient

$$\mathrm{H}^1(\Omega) = \mathrm{B}^1(\Omega)/\mathrm{Z}^1(\Omega)$$

qui est, en particulier, un groupe additif, est appelé le **premier groupe de cohomologie de de Rham** de l'ouvert Ω. Par définition, $\mathrm{H}^1(\Omega)$ est réduit à $\{0\}$ si et seulement si toute forme fermée de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω est exacte sur Ω. De façon générale et en termes très vagues, $\mathrm{H}^1(\Omega)$ permet de « mesurer » la différence entre les formes fermées et les formes exactes.

Il est facile de vérifier que deux ouverts difféomorphes ont des groupes de cohomologie isomorphes ; plus précisément, si $\varphi : \Omega \to \Omega'$ est un $\mathcal{C}^2$-difféomorphisme, alors l'opération de prise d'image réciproque φ^* est un isomorphisme de $\mathcal{A}^1_1(\Omega')$ sur $\mathcal{A}^1_1(\Omega)$ qui envoie $\mathrm{B}^1(\Omega')$ sur $\mathrm{B}^1(\Omega)$ et $\mathrm{Z}^1(\Omega')$ sur $\mathrm{Z}^1(\Omega)$, donc φ^* induit un isomorphisme de $\mathrm{H}^1(\Omega')$ sur $\mathrm{H}^1(\Omega)$. En fait, on peut même démontrer que $\mathrm{H}^1(\Omega)$ est un *invariant topologique* : deux ouverts homéomorphes ont des groupes de cohomologie isomorphes. Ainsi, les groupes de cohomologie peuvent permettre de démontrer que deux ouverts ne sont *pas* homéomorphes.

Par exemple, $\mathbb{C}$ et $\mathbb{C}^*$ ne sont pas homéomorphes car $\mathrm{H}^1(\mathbb{C}) = \{0\}$ mais $\mathrm{H}^1(\mathbb{C}^*)$ n'est pas réduit à $\{0\}$. En fait, il est facile de voir que $\mathrm{H}^1(\mathbb{C}^*)$ est isomorphe à $\mathbb{K}$ (voir l'exercice 2.9). Plus généralement, si $\Omega = \mathbb{C}\backslash\mathrm{F}$, où F est un ensemble fini de cardinal n, alors l'espace vectoriel $\mathrm{H}^1(\Omega)$ est isomorphe à $\mathbb{K}^n$ (voir le chapitre 7). Par conséquent $\mathbb{C}\backslash\mathrm{F}_1$ et $\mathbb{C}\backslash\mathrm{F}_2$ ne peuvent être homéomorphes que si les ensembles finis F_1 et F_2 ont le même nombre d'éléments.

2.2. Formes différentielles de degré 2

2.2.1. Applications bilinéaires alternées

Dans cette section, E est un espace vectoriel réel de dimension 2. On fixe une base $\mathbf{e} = (e_1, e_2)$ de E, et on note (e_1^*, e_2^*) la base duale dans E^*. Comme toujours, la lettre $\mathbb{K}$ désigne indifféremment $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Une application $\mathrm{B} : \mathrm{E}\times\mathrm{E} \to \mathbb{K}$ est dite **bilinéaire** si elle est $\mathbb{R}$-linéaire en chacune des variables séparément. Une application bilinéaire B est dite **alternée** si on a $\mathrm{B}(h,k) = -\mathrm{B}(k,h)$ pour tout couple $(h,k) \in \mathrm{E}\times\mathrm{E}$. On note respectivement $\mathcal{L}^2(\mathrm{E},\mathbb{K})$ le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des applications bilinéaires de $\mathrm{E}\times\mathrm{E}$ dans $\mathbb{K}$, et $\mathbf{A}^2(\mathrm{E},\mathbb{K})$ l'ensemble des applications bilinéaires alternées.

Proposition 2.2.1. *$\mathcal{L}^2(\mathrm{E},\mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 4, et $\mathbf{A}^2(\mathrm{E},\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de dimension 1, engendré par l'application « déterminant dans la base $\mathbf{e}$ ».*

Preuve. Une application bilinéaire $\mathrm{B} \in \mathcal{L}^2(\mathrm{E},\mathbb{K})$ est entièrement déterminée par sa matrice dans la base (e_1, e_2), c'est-à-dire par les 4 scalaires indépendants $\mathrm{B}(e_i, e_j)$ $(i,j = 1,2)$. Cela prouve que $\mathcal{L}^2(\mathrm{E},\mathbb{K})$ est de dimension 4. D'autre part, si $\mathrm{B} \in \mathcal{L}^2(\mathrm{E},\mathbb{K})$ est alternée et si $h = ae_1 + be_2$, $k = ce_1 + de_2 \in \mathrm{E}$, alors en développant $\mathrm{B}(h,k)$, on trouve $\mathrm{B}(h,k) = (ad-bc)\mathrm{B}(e_1,e_2) = \mathrm{B}(e_1,e_2)\det_{\mathbf{e}}(h,k)$. Cela prouve la deuxième assertion.

Définition 2.2.2. *Si u et v sont deux applications linéaires de* E *dans* $\mathbb{K}$, *le* **produit extérieur** *du couple* (u, v) *est l'application bilinéaire alternée* $u \wedge v$ *définie par* $u \wedge v(h, k) = u(h)v(k) - u(k)v(h)$.

Par exemple, $e_1^* \wedge e_2^*$ est l'application « déterminant dans la base $\mathbf{e}$ ».

Proposition 2.2.3. *Le produit extérieur* $\wedge : \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathbb{K}) \times \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathbb{K}) \to \mathbf{A}^2(\mathrm{E}, \mathbb{K})$ *est bilinéaire et alterné : si* $u, v \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathbb{K})$, *alors* $u \wedge v = -v \wedge u$. *On a donc* $u \wedge u = 0$ *pour toute application linéaire* $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathbb{K})$.

La preuve est immédiate.

Dans toute la suite, on omettra le plus souvent possible la référence au corps $\mathbb{K}$. Ainsi, on écrira par exemple $\mathbf{A}^2(\mathrm{E})$ au lieu de $\mathbf{A}^2(\mathrm{E}, \mathbb{K})$.

2.2.2. Formes différentielles

Définition 2.2.4. *Si* Ω *est un ouvert de* $\mathbb{C}$, *on appelle* **forme différentielle de degré** 2 *(ou* **2-forme différentielle***) sur* Ω *toute application* $\omega : \Omega \to \mathbf{A}^2(\mathbb{C})$.

Remarque. Comme pour les formes de degré 1, il sera commode de pouvoir parler de 2-formes différentielles sur une partie quelconque de $\mathbb{C}$. La définition est identique.

On notera $\mathcal{A}^2(\Omega)$ l'ensemble des formes différentielles de degré 2 sur Ω, et $\mathcal{A}_k^2(\Omega)$ l'ensemble des 2-formes différentielles de classe $\mathcal{C}^k$ $(k \geqslant 0)$. Avec les opérations naturelles d'addition et de multiplication par un scalaire ou une fonction, $\mathcal{A}^2(\Omega)$ est un module sur $\mathbb{K}^\Omega$ et chaque $\mathcal{A}_k^2(\Omega)$ est un $\mathcal{C}^k(\Omega)$-module. De plus, on peut « transporter » le produit extérieur défini sur $\mathcal{L}(\mathbb{C}, \mathbb{K}) \times \mathcal{L}(\mathbb{C}, \mathbb{K})$: si α et β sont des 1-formes différentielles sur Ω, la formule

$$(\alpha \wedge \beta)(z) = \alpha(z) \wedge \beta(z)$$

définit une 2-forme $\alpha \wedge \beta$, qui est de classe $\mathcal{C}^k$ si α et β le sont.

La 2-forme $dx \wedge dy$ est constante et égale en tout point au déterminant dans la base canonique. D'après la proposition 2.2.1, on en déduit que toute 2-forme différentielle s'écrit de manière unique

$$\omega = f\, dx \wedge dy\ ,$$

où f est une fonction scalaire, qui est de classe $\mathcal{C}^k$ si ω est de classe $\mathcal{C}^k$. Autrement dit, $dx \wedge dy$ est une base de $\mathcal{A}^2(\Omega)$ et de chacun des modules $\mathcal{A}_k^2(\Omega)$.

Si α et β sont des formes de degré 1, alors $\alpha \wedge \beta = -\beta \wedge \alpha$ d'après la proposition 2.2.3. En particulier, on a $dx \wedge dy = -dy \wedge dx$, et $dx \wedge dx =$

$0 = dy \wedge dy$. En développant le produit, on en déduit que si $\mathrm{P}, \mathrm{Q}, \mathrm{R}, \mathrm{S}$ sont des fonctions sur Ω, alors

$$(\mathrm{P}dx + \mathrm{Q}dy) \wedge (\mathrm{R}dx + \mathrm{S}dy) = (\mathrm{PS} - \mathrm{QR})\, dx \wedge dy.$$

Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, cela entraîne

$$d\bar{z} \wedge dz = 2i\, dx \wedge dy,$$

ce qui prouve que $d\bar{z} \wedge dz$ est également une base de $\mathcal{A}^2(\Omega, \mathbb{C})$ et de chaque $\mathcal{A}^2_k(\Omega, \mathbb{C})$. On montre comme plus haut que si $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}, \mathrm{D}$ sont des fonctions sur Ω, alors

$$(\mathrm{A}dz + \mathrm{B}d\bar{z}) \wedge (\mathrm{C}dz + \mathrm{D}d\bar{z}) = (\mathrm{AD} - \mathrm{BC})\, dz \wedge d\bar{z}.$$

2.2.3. Image réciproque d'une 2-forme par une application

Comme pour les formes de degré 1, on peut définir l'image réciproque d'une 2-forme par une application différentiable. La signification est la même : si une 2-forme ω s'exprime à l'origine en fonction d'une variable $z' \in \mathbb{C}$ et si z' est elle-même fonction d'une variable z, ce qu'on écrit $z' = \varphi(z)$, alors $\varphi^*\omega$ est la 2-forme obtenue en « exprimant ω en fonction de z ».

Définition 2.2.5. *Soit $\varphi : \Omega \to \Omega'$ une application différentiable entre deux ouverts de $\mathbb{C}$. Si $\omega \in \mathcal{A}^2(\Omega')$,* **l'image réciproque de ω par φ** *est la 2-forme $\varphi^*\omega \in \mathcal{A}^2(\Omega)$ définie par*

$$\varphi^*\omega(z) \cdot (h, k) = \omega\left(\varphi(z)\right) \cdot \left(\mathrm{D}\varphi(z) \cdot h, \mathrm{D}\varphi(z) \cdot k\right) \quad .$$

Notons (e_1, e_2) la base canonique de $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$. Si $z \in \Omega$, on a par définition

$$\varphi^*(dx \wedge dy)_z(e_1, e_2) = \det{}_{\mathbf{e}}\Big(\mathrm{D}\varphi_z(e_1), \mathrm{D}\varphi_z(e_2)\Big) \ .$$

Autrement dit, pour tout $z \in \Omega$, $\varphi^*(dx \wedge dy)_z(e_1, e_2)$ est le déterminant jacobien de φ au point z. Ainsi,

$$\varphi^*(dx \wedge dy) = \mathrm{J}_\varphi\, dx \wedge dy \ .$$

Pour une 2-forme $\omega = f\, dx \wedge dy$, on a donc

$$\varphi^*\omega = (f \circ \varphi)\, \mathrm{J}_\varphi\, dx \wedge dy \ .$$

Voici les principales propriétés de l'opération de prise d'image réciproque.

Proposition 2.2.6.

(1) *L'application $\varphi^* : \mathcal{A}^2(\Omega') \to \mathcal{A}^2(\Omega)$ est linéaire.*

(2) *Si* $\omega \in \mathcal{A}^2(\Omega')$ *et si* f *est une fonction sur* Ω'*, alors*

$$\varphi^*(f\omega) = (f \circ \varphi)\, \varphi^*\omega \, .$$

(3) *Si* $\varphi : \Omega \to \Omega'$ *et* $\psi : \Omega' \to \Omega''$ *sont différentiables, alors*

$$(\psi \circ \varphi)^* = \varphi^* \psi^* \, .$$

(4) *Si* α, β *sont des* 1*-formes différentielles sur* Ω'*, alors*

$$\varphi^*(\alpha \wedge \beta) = \varphi^*\alpha \wedge \varphi^*\beta \, .$$

Preuve. Les trois premières propriétés découlent immédiatement de la définition.

Pour démontrer (4), on observe d'une part qu'on a $\varphi^*(dx \wedge dy) = \mathrm{J}_\varphi \, dx \wedge dy$, et d'autre part, en posant $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$, qu'on a également $\mathrm{J}_\varphi \, dx \wedge dy = d\varphi_1 \wedge d\varphi_2 = \varphi^*(dx) \wedge \varphi^*(dy)$. Ainsi :

$$\varphi^*(dx \wedge dy) = \mathrm{J}_\varphi \, dx \wedge dy = \varphi^*(dx) \wedge \varphi^*(dy) \, ,$$

d'où on tire (4) par linéarité.

2.2.4. Dérivée extérieure d'une 1-forme

Définition 2.2.7. *Soit* Ω *un ouvert de* $\mathbb{C}$*. Si* $\omega = \mathrm{P}dx + \mathrm{Q}dy$ *est une* 1*-forme de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* Ω*, la* **dérivée extérieure** *de* ω *est la* 2*-forme différentielle* $d\omega \in \mathcal{A}_0^2(\Omega)$ *définie par*

$$d\omega = \left(\frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial x} - \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial y} \right) dx \wedge dy \, .$$

Remarque 2.2.8. *En développant les deux termes de* $d\mathrm{P} \wedge dx + d\mathrm{Q} \wedge dy$*, on constate qu'on a*

$$d\omega = d\mathrm{P} \wedge dx + d\mathrm{Q} \wedge dy \, .$$

Le résultat suivant a été démontré au début du chapitre à l'aide de la formule de Stokes pour un rectangle. Vu son importance, il est bon de l'énoncer une nouvelle fois.

Lemme 2.2.9. *Une* 1*-forme* ω *de classe* $\mathcal{C}^1$ *est fermée si et seulement si* $d\omega = 0$*.*

La définition de la dérivée extérieure d'une 2-forme semble *a priori* dépendre du système de coordonnées choisi. Le théorème suivant montre qu'il n'en est rien, et donne une caractérisation « intrinsèque » de l'opérateur d.

Théorème 2.2.10. *L'application d est l'unique application linéaire de $\mathcal{A}_1^1(\Omega)$ dans $\mathcal{A}_0^2(\Omega)$ vérifiant les propriétés suivantes.*

(1) *Si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et si $\omega \in \mathcal{A}_1^1(\Omega)$, alors*

$$d(f\omega) = df \wedge \omega + f d\omega \, .$$

(2) *Si $f \in \mathcal{C}^2(\Omega)$, alors $d(df) = 0$.*

Preuve. La linéarité est évidente ; la propriété (1) résulte de la formule $d(\mathrm{P}dx + \mathrm{Q}dy) = d\mathrm{P} \wedge dx + d\mathrm{Q} \wedge dy$ et de l'identité $d(fg) = fdg + gdf$; la propriété (2) découle immédiatement de la définition de d et du théorème de Schwarz.

Si $\mathrm{L} : \mathcal{A}_1^1(\Omega) \to \mathcal{A}_0^2(\Omega)$ vérifie la propriété (2), alors $\mathrm{L}(dx) = 0 = \mathrm{L}(dy)$. Si de plus L est linéaire et vérifie (1), alors, pour $\mathrm{P}, \mathrm{Q} \in \mathcal{C}^1(\Omega)$ on a $\mathrm{L}(\mathrm{P}dx + \mathrm{Q}dy) = \mathrm{L}(\mathrm{P}dx) + \mathrm{L}(\mathrm{Q}dy) = d\mathrm{P} \wedge dx + \mathrm{P}\mathrm{L}(dx) + d\mathrm{Q} \wedge dy + \mathrm{Q}\mathrm{L}(dy) = d\mathrm{P} \wedge dx + d\mathrm{Q} \wedge dy$, et donc $\mathrm{L} = d$.

Corollaire 2.2.11. *Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et si $\omega \in \mathcal{A}_1^1(\Omega)$ s'écrit $\mathrm{A}dz + \mathrm{B}d\bar{z}$, alors*

$$d\omega = \left(\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial \bar{z}} - \frac{\partial \mathrm{B}}{\partial z} \right) d\bar{z} \wedge dz \, .$$

En particulier, si $f \in \mathcal{C}^1(\Omega)$, alors $d(fdz) = \dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}} \, d\bar{z} \wedge dz$.

La proposition suivante montre que la dérivation extérieure est compatible avec la prise d'image réciproque. Cela entraîne en particulier (en prenant pour φ un difféomorphisme, c'est-à-dire un « changement de système de coordonnées ») que la formule définissant $d\omega$ est indépendante du système de coordonnée choisi. On retrouve ainsi le caractère « intrinsèque » de la dérivation extérieure.

Proposition 2.2.12. *Soient Ω et Ω' deux ouverts de $\mathbb{C}$. Si $\varphi : \Omega \to \Omega'$ est une application de classe $\mathcal{C}^2$, alors, pour toute 1-forme ω de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω', la 1-forme $\varphi^*\omega$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et on a $d(\varphi^*\omega) = \varphi^*(d\omega)$.*

Preuve. Il est clair que si φ est de classe $\mathcal{C}^2$ et si ω est de classe $\mathcal{C}^1$, alors $\varphi^*\omega$ est de classe $\mathcal{C}^1$. Par ailleurs, si ω est de la forme fdg, avec $f, g \in \mathcal{C}^1(\Omega')$, alors $\varphi^*\omega = (f \circ \varphi)\varphi^*(dg) = (f \circ \varphi)\, d(g \circ \varphi)$, et donc $d(\varphi^*\omega) = d(f \circ \varphi) \wedge d(g \circ \varphi) = \varphi^*(df) \wedge \varphi^*(dg) = \varphi^*(d\omega)$. La proposition s'en déduit par linéarité.

Mentionnons enfin le résultat suivant, dont la preuve est immédiate.

Proposition 2.2.13. *Si $\omega \in \mathcal{A}_1^1(\Omega)$ est nulle sur un ouvert $\mathrm{V} \subset \Omega$, alors $d\omega \equiv 0$ sur V.*

2.2.5. Intégration

Si A est une partie mesurable de $\mathbb{R}^2$ et si $\omega = f dx \wedge dy$ est une 2-forme définie sur A, on dit que ω est **intégrable** sur A si la fonction f est Lebesgue-intégrable sur A, et on définit l'intégrale de ω sur A par la formule $\int_A \omega = \int_A f dm$, où m est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^2$. Par exemple, toute 2-forme continue sur un compact $K \subset \mathbb{R}^2$ est intégrable sur K.

Comme en dimension 1, le théorème de changement de variables s'énonce agréablement dans le langage des formes différentielles. En effet, si $\omega = f dx \wedge dy$ est une 2-forme sur Ω', alors

$$\varphi^*\omega = (f \circ \varphi)\, J_\varphi \, dx \wedge dy .$$

Par conséquent :

Théorème 2.2.14. *Soit $\varphi : \Omega \to \Omega'$ un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme entre deux ouverts de $\mathbb{R}^2$. Si A est une partie mesurable de Ω, alors $\varphi(A)$ est mesurable, et une 2-forme différentielle $\omega \in \mathcal{A}^2(\Omega')$ est intégrable sur $\varphi(A)$ si et seulement si $\varphi^*\omega$ est intégrable sur A. On a alors $\int_{\varphi(A)} \omega = \int_A \varphi^*\omega$ si φ préserve l'orientation, et $\int_{\varphi(A)} \omega = -\int_A \varphi^*\omega$ si φ renverse l'orientation.*

2.3. Formule de Stokes

La formule de Stokes pour un rectangle, démontrée au début du chapitre, s'écrit

$$\int_{\partial R} \omega = \int_R d\omega .$$

Elle est valable pour tout rectangle R et pour toute 1-forme ω de classe $\mathcal{C}^1$ au voisinage de R. On va maintenant montrer que cette formule est encore valable pour des domaines plus généraux que les rectangles.

2.3.1. Compacts à bords réguliers

Définition 2.3.1. *On dit qu'un compact $K \subset \mathbb{C}$ est un* **compact à bord régulier** *si K est l'adhérence de son intérieur et si $\partial K = \partial \mathring{K}$ est réunion d'un nombre fini de courbes régulières fermées de classe $\mathcal{C}^2$ par morceaux, deux à deux disjointes et orientables relativement à K.*

Exemples. 1) Les disques, les rectangles et les triangles sont des compacts à bords réguliers.

2) Si $D, D_1, \ldots, D_k$ sont des disques ouverts tels que $\overline{D}_i \subset D$ pour tout i et $\overline{D}_i \cap \overline{D}_j = \emptyset$ si $i \neq j$, alors le « disque à trous » $K = \overline{D} \setminus \bigcup_{i=1}^k D_i$ est un compact à bord régulier. En particulier, si $0 < r < R$, la couronne $\{r \leqslant |z| \leqslant R\}$ est un compact à bord régulier.

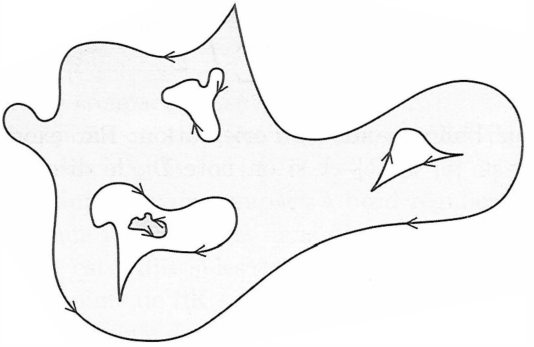


FIG. 14. Compact à bord régulier

3) Si on note K_1 et K_2 les quadrants inférieur droit et supérieur gauche dans le disque unité $\{|z| \leqslant 1\}$, alors $K = K_1 \cup K_2$ n'est *pas* un compact à bord régulier bien qu'il ne soit pas très loin de l'être.

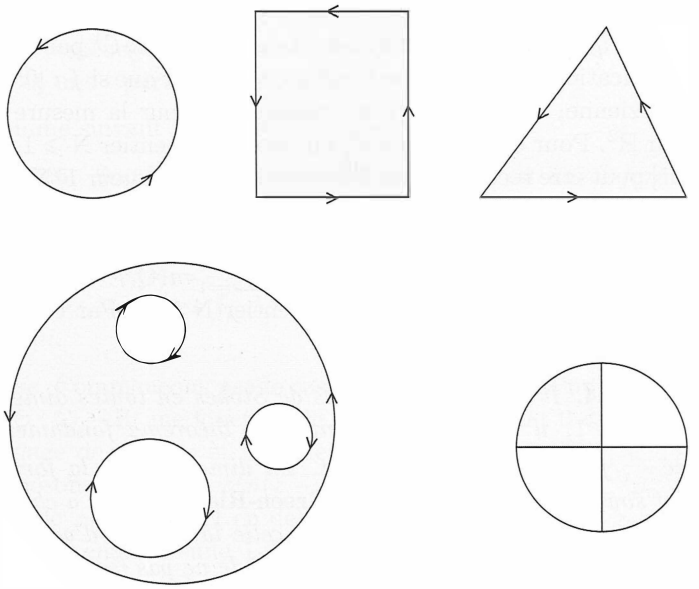


FIG. 15.

Si K est un compact à bord régulier, alors ∂K n'a par définition qu'un nombre fini de composantes connexes, qui sont des courbes fermées régulières $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_m$ orientables relativement à $\mathring{K}$. D'après 1.4.4, on oriente sans ambiguïté ces courbes en choisissant arbitrairement des paramétrages positivement orientés relativement à $\mathring{K}$. Si ω est une 1-forme définie et continue sur ∂K, on peut alors définir l'**intégrale de ω sur ∂K** par

la formule

$$\int_{\partial K} \omega = \sum_{i=1}^{m} \int_{\Gamma_i} \omega .$$

Insistons sur l'importance de l'orientation. Par exemple, si K est la couronne $\{r \leqslant |z| \leqslant R\}$ et si on note D_α le disque $D(0,\alpha)$, alors $\int_{\partial K} = \int_{\partial D_R} - \int_{\partial D_r}$.

2.3.2. Formule de Stokes

Théorème 2.3.2. (Formule de Stokes.)
Soit $K \subset \mathbb{C}$ *un compact à bord régulier. Si* ω *est une* 1*-forme différentielle de classe* C^1 *au voisinage de* K*, alors*

$$\int_{\partial K} \omega = \int_K d\omega .$$

Remarque 2.3.3. ∂K *est négligeable pour la mesure de Lebesgue de* $\mathbb{C}$*. Par conséquent, la formule de Stokes peut également s'écrire* $\int_{\partial K} \omega = \int_{\mathring{K}} \omega$.

Preuve de la remarque. Comme tout chemin de classe C^1 par morceaux est une application lipschitzienne, il suffit de montrer que si $f : [0;1] \to \mathbb{R}^2$ est lipschitzienne, alors $f([0;1])$ est négligeable pour la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^2$. Pour cela, on observe que pour tout entier $N \geqslant 1$, l'intervalle $[0;1]$ peut être recouvert par N intervalles de longueur $1/N$. Comme f est lipschitzienne, on en déduit que $A = f([0;1])$ peut être recouvert par N carrés $Q_1, \ldots, Q_N$ de côté inférieur à kN, où k est une constante indépendante de N. On a donc $m(A) \leqslant \sum_{i=1}^{N} m(Q_i) = N \times k^2/N^2$, autrement dit $m(A) \leqslant k^2/N$ pour tout entier $N \geqslant 1$. Par conséquent, $m(A) = 0$.

Remarque 2.3.4. *Il existe des formules de Stokes en toutes dimensions. En dimension* 1*, il s'agit simplement du « théorème fondamental de l'Analyse » :* $f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t)\,dt$*. En dimension* 2*, la formule de Stokes est souvent appelée* **formule de Green-Riemann**. *On a choisi l'appellation « formule de Stokes » car c'est celle là qui est d'usage en dimensions supérieures, et qu'il semble naturel de ne pas isoler le cas de la dimension* 2*. Bien entendu, la formule n'est due ni à Stokes, ni à Green, ni à Riemann.*

La démonstration de la formule de Stokes est assez longue et peut être omise en première lecture. On en donne en 2.3.3 une démonstration courte dans le cas d'un « disque à trous », version qui suffit pour développer une bonne partie de la théorie des fonctions holomorphes. La

formule de Stokes générale sera toutefois nécessaire pour démontrer le théorème des résidus.

Dans la suite, le compact K est fixé.

On dira qu'un point $z_0 \in \partial K$ est un **point régulier** de ∂K s'il existe un chemin de Jordan régulier $\gamma : [-\varepsilon;\varepsilon] \to \partial K$ de classe $\mathcal{C}^2$, tel que $\gamma(0) = z_0$. Par définition d'un compact à bord régulier, il n'y a qu'un nombre fini de points non réguliers dans ∂K ; et si K est un compact à bord de classe $\mathcal{C}^2$ (c'est-à-dire si les courbes composant ∂K sont de classe $\mathcal{C}^2$), alors tous les points de ∂K sont réguliers.

La preuve de la formule de Stokes se fera en trois étapes.

(1) Montrer qu'on peut se débarrasser des points non réguliers de ∂K. Si K est un compact à bord de classe $\mathcal{C}^2$, cette étape est inutile puisque tous les points de ∂K sont réguliers.

(2) Montrer qu'au voisinage d'un point régulier de ∂K, K « ressemble » au demi-plan

$$H = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x \leqslant 0\},$$

étant entendu qu'au voisinage d'un point de $\mathring{K}$, K « ressemble » à $\mathbb{R}^2$.

(3) Se ramener aux cas modèles $\mathbb{R}^2$ et H en utilisant des « cartes locales » et une « partition de l'unité ».

Le lemme suivant formalise la première étape.

Lemme 2.3.5. *Soit $S \subset \mathbb{C}$ un ensemble fini. Si ω est une 1-forme différentielle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{C}$, il existe une suite (ω_n) de 1-formes de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{C}$ et à supports compacts, vérifiant les propriétés suivantes :*

(i) *les supports des ω_n sont disjoints de S ;*

(ii) *$\int_K d\omega_n$ tend vers $\int_K d\omega$ et $\int_{\partial K} \omega_n$ tend vers $\int_{\partial K} \omega$ quand n tend vers l'infini.*

Preuve. Commençons par le cas où S ne contient qu'un seul point z_0.

Soit $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ vérifiant $0 \leqslant \varphi \leqslant 1$, $\varphi \equiv 0$ au voisinage de 0, et $\varphi \equiv 1$ en dehors du disque $\mathbb{D} = \{|z| < 1\}$. Pour $n \geqslant 1$, posons $\varphi_n(z) = \varphi(n(z - z_0))$. On a $0 \leqslant \varphi_n \leqslant 1$, $\varphi_n \equiv 0$ au voisinage de z_0, et $\varphi_n \equiv 1$ en dehors du disque $D_n = \{|z - z_0| < 1/n\}$.

Soit maintenant ω une 1-forme différentielle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{C}$, et posons $\omega_n = \varphi_n \omega$ $(n \geqslant 1)$. Il est clair que les ω_n sont de classe $\mathcal{C}^1$, et que leurs supports sont compacts et ne contiennent pas le point z_0.

Si $\gamma : [a\,;b] \to \mathbb{C}$ est un chemin de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, alors

$$\int_\gamma \omega_n - \int_\gamma \omega = \int_{U_\gamma} [\varphi_n(\gamma(t)) - 1]\ \ \omega(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt\,.$$

Posons $f_n(t) = [\varphi_n(\gamma(t)) - 1]\, \omega(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)$. Par définition des φ_n, la suite (f_n) converge simplement vers 0 sur l'ensemble $\{t \in U_\gamma;\ \gamma(t) \neq z_0\}$,

donc partout sauf en au plus un point si γ est un lacet de Jordan. De plus, on a $|f_n(t)| \leqslant 2\,|\omega(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)|$ pour tout $n \geqslant 1$. D'après le théorème de convergence dominée, on en déduit qu'on a $\lim_{n\to\infty} \int_\gamma \omega_n = \int_\gamma \omega$ pour tout lacet de Jordan γ de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux. Par suite, $\int_{\partial K} \omega_n$ tend vers $\int_{\partial K} \omega$ quand tend vers l'infini.

D'autre part, on a $d\omega_n = \varphi_n d\omega + d\varphi_n \wedge \omega$, et donc

$$\int_K d\omega_n = \int_K \varphi_n d\omega + \int_K d\varphi_n \wedge \omega\ .$$

Comme précédemment, on montre que la première intégrale tend vers $\int_K d\omega$ quand n tend vers l'infini. Montrons que la deuxième tend vers 0.

Comme $\varphi_n \equiv 1$ en dehors du disque $D_n = \{|z - z_0| < 1/n\}$, on a $d\varphi_n \equiv 0$ sur $\mathbb{C}\backslash\overline{D}_n$, et donc $\int_K d\varphi_n \wedge \omega = \int_{K\cap\overline{D}_n} d\varphi_n \wedge \omega = \int_{K\cap\overline{D}_n} g_n dm$, où on a posé $d\varphi_n \wedge \omega = g_n dx \wedge dy$. L'application $(S, T) \mapsto S \wedge T$ étant bilinéaire continue, on peut trouver une constante C telle que, pour tout $z \in \mathbb{C}$ et pour tout n, on ait $|g_n(z)| \leqslant C\ \|d\varphi_n(z)\|\ \|\omega(z)\|$, où $\|\ \|$ est une norme quelconque sur $\mathcal{L}(\mathbb{C}, \mathbb{K})$. Comme de plus $d\varphi_n(z) = n d\varphi(n(z - z_0))$ et $\|d\varphi(u)\|$ est borné sur $\mathbb{C}$ tout entier, on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $|g_n(z)| \leqslant An$ sur $K \cap \overline{D}_n$, où A est une constante absolue. On obtient ainsi $|\int_K d\varphi_n \wedge \omega| \leqslant \int_{\overline{D}_n} |g_n|\, dm \leqslant An \times \pi/n^2 = A\pi/n$, et donc $\lim_{n\to\infty} \int_K d\varphi_n \wedge \omega = 0$. Au total, on a bien $\lim_{n\to\infty} \int_K d\omega_n = \int_K d\omega$, ce qui achève la démonstration dans le cas où S est réduit à un point.

On a en fait montré que pour tout point $z_0 \in \mathbb{C}$, on peut trouver une fonction φ (de classe $\mathcal{C}^\infty$) nulle au voisinage de z_0, telle que $\int_{\partial K} \varphi\omega$ et $\int_K d(\varphi\omega)$ soient proches respectivement de $\int_{\partial K} \omega$ et $\int_K d\omega$. Le cas d'un ensemble fini arbitraire S peut donc se traiter par récurrence sur le nombre de points de S.

Passons à la deuxième étape. On rappelle qu'on a noté H le demi-plan $\{x \leqslant 0\}$ dans $\mathbb{R}^2$.

Lemme 2.3.6. *Si z_0 est un point régulier de ∂K, il existe un voisinage ouvert W de z_0 dans $\mathbb{C}$, un rectangle ouvert $U =]-\alpha_0; \alpha_0[\times]-\varepsilon_0; \varepsilon_0[\subset \mathbb{R}^2$ et un $\mathcal{C}^2$-difféomorphisme $\psi : W \to U$ préservant l'orientation tel que $\psi(W \cap K) = U \cap H$ et $\psi(W \cap \partial K) = U \cap \partial H$.*

Preuve. Soit z_0 un point régulier de ∂K.

Remarquons d'abord qu'il suffit de trouver U, W et un $\mathcal{C}^2$-difféomorphisme $\varphi : U \to W$ tel que $\varphi(\{0\} \times]-\varepsilon_0; \varepsilon_0[) = W \cap \partial K$. En effet, supposons avoir trouvé une telle application φ. Comme φ est un homéomorphisme, l'ouvert $W\backslash\partial K = \varphi(U\backslash\partial H)$ possède deux composantes connexes, dont les images inverses par φ sont $\{(x, y) \in U;\ x < 0\}$

et $\{(x\,,y) \in \mathrm{U};\ x > 0\}$. Ces deux composantes connexes sont nécessairement égales à $\mathrm{W} \cap \mathring{\mathrm{K}}$ et $\mathrm{W} \backslash \mathrm{K}$ car $\mathrm{W} \cap \mathring{\mathrm{K}}$ et $\mathrm{W} \backslash \mathrm{K}$ sont deux ouverts non vides formant une partition de $\mathrm{W} \backslash \partial\mathrm{K}$; $\mathrm{W} \cap \mathring{\mathrm{K}}$ est non vide car $\mathrm{W} \cap \mathrm{K} \neq \emptyset$ et K est l'adhérence de son intérieur. Quitte à effectuer au départ une symétrie par rapport à l'axe des ordonnées, c'est-à-dire changer $(x\,,y)$ en $(-x\,,y)$, on peut supposer qu'on a $\varphi^{-1}(\mathrm{W} \cap \mathring{\mathrm{K}}) = \mathrm{U} \cap \{x < 0\}$, et on a alors $\varphi^{-1}(\mathrm{W} \cap \mathrm{K}) = \mathrm{U} \cap \mathrm{H}$. Enfin, quitte à effectuer une symétrie par rapport à l'axe des abscisses, on peut également supposer que φ préserve l'orientation. L'application $\psi = \varphi^{-1}$ satisfait alors aux conditions requises. Tout revient donc à trouver le difféomorphisme φ.

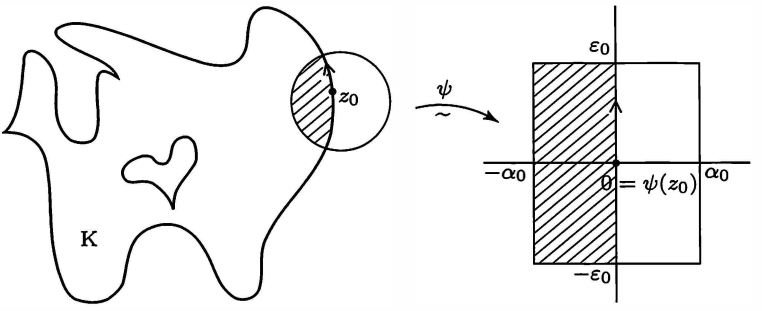


FIG. 16.

Soit $\gamma : [-\varepsilon;\varepsilon] \to \partial\mathrm{K}$ un chemin de Jordan régulier de classe $\mathcal{C}^2$ tel que $\gamma(0) = z_0$. En notant $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, on peut supposer par exemple qu'on a $y'(0) \neq 0$, et en diminuant ε, on peut supposer que y' ne s'annule pas sur $]-\varepsilon;\varepsilon[$. D'après le théorème de Rolle, l'application y est donc injective sur $]-\varepsilon;\varepsilon[$. Notons B_ε la bande $\mathbb{R}\times]-\varepsilon;\varepsilon[\subset \mathbb{R}^2$, et soit $\Phi : \mathrm{B}_\varepsilon \to \mathbb{C}$ définie par

$$\Phi(x\,,t) = x + \gamma(t) = (x + x(t), y(t))\,.$$

L'application Φ est de classe $\mathcal{C}^2$, et elle est injective car l'application y est injective. De plus, on a $\Phi(0\,,0) = z_0$, et

$$\mathrm{J}_\Phi(t) = \det \begin{pmatrix} 1 & x'(t) \\ 0 & y'(t) \end{pmatrix} = y'(t)\,,$$

donc $\mathrm{J}_\Phi(x\,,t) \neq 0$ pour tout $(x\,,t) \in \mathrm{B}_\varepsilon$. À l'aide du théorème d'inversion locale, on en déduit que $\mathrm{V} = \Phi(\mathrm{B}_\varepsilon)$ est un voisinage ouvert de z_0 et que Φ est un $\mathcal{C}^2$-difféomorphisme de B_ε sur V. Enfin, on a $\Phi(0\,,t) = \gamma(t)$ pour tout $t \in\,]-\varepsilon;\varepsilon[$, et donc $\Phi(\{0\}\times]-\varepsilon;\varepsilon[) = \gamma(]-\varepsilon;\varepsilon[)$.

Si $\mathrm{V} \cap \partial\mathrm{K}$ ne contenait pas d'autres points que ceux de $\gamma(]-\varepsilon;\varepsilon[)$, alors l'application Φ conviendrait. On va montrer qu'en restreignant le domaine de définition de Φ, on peut également obtenir cette dernière propriété.

Soit Γ_0 la composante connexe de ∂K contenant z_0. Comme ∂K n'a qu'un nombre fini de composantes connexes, Γ_0 est un ouvert de ∂K. De plus, il est facile de voir que γ se prolonge en un paramétrage de Γ_0. Par conséquent, $\gamma(]-\varepsilon;\varepsilon[)$ est un ouvert de Γ_0, et donc de ∂K. Ainsi, $L = \partial K \backslash \gamma(]-\varepsilon;\varepsilon[)$ est un compact ne contenant pas z_0, donc $V' = V \backslash L$ est un voisinage ouvert de z_0. Par continuité de Φ, on peut trouver ε_0 et $\alpha_0 > 0$ tels que $\Phi(]-\alpha_0;\alpha_0[\times]-\varepsilon_0;\varepsilon_0[) \subset V'$. Si on pose $U =]-\alpha_0;\alpha_0[\times]-\varepsilon_0;\varepsilon_0[$ et $W = \Phi(U)$, alors $\varphi = \Phi_{|U}$ est un $\mathcal{C}^2$-difféomorphisme de U sur W, et le choix de ε_0 et α_0 montre qu'on a $\partial K \cap W = \gamma(]-\varepsilon_0;\varepsilon_0[) = \varphi(\{0\}\times]-\varepsilon_0;\varepsilon_0[)$. L'application φ satisfait donc aux conditions requises, ce qui termine la démonstration.

Si W et ψ vérifient les conclusions du lemme précédent, on dira que (W,ψ) est une **carte locale** pour ∂K au point z_0, et que W est un **ouvert de carte** pour ∂K.

Pour continuer, on a besoin de définir l'intégrale sur ∂H d'une 1-forme différentielle continue à support compact : si $\alpha \in \mathcal{A}_0^1(\mathbb{R}^2)$ est à support compact, on pose $\int_{\partial H}\alpha = \int_{\mathbb{R}} i^*\alpha$, où $i : \mathbb{R} \to \partial H$ est l'injection « canonique » définie par $i(t) = (0,t)$; autrement dit, si $\alpha = P\,dx + Q\,dy$, alors

$$\int_{\partial H}\alpha = \int_{\mathbb{R}} Q(0,t)\,dt\,.$$

Lemme 2.3.7. *Si (W,ψ) est une carte locale pour ∂K et si on pose $\varphi = \psi^{-1}$, alors, pour toute 1-forme différentielle $\omega \in \mathcal{A}_1^1(\mathbb{C})$ à support compact contenu dans W, on a $\int_K d\omega = \int_H d(\varphi^*\omega)$ et $\int_{\partial K}\omega = \int_{\partial H}\varphi^*\omega$.*

Preuve. Soit (W,ψ) une carte locale pour ∂K, et soit $\omega \in \mathcal{A}_1^1(\mathbb{C})$ à support compact contenu dans W.

On a $\int_K d\omega = \int_{W\cap K} d\omega$ car $d\omega \equiv 0$ en dehors de W, et $W \cap K = \varphi(H)$. Comme $\varphi = \psi^{-1}$ préserve l'orientation et $d(\varphi^*\omega) = \varphi^*(d\omega)$ (proposition 2.2.12), la première égalité découle donc directement du théorème de changement de variables.

Soit Γ_0 la composante connexe de ∂K contenant $W \cap \partial K$. Comme Γ_0 est compact et $W \cap \partial K$ ne l'est pas, $W \cap \partial K$ est strictement contenu dans Γ_0 ; et comme $\mathrm{supp}(\omega)$ est un compact de W, on en déduit qu'il existe un intervalle compact J tel que $\mathrm{supp}(\omega) \cap \partial K \subset \varphi(\{0\}\times J) \subset W$. Pour $t \in J$, posons alors $\gamma(t) = \varphi(0,t)$. Le chemin γ ainsi défini est un paramétrage de classe $\mathcal{C}^2$ d'une courbe simple contenue dans ∂K et contenant $\mathrm{supp}(\omega)\cap\partial K$. De plus, γ est positivement orienté relativement à K d'après le lemme 1.4.2. On a donc $\int_{\partial K}\omega = \int_\gamma \omega$, autrement dit $\int_{\partial K}\omega = \int_{\partial H}\varphi^*\omega$.

Preuve de la formule de Stokes. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ contenant K, et fixons $\omega \in \mathcal{A}^1_1(\Omega)$.

Si χ_0 est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ à support compact contenu dans Ω et valant 1 au voisinage de K, alors $\chi_0\omega$ se prolonge en une 1-forme de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{C}$ tout entier – encore notée $\chi_0\omega$ – à support compact, qui vérifie $\chi_0\omega \equiv \omega$ au voisinage de K et (donc) $d(\chi_0\omega) \equiv d\omega$ sur K. On peut donc supposer que ω est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{C}$ tout entier, et à support compact.

D'après le lemme 2.3.5, on peut trouver une suite (ω_n) de 1-formes de classe $\mathcal{C}^1$ à supports compacts telles que $\int_{\partial K} \omega_n$ et $\int_K d\omega_n$ tendent respectivement vers $\int_{\partial K} \omega$ et $\int_K d\omega$ quand n tend vers l'infini, et dont les supports ne contiennent aucun point non régulier de ∂K. Si la formule de Stokes est vraie pour les ω_n, elle le sera aussi pour ω par passage à la limite ; par conséquent, on peut également supposer que les points de $\mathrm{supp}(\omega) \cap \partial K$ sont tous des points réguliers de ∂K.

Cas 1. *Supposons que* $\mathrm{supp}(\omega)$ *soit disjoint de* K. Dans ce cas, on a évidemment $\int_K d\omega = 0 = \int_{\partial K} \omega$, puisque ω est nulle au voisinage de K.

Cas 2. *Supposons qu'il existe un rectangle ouvert* $R \subset \mathring{K}$ *tel que* $\mathrm{supp}(\omega) \subset R$. Dans ce cas, on a $\int_{\partial K} \omega = 0$ car ω est nulle au voisinage de ∂K, et comme R est difféomorphe à $\mathbb{R}^2$, on est ramené par changement de variables à prouver que si α est une 1-forme de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et à support compact, alors $\int_{\mathbb{R}^2} d\alpha = 0$. En écrivant $\alpha = P\,dx + Q\,dy$, l'intégrale précédente devient $\int_{\mathbb{R}^2} (\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial s})\,dxdy$; mais pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\int_{\mathbb{R}} \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\,dy = [P(x,.)]^{+\infty}_{-\infty} = 0$ car P est à support compact, et de même $\int_{\mathbb{R}} \frac{\partial Q}{\partial y}(x,y)\,dx = 0$ pour tout $y \in \mathbb{R}$. Le résultat est donc démontré dans ce deuxième cas.

Cas 3. *Supposons que* $\mathrm{supp}(\omega)$ *soit contenu dans un ouvert de carte pour* ∂K. Dans ce cas, on est ramené à vérifier (d'après le lemme 2.3.7) que si $\alpha = P\,dx + Q\,dy$ est une 1-forme différentielle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et à support compact, alors $\int_{\partial H} \alpha = \int_H d\alpha$.

Choisissons A et $B > 0$ tels que $\mathrm{supp}(\alpha) \subset]-A;A[\times]-B;B[$. On a alors $\int_{\partial H} \alpha = \int_{-B}^{B} Q(0,y)\,dy$ et $\int_H d\alpha = \int_{-A}^{0}\int_{-B}^{B} (\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x})\,dxdy$. Comme $\int_{-B}^{B} \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\,dy = [P(x,.)]^{B}_{-B} = 0$ pour tout $x \in]-A;0]$ et $\int_{-A}^{0} \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)\,dx = [Q(.,y)]^{0}_{-A} = Q(0,y)$ pour tout $y \in [-B;B]$, le résultat suit.

Cas général. Posons $L = \mathrm{supp}(\omega)$. Comme tous les points de $L \cap \partial K$ sont des points réguliers de ∂K, on peut recouvrir L en utilisant uniquement $\mathbb{C}\backslash K$, des rectangles ouverts contenus dans $\mathring{K}$, et des ouverts de

carte ; et comme de plus L est compact, on peut extraire de ce recouvrement un sous-recouvrement fini $(W_1, \dots, W_n)$. Soit $(\chi_1, \dots, \chi_k)$ une partition de l'unité subordonnée à ce recouvrement (voir le théorème A.2.2) ; par définition, cela signifie que les χ_i sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{C}$ à supports compacts, avec $\mathrm{supp}(\chi_i) \subset W_i$ pour tout i, et qu'on a $\sum_1^n \chi_i = 1$ au voisinage de L. On a $\omega = \sum_{i=1}^k (\chi_i \omega)$, ce qui montre que ω est une somme finie de formes différentielles chacune redevable de l'un des trois cas précédents. Par linéarité, cela termine la démonstration.

2.3.3. Démonstration élémentaire dans le cas d'un « disque à trous »

La démonstration de la formule de Stokes n'a rien d'élémentaire. Cependant, on a vu au début du chapitre que dans le cas d'un rectangle, on peut la démontrer par un calcul très simple. Dans cette section, on va démontrer directement un autre cas particulier de cette formule, qui est suffisant pour un grand nombre d'applications.

Proposition 2.3.8. *La formule de Stokes est valable pour un « disque à trous », c'est-à-dire un compact* K *de la forme* $\overline{D} \setminus \bigcup_{i=1}^k D_i$, *où* D *et les* D_i *sont des disques ouverts tels que* $\overline{D}_i \subset D$ *pour tout* i *et les* $\overline{D}_i$ *sont deux à deux disjoints.*

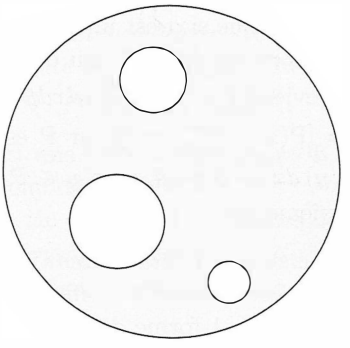


FIG. 17. Disque à trous

La démonstration est basée sur le lemme suivant.

Lemme 2.3.9. *La formule de Stokes est valable pour un disque.*

Preuve. Il suffit de traiter le cas du disque unité $\overline{\mathbb{D}} = \overline{D}(0,1)$.

Soit ω une 1-forme du type $P\,dx$, où P est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ au voisinage de $\overline{\mathbb{D}}$. On a $d\omega = -\frac{\partial P}{\partial y}\, dx \wedge dy$, et donc $\int_{\overline{\mathbb{D}}} d\omega = -\int_{\overline{\mathbb{D}}} \frac{\partial P}{\partial y}\, dm$. En intégrant en coordonnées polaires et en posant $\mathbf{P}(r,\theta) = P(re^{i\theta})$, cette expression devient

$$(*) \qquad \int_0^1 \int_0^{2\pi} \left(-r \sin\theta \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial r} - \cos\theta \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \theta} \right) dr d\theta \ .$$

Pour $\theta \in [0\,;2\pi]$ fixé, une intégration par parties donne $\int_0^1 r \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial r}(r,\theta)\, dr = \mathbf{P}(1,\theta) - \int_0^1 \mathbf{P}(r,\theta)\, dr$; le premier terme de $(*)$ est donc égal à

$$-\int_0^{2\pi} \mathbf{P}(1,\theta) \sin\theta \, d\theta + \int_0^{2\pi} \int_0^1 \mathbf{P}(r,\theta) \sin\theta \, dr d\theta \ .$$

De même, on a $\int_0^{2\pi} \cos\theta \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \theta}(r,\theta)\, d\theta = \int_0^{2\pi} \sin\theta \, \mathbf{P}(r,\theta)\, d\theta$ pour chaque $r \in [0\,;1]$, et le deuxième terme vaut donc $-\int_0^1 \int_0^{2\pi} \mathbf{P}(r,\theta) \sin\theta \, d\theta dr$. On obtient ainsi

$$\int_{\overline{\mathbb{D}}} d\omega = -\int_0^{2\pi} \mathbf{P}(1,\theta) \sin\theta \, d\theta = -\int_0^{2\pi} \mathrm{P}(e^{i\theta}) \sin\theta \, d\theta = \int_{\partial \mathbb{D}} \omega \ .$$

Un calcul analogue fournit le même résultat pour une 1-forme du type $\mathrm{Q}\, dy$, et le lemme est démontré.

Preuve de la proposition 2.3.8. Soit $\mathrm{K} = \overline{\mathrm{D}} \setminus \bigcup_i \mathrm{D}_i$, et fixons une 1-forme ω de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert Ω contenant K.

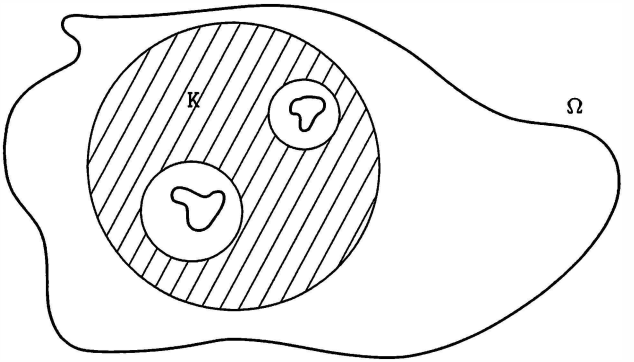


FIG. 18.

Si Ω contient le grand disque $\overline{\mathrm{D}}$, on peut écrire

$$\int_{\mathrm{K}} d\omega = \int_{\overline{\mathrm{D}}} d\omega - \sum_i \int_{\overline{\mathrm{D}}_i} d\omega \, ,$$

et le résultat découle directement du lemme 2.3.9. Dans le cas général, choisissons une fonction $\chi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{C})$ à support compact contenu dans Ω et valant 1 au voisinage de K. La 1-forme $\chi\omega$ se prolonge en une 1-forme ω_1 de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{C}$ tout entier, telle que $\omega_1 \equiv \omega$ au voisinage de K. D'après la première partie de la démonstration, la formule de Stokes est valable pour ω_1, et on a donc $\int_{\mathrm{K}} d\omega = \int_{\mathrm{K}} d\omega_1 = \int_{\partial \mathrm{K}} \omega_1 = \int_{\partial \mathrm{K}} \omega$.

Exercices

2.1. (Une preuve du théorème de Schwarz.)

1) Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et soient u, v deux fonctions continues sur Ω. On suppose qu'on a $\int_R u\,dm = \int_R v\,dm$ pour tout rectangle fermé $R \subset \Omega$. Montrer que $u = v$.

2) Déduire de 1) une preuve du théorème de Schwarz (sur la symétrie des dérivées partielles secondes) pour une fonction de classe $\mathcal{C}^2$.

2.2. Montrer que pour une fonction de classe $\mathcal{C}^2$, le théorème de Schwarz peut se déduire de la formule de Stokes pour un rectangle.

2.3. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(0,0) = 0$ et $f(x,y) = \frac{xy\,(x^2-y^2)}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$.

1) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$.

2) Montrer que $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$ existent, et donner leurs valeurs. Que faut-il en conclure ?

2.4. Soient $\Omega_1, \ldots, \Omega_n$ des ouverts de $\mathbb{C}$, et soit $\Omega = \Omega_1 \cup \ldots \cup \Omega_n$. On suppose que $(\Omega_1 \cup \ldots \cup \Omega_i) \cap \Omega_{i+1}$ est connexe pour tout $i < n$. Montrer que si ω est une 1-forme sur Ω dont la restriction à chaque Ω_i est exacte, alors ω est exacte sur Ω.

2.5. Pour $\alpha > 0$, on pose

$$\omega_\alpha = \frac{(x-y)\,dx + (x+y)\,dy}{(x^2+y^2)^\alpha}\,.$$

Pour quelles valeurs de α la 1-forme ω_α est-elle fermée ? Pour quelles valeurs de α est-elle exacte ?

2.6. Soit $\alpha > 0$ et soit $\omega = P\,dx + Q\,dy$ une 1-forme de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{C}^*$, fermée et homogène de degré α (c'est-à-dire vérifiant $\omega(\lambda x) \equiv \lambda^\alpha \omega(x)$ pour tout $\lambda > 0$). Montrer que ω est exacte en déterminant explicitement une primitive de ω.

2.7. Soit ω une 1-forme continue sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$.

1) Soit $R \subset \Omega$ un rectangle de centre a. Pour $s \in [0\,;1]$, on note R_s le rectangle image de R par l'homothétie de centre a et de rapport s. Montrer que l'application $s \mapsto \int_{\partial R_s} \omega$ est continue sur $[0\,;1]$.

2) On suppose qu'on a $\int_\gamma \omega \in \mathbb{Q}$ pour tout lacet γ dans Ω. Montrer que ω est fermée.

2.8. Soit ω une 1-forme fermée sur $\mathbb{C}^*$.

1) On note $\Omega_1, \ldots, \Omega_4$ les demi plans $\{\mathrm{Re}(z) > 0\}$, $\{\mathrm{Im}(z) > 0\}$, $\{\mathrm{Re}(z) < 0\}$, $\{\mathrm{Im}(z) < 0\}$. Montrer qu'il existe des fonctions $f_1, \ldots, f_4$ telles que chaque f_i est une primitive de ω sur Ω_i et $f_{i+1} \equiv f_i$ sur $\Omega_i \cap \Omega_{i+1}$ pour $i < 4$.

2) On suppose qu'on a $\int_{\partial \mathbb{D}} \omega = 0$. Montrer que ω est exacte.

2.9. En utilisant l'exercice précédent, montrer que si ω est une 1-forme fermée sur $\mathbb{C}^*$, alors il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\omega - \lambda \frac{dz}{z}$ est exacte. Conclure que $\mathrm{H}^1(\mathbb{C}^*)$ est isomorphe à $\mathbb{K}$.

2.10. Essayer de démontrer que $\mathbb{C}$ et $\mathbb{C}^*$ ne sont pas homéomorphes.

2.11. Soient $\mathrm{F}_1, \mathrm{F}_2 \subset \mathbb{C}$ deux ensembles finis ayant le même nombre d'éléments. Les ouverts $\mathbb{C}\backslash \mathrm{F}_1$ et $\mathbb{C}\backslash \mathrm{F}_2$ sont-ils homéomorphes ?

2.12. (Lemme de Poincaré dans $\mathbb{R}^n$.)

Soit $\omega = \sum_1^n \omega_i dx_i$ une 1-forme de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$. Montrer que ω est exacte – autrement dit qu'il existe une fonction $\mathrm{F} \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n)$ telle que $\omega = d\mathrm{F}$ – si et seulement si on a

$$\frac{\partial \omega_i}{\partial x_j} = \frac{\partial \omega_j}{\partial x_i}$$

pour tous $i, j \in \{1; \dots; n\}$.

2.13. En utilisant l'exercice précédent, montrer que si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ est de classe $\mathcal{C}^2$ et ne s'annule pas, alors la 1-forme df/f est exacte.

2.14. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ une application de classe $\mathcal{C}^2$ vérifiant $|f(x)| = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$. En utilisant l'exercice précédent, montrer qu'il existe une application $\theta : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ telle que

$$f(x) = e^{i\,\theta(x)} \cdot$$

pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.

2.15. Si B est une forme $\mathbb{R}$-bilinéaire sur $\mathrm{E} = \mathbb{C}$, l'**antisymétrisée** de B est la forme bilinéaire alternée Alt B définie par la formule

$$\mathrm{Alt\,B}\,(u, v) = \mathrm{B}(u, v) - \mathrm{B}(v, u)\,.$$

On identifie $\mathcal{L}(\mathcal{L}(\mathbb{C}, \mathbb{K}))$ et $\mathcal{L}^2(\mathbb{C}, \mathbb{K})$ de la manière habituelle. Si ω est une 1-forme de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$, quel lien y a-t-il entre $d\omega(z)$ et $\mathrm{Alt}(\mathrm{D}\omega(z))$ pour $z \in \Omega$?

2.16. Définir la dérivée extérieure d'une 1-forme de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

2.17. (Équations de structure de $\mathbb{R}^n$.)

Soient $u_1, \dots, u_n : \Omega \to \mathbb{R}^n$ des champs de vecteurs de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. On suppose que pour tout $x \in \Omega$, $(u_1(x), \dots, u_n(x))$ est une base de $\mathbb{R}^n$. Pour $x \in \Omega$, on note $(\omega_1(x), \dots, \omega_n(x))$ la base duale de $(u_1(x), \dots, u_n(x))$ dans $(\mathbb{R}^n)^*$.

0) *a*) Constater que les ω_i sont des 1-formes de classe $\mathcal{C}^1$.

b) Soit $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Constater que pour tout $i \in \{1; \dots; n\}$, on peut écrire

$$\mathrm{D}u_i = \sum_{j=1}^{n} \omega_{ij}\, e_j\,,$$

où $\omega_{i1}, \dots, \omega_{in}$ sont des 1-formes continues.

1) Pour $i \in \{1; \dots; n\}$, on écrit $u_i = \sum_j \lambda_{ij} e_j$, où les λ_{ij} sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer que pour $i, j \in \{1; \dots; n\}$, on a

$$(*) \qquad d\lambda_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \omega_{ik} \lambda_{kj} \ .$$

2) Déduire de 1) que pour tout $i \in \{1; \dots; n\}$, on a

$$d\omega_i = \sum_{k=1}^{n} \omega_k \wedge \omega_{ki} \ .$$

3) En différentiant $(*)$, montrer que pour $i, j \in \{1; \dots; n\}$, on a

$$d\omega_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \omega_{ik} \wedge \omega_{kj} \ .$$

2.18. Dans tout l'exercice, Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

1) Soient $\omega_1, \dots, \omega_r$ des 1-forme différentielles sur Ω ; on suppose que pour tout $x \in \Omega$, les formes linéaires $\omega_1(x), \dots, \omega_r(x)$ sont linéairement indépendantes. Montrer que si $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ sont des 1-formes sur Ω vérifiant $\sum_i \omega_i \wedge \alpha_i = 0$, alors on peut écrire

$$\alpha_i = \sum_{j=1}^{r} \mu_{ij} \omega_j \ ,$$

où les μ_{ij} sont des fonctions et $\mu_{ij} = \mu_{ji}$ pour tout couple (i, j).

2) On garde les notations de l'exercice précédent. En utilisant 1), montrer qu'il existe une *unique* famille (ω_{ij}) de 1-formes sur Ω vérifiant les relations

$$\omega_{ji} = -\omega_{ij} \ ,$$
$$d\omega_i = \sum_{k=1}^{n} \omega_k \wedge \omega_{ki} \ .$$

2.19. Soient Ω, Ω' deux ouverts de $\mathbb{C}$, et soit $\varphi : \Omega \to \Omega'$ de classe $\mathcal{C}^1$. Exprimer $\varphi^*(d\bar{z} \wedge dz)$ à l'aide de $|\frac{\partial \varphi}{\partial z}|$ et $|\frac{\partial \varphi}{\partial \bar{z}}|$.

2.20. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et soit $f : \Omega \to \mathbb{C}^*$ de classe $\mathcal{C}^1$. Le but de l'exercice est de montrer que $\omega = \frac{df}{f}$ est fermée.

1) On suppose f de classe $\mathcal{C}^2$. Montrer que $\omega = \frac{df}{f}$ est fermée en calculant $d\omega$.

2) Soit R un compact de Ω. Montrer qu'il existe une suite (f_n) de fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{C}$ à supports compacts telle que f_n tend vers f et df_n tend vers df uniformément sur R.

3) Conclure.

2.21. Soit $\Omega =]0;+\infty[\times\mathbb{R}$, et soit $\varphi : \Omega \to \mathbb{C}^*$ définie par $\varphi(r,\theta) = re^{i\theta}$. Montrer qu'une 1-forme ω de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{C}^*$ est fermée si et seulement si $\varphi^*\omega$ est fermée. Qu'en est-il de l'exactitude ?

2.22. Soit $m \in \mathbb{Z}$ et soit ω la 1-forme définie sur $\mathbb{C}^*$ par $\omega = \frac{1}{|z|^{2m}}(\bar{z}dz - zd\bar{z})$.

1) Montrer que si $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{C}^*)$, alors $f\omega$ est fermée si et seulement si f est $(2m-2)$-homogène (voir l'exercice 1.4).

2) Soit $\varphi :]0;+\infty[\times\mathbb{R}$ définie par $\varphi(r,\theta) = re^{i\theta}$. Montrer que si $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{C}^*)$ est $(2m-2)$-homogène, alors $\varphi^*(f\omega) = 2if(e^{i\theta})d\theta$.

3) Soit f une fonction $(2m-2)$-homogène, de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{C}^*$. On note c_n les coefficients de Fourier de la fonction $\theta \mapsto f(e^{i\theta})$.

a) Montrer qu'on a $c_n = \mathrm{O}(1/n^2)$.

b) On suppose $c_0 = 0$. Montrer que $f\omega$ est exacte et exprimer ses primitives sous forme de séries faisant intervenir les coefficients c_n.

c) Que peut-on dire de la 1-forme $f\omega - c_0|z|^{2m-2}\omega$?

2.23. 1) Soit $\mathrm{P} \in \mathbb{C}[\mathrm{X},\mathrm{Y}]$ et soit $\mathcal{P}$ la fonction définie par $\mathcal{P}(z) = \mathrm{P}(z,\bar{z})$. Montrer que si $\mathcal{P} = 0$, alors $\mathrm{P} = 0$. Montrer aussi que si P est homogène de degré m, alors $z\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial z} + \bar{z}\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial \bar{z}} = m\mathcal{P}$.

2) Soient $\mathrm{P},\mathrm{Q} \in \mathbb{C}[\mathrm{X},\mathrm{Y}]$ tels que la fonction $z \mapsto |\mathrm{P}(z,\bar{z})|^2 - |\mathrm{Q}(z,\bar{z})|^2$ n'est pas identiquement nulle. Montrer que $z\mathrm{P}(z,\bar{z}) + \bar{z}\mathrm{Q}(z,\bar{z})$ n'est pas identiquement nul et que la 1-forme

$$\omega = \frac{\mathrm{P}(z,\bar{z})\,dz + \mathrm{Q}(z,\bar{z})\,d\bar{z}}{z\,\mathrm{P}(z,\bar{z}) + \bar{z}\,\mathrm{Q}(z,\bar{z})}$$

est fermée sur son domaine de définition.

3) On prend $\mathrm{P} = \mathrm{XY}$ et $\mathrm{Q} = \alpha(\mathrm{X}^2 - \mathrm{Y}^2)$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Déterminer le domaine de définition de ω, et étudier son exactitude lorsque $\alpha \leqslant -1/2$.

2.24. (Facteur intégrant.)

Soit ω une 1-forme de classe $\mathcal{C}^1$ au voisinage d'un point $z_0 \in \mathbb{C}$ et vérifiant $\omega(z_0) \neq 0$. Montrer qu'il existe un voisinage V de z_0 et une fonction $f \in \mathcal{C}^1(\mathrm{V})$ tels que $f\omega$ est exacte sur V.

2.25. Soit K un compact de $\mathbb{C}$. On suppose que K est l'adhérence de son intérieur et que $\partial\mathrm{K}$ est une courbe fermée régulière de classe $\mathcal{C}^1$.

1) Soit $\gamma : [a;b] \to \mathbb{C}$ un paramétrage de $\partial\mathrm{K}$ régulier de classe $\mathcal{C}^1$.

a) Montrer que pour tout $t_0 \in]a;b[$, on peut trouver $\alpha > 0$ tel que $\gamma_{|[t_0-\alpha;t_0+\alpha]}$ est orienté (positivement ou négativement) relativement à $\mathring{\mathrm{K}}$.

b) Pour $t \in]a;b[$, on pose $n(t) = 1$ s'il existe $\alpha > 0$ tel que $\gamma_{|[t-\alpha;t+\alpha]}$ est positivement orienté relativement à $\mathring{\mathrm{K}}$, et $n(t) = -1$ s'il existe $\alpha > 0$ tel que $\gamma_{|[t-\alpha;t+\alpha]}$ est négativement orienté relativement à $\mathring{\mathrm{K}}$. Justifier cette définition, et montrer que l'application n est continue.

2) Montrer que $\partial\mathrm{K}$ est orientable relativement à $\mathring{\mathrm{K}}$.

2.26. Soit $\mathrm{K} \subset \mathbb{C}$ un compact à bord régulier de classe $\mathcal{C}^2$. Pour $\varepsilon > 0$, on pose $\mathrm{K}_\varepsilon = \{z \in \mathbb{C};\ d(z,\mathrm{K}) \leqslant \varepsilon\}$. En raisonnant comme dans l'exercice 1.31,

montrer que la longueur de ∂K – définie comme étant la somme des longueurs des composantes connexes de ∂K – est donnée par la formule

$$l(\partial K) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{m(K_\varepsilon) - m(K)}{\varepsilon} .$$

2.27. Démontrer directement la formule de Stokes pour un triangle.

2.28. Soit $\omega = (y^2 - x^2 + 2xy)\,dx + (y^2 - x^2 - 2xy)\,dy$.

1) On note γ_1 le segment $[1; i]$ orienté de 1 vers i, et γ_2 le quart de cercle de centre 0 joignant 1 à i. Calculer $I_1 = \int_{\gamma_1} \omega$ et $I_2 = \int_{\gamma_2} \omega$, d'abord directement, puis en utilisant la formule de Stokes.

2) Calculer $J_1 = \int_{\gamma_1} \frac{\omega}{(x^2+y^2)^2}$ et $J_2 = \int_{\gamma_2} \frac{\omega}{(x^2+y^2)^2}$.

2.29. Soit $\omega = A dz + B d\bar{z}$ une 1-forme de classe $\mathcal{C}^1$ au voisinage de 0, et soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ au voisinage de 0. Montrer qu'on a

$$\lim_{r \to 0} \frac{1}{2i\pi r^2} \int_{\partial D(0,r)} f\omega = A(0)\,\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(0) - B(0)\,\frac{\partial f}{\partial z}(0) - \left(\frac{\partial B}{\partial z}(0) - \frac{\partial A}{\partial \bar{z}}(0) \right) f(0) .$$

2.30. Soit $\omega = \frac{1}{2i}\left(\frac{dz}{z} - \frac{d\bar{z}}{\bar{z}}\right)$, et pour $a \in \mathbb{C}$, posons $\tau_a(z) = z - a$. Montrer que si $K \subset \mathbb{C}$ est un compact à bord régulier et si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ au voisinage de K, alors, pour tout point $a \in \mathring{K}$, on peut écrire

$$f(a) = \frac{1}{2i\pi} \left(\int_{\partial K} f \tau_a^* \omega - \int_K df \wedge \tau_a^* \omega \right) .$$

On pourra appliquer la formule de Stokes dans des compacts du type $K_\varepsilon = K \cap \{|z - a| \geqslant \varepsilon\}$.

2.31. Soit $K \subset \mathbb{C}$ un compact à bord régulier. Montrer que si u, v sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ au voisinage de K, alors

$$\int_{\partial K} u\,\partial v + v\,\bar{\partial} u = \frac{i}{2} \int_K (u\,\Delta v - v\,\Delta u)\,dm ,$$

où ∂h désigne la 1-forme $\frac{\partial h}{\partial z}\,dz$ et $\bar{\partial} h$ désigne la 1-forme $\frac{\partial h}{\partial \bar{z}}\,d\bar{z}$.

2.32. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ au voisinage du disque unité fermé $\overline{\mathbb{D}} \subset \mathbb{C}$. En appliquant l'exercice précédent aux couronnes $K_\varepsilon = \{\varepsilon \leqslant |z| \leqslant 1\}$, établir la formule

$$f(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})\,d\theta + \int_{\mathbb{D}} \Delta f(z) \ln |z|\ dm(z) .$$

2.33. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$, et soit ω une 1-forme fermée sur Ω, supposée seulement continue.

1) Soit K un compact de Ω. Montrer qu'il existe une suite (ω_n) de 1-formes de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{C}$ telle que chaque ω_n est fermée au voisinage de K et ω_n tend vers ω uniformément sur K.

2) Montrer que si $K \subset \Omega$ est un compact à bord régulier, alors $\int_{\partial K} \omega = 0$.

2.34. (Théorème de non-rétraction, cas $\mathcal{C}^1$.)

1) Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ dans un ouvert $V \subset \mathbb{C}$, à valeurs complexes. On suppose que $|f|$ reste constant dans V. Montrer qu'on a $d\overline{f} \wedge df = 0$ dans V.

2) Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ au voisinage d'un compact à bord régulier $K \subset \mathbb{C}$. On suppose qu'on a $f(\zeta) \equiv \zeta$ sur ∂K. Montrer que l'intégrale $\int_{\partial K} \overline{f} df$ est non nulle.

3) Une **rétraction** d'un ensemble X sur un ensemble $Y \subset X$ est une application $r : X \to X$ telle que $r(X) \subset Y$ et $r(y) \equiv y$ sur Y. Montrer qu'il n'existe pas d'application $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^1$ dont la restriction à $\overline{\mathbb{D}}$ soit une rétraction de $\overline{\mathbb{D}}$ sur $\partial\mathbb{D}$.

Chapitre 3

Fonctions holomorphes I

Dans tout ce chapitre, la lettre Ω désigne un ouvert de $\mathbb{C}$.

3.1. Définitions et exemples

3.1.1. Fonctions $\mathbb{C}$-dérivables

La notion de $\mathbb{C}$-dérivabilité est, pour les fonctions d'une variable complexe, l'analogue direct de la notion de dérivabilité pour les fonctions d'une variable réelle.

Définition 3.1.1. *Une fonction $f : \Omega \to \mathbb{C}$ est dite* **$\mathbb{C}$-dérivable** *en un point $a \in \Omega$ si la limite*

$$f'(a) := \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

existe dans $\mathbb{C}$.

Si f est $\mathbb{C}$-dérivable en tout point de Ω, la fonction $f' : \Omega \to \mathbb{C}$ est appelée la **dérivée** de la fonction f.

Remarques. 1) La fonction $z \mapsto z$ est $\mathbb{C}$-dérivable sur $\mathbb{C}$, et sa dérivée est la fonction constante **1**.

2) À l'opposé, la fonction $z \mapsto \bar{z}$ n'est $\mathbb{C}$-dérivable en aucun point, bien qu'elle soit de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$. En effet, $\frac{\bar{h}}{h}$ n'a pas de limite quand h tend vers 0, car pour h réel, on a $\frac{\bar{h}}{h} = 1$, et pour h imaginaire pur, on a $\frac{\bar{h}}{h} = -1$.

3) On démontre exactement comme pour les fonctions d'une variable réelle que la somme ou le produit de deux fonctions $\mathbb{C}$-dérivables est $\mathbb{C}$-dérivable, et que l'inverse d'une fonction $\mathbb{C}$-dérivable qui ne s'annule pas est $\mathbb{C}$-dérivable, avec les formules habituelles.

En particulier, toute fonction polynomiale $\mathrm{P}(z) = \sum_0^n a_i z^i$ est $\mathbb{C}$-dérivable sur $\mathbb{C}$, avec pour dérivée

$$\mathrm{P}'(z) = \sum_1^n i a_i z^{i-1} ,$$

et toute fonction rationnelle sans pôles dans Ω est $\mathbb{C}$-dérivable sur Ω.

4) De même, la composée de deux fonctions $\mathbb{C}$-dérivables est $\mathbb{C}$-dérivable, et la formule

$$(f \circ g)' = (f' \circ g)g'$$

est valable comme dans le cas réel.

On va maintenant examiner les liens entre la $\mathbb{C}$-dérivabilité et la notion usuelle et générale de différentiabilité, qui a un sens sur $\mathbb{C}$ comme sur tout espace vectoriel normé réel.

Selon la définition usuelle de la différentiabilité, une fonction $f: \Omega \to \mathbb{C}$ est dite différentiable en un point a s'il existe une application $\mathbb{R}$-linéaire $\mathrm{T} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ telle qu'au voisinage de $h = 0$, on ait

$$f(a+h) = f(a) + \mathrm{T}(h) + o(h)\,.$$

La proposition suivante montre que la $\mathbb{C}$-dérivabilité est une notion beaucoup plus forte que la différentiabilité au sens usuel : non seulement une application $\mathbb{C}$-dérivable en un point $a \in \Omega$ est différentiable en a, mais de plus, sa différentielle en a est une application linéaire d'un type très particulier.

Proposition 3.1.2. *Pour une fonction $f : \Omega \to \mathbb{C}$, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(1) *f est $\mathbb{C}$-dérivable en un point $a \in \Omega$;*

(2) *f est différentiable en a et $df(a)$ est une* **similitude directe**, *c'est-à-dire la multiplication par un nombre complexe fixé.*

(3) *f est différentiable en a et $df(a) : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est $\mathbb{C}$-linéaire.*

Si ces propriétés sont vérifiées, alors $df(a)$ est la multiplication par $f'(a)$.

Preuve. Supposons la propriété (2) vérifiée. Par hypothèse, $df(a)$ est la multiplication par un certain nombre complexe λ. On peut donc écrire, au voisinage de 0,

$$(*) \qquad f(a+h) - f(a) = \lambda h + o(h)\,,$$

ce qui donne (1) en divisant par h.

Inversement, si (1) est vérifiée, alors $(*)$ est vérifiée avec $\lambda = f'(a)$, ce qui prouve que f est différentiable en a et que $df(a)$ est la multiplication par $f'(a)$.

Enfin, l'équivalence de (2) et (3) est évidente : la multiplication par un nombre fixé est une application $\mathbb{C}$-linéaire, et inversement, si $\mathrm{T} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est $\mathbb{C}$-linéaire, alors $\mathrm{T}(h) \equiv h\mathrm{T}(1)$, donc T est la multiplication par $\lambda = \mathrm{T}(1)$.

La preuve des deux corollaires suivants est immédiate.

Corollaire 3.1.3. *Toute fonction $\mathbb{C}$-dérivable est différentiable, mais la réciproque est fausse.*

Corollaire 3.1.4. *Si $f : \Omega \to \mathbb{C}$ est $\mathbb{C}$-dérivable sur Ω, alors $df = f'dz$.*

Si $T : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est une similitude directe, $T(z) \equiv \lambda z$, alors, en écrivant $\lambda = \alpha + i\beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, on a $T(1) = \alpha + i\beta$ et $T(i) = -\beta + i\alpha$. En identifiant $\mathbb{C}$ et $\mathbb{R}^2$, la matrice de l'application linéaire T dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ est donc de la forme

$$M = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} .$$

Inversement, si une application linéaire T admet une matrice de cette forme, alors T est la multiplication par $\alpha + i\beta$, donc une similitude directe. Avec ces remarques en tête, on peut déduire de la proposition 3.1.2 les deux résultats suivants.

Corollaire 3.1.5. *Une application $f : \Omega \to \mathbb{C}$ est $\mathbb{C}$-dérivable sur Ω si et seulement f est différentiable et vérifie les* **équations de Cauchy-Riemann**

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$$

où on a posé $u = \mathrm{Re}(f)$ et $v = \mathrm{Im}(f)$.

Preuve. Si $f = u + iv \simeq \binom{u}{v}$ est différentiable en un point a, sa matrice Jacobienne au point a est égale à

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x}(a) & \dfrac{\partial u}{\partial y}(a) \\ \dfrac{\partial v}{\partial x}(a) & \dfrac{\partial v}{\partial y}(a) \end{pmatrix} .$$

C'est une matrice de similitude si et seulement si les équations de Cauchy-Riemann sont vérifiées au point a.

Corollaire 3.1.6. *Si f est $\mathbb{C}$-dérivable en a, alors le Jacobien de f en a est égal à $|f'(a)|^2$.*

Preuve. En écrivant $f'(a) = \lambda = \alpha + i\beta$, on a

$$J_f(a) = \det \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} = \alpha^2 + \beta^2 = |\lambda|^2 .$$

Comme dans le cas des fonctions d'une variable réelle, on peut définir par récurrence la notion de fonction *k-fois $\mathbb{C}$-dérivable* ($k \in \mathbb{N}^*$), et on

appelle *infiniment* $\mathbb{C}$*-dérivable* une fonction qui est k fois $\mathbb{C}$-dérivable pour tout $k \geqslant 1$. Un des résultats les plus surprenants de la théorie des fonctions d'une variable complexe est le **théorème de Cauchy-Goursat**, qui affirme que ces définitions sont en fait redondantes : toute fonction $\mathbb{C}$-dérivable est *automatiquement* infiniment $\mathbb{C}$-dérivable. Ce résultat sera démontré au chapitre 4.

3.1.2. Fonctions holomorphes

Définition 3.1.7. *On dit qu'une fonction $f : \Omega \to \mathbb{C}$ est* **holomorphe** *dans Ω si f est de classe $\mathcal{C}^1$ et $\mathbb{C}$-dérivable en tout point.*

Remarque 3.1.8. *Comme $df = f'dz$ si f est $\mathbb{C}$-dérivable, il revient au même de dire que f est holomorphe ou que f est $\mathbb{C}$-dérivable à dérivée continue.*

On notera $\mathcal{H}(\Omega)$ l'ensemble des fonctions holomorphes dans Ω. D'après les remarques suivant la définition de la $\mathbb{C}$-dérivabilité, $\mathcal{H}(\Omega)$ est une algèbre qui contient toutes les fonctions polynomiales et toutes les fonctions rationnelles de la variable z sans pôles dans Ω.

On peut se demander pourquoi imposer a priori aux fonctions holomorphes d'être de classe $\mathcal{C}^1$, d'autant que cette restriction est a posteriori inutile d'après le théorème de Cauchy-Goursat mentionné plus haut. Il s'agit en fait d'une hypothèse purement technique, mais essentielle pour le point de vue adopté dans ce livre : on a besoin de supposer que les fonctions holomorphes sont de classe $\mathcal{C}^1$ si on veut pouvoir appliquer les résultats obtenus sur les formes différentielles. Dans cet esprit, la proposition suivante est fondamentale pour toute la suite. Rappelons que pour une fonction $f \in \mathcal{C}^1(\Omega)$, on a par définition

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$
$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

Proposition 3.1.9. *Pour une fonction $f \in \mathcal{C}^1(\Omega)$, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(1) *f est holomorphe dans Ω ;*

(2) *f vérifie* **l'équation de Cauchy-Riemann** $\dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$;

(3) *La forme $f dz$ est fermée ;*

(4) *$df = g\,dz$, pour une certaine fonction $g \in \mathcal{C}^0(\Omega)$.*

Preuve. L'équivalence des propriétés (2), (3), (4) est immédiate car $df = \frac{\partial f}{\partial z}\,dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\,d\bar{z}$ et $d(f dz) = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\,d\bar{z} \wedge dz$. L'équivalence de (4) et (1) vient de la proposition 3.1.2.

Remarques. 1) L'équation de Cauchy-Riemann s'écrit

$$\frac{\partial f}{\partial y} = i\,\frac{\partial f}{\partial x}\,.$$

2) Si $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, alors $df = f'dz$ et donc $f' = \frac{\partial f}{\partial z}$ puisqu'on a aussi $df = \frac{\partial f}{\partial z}\,dz + \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\,d\overline{z}$. Comme $\frac{\partial f}{\partial y} = i\,\frac{\partial f}{\partial x}$, on en déduit $\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial x}$. On obtient ainsi

$$f' = \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{i}\,\frac{\partial f}{\partial y}\,.$$

3) On dira qu'une fonction F est une **primitive** d'une fonction $u \in \mathcal{C}^0(\Omega)$ si $F \in \mathcal{H}(\Omega)$ et $F' = u$; autrement dit, si $F \in \mathcal{C}^1(\Omega)$ et $dF = u\,dz$. Par définition, cela signifie que F est une primitive de la 1-forme $u\,dz$.

3.1.3. Exemples fondamentaux

a. Séries entières

Dans cette section, on rappelle quelques propriétés élémentaires des séries entières, et on montre que la somme d'une série entière est holomorphe dans son disque de convergence.

Lemme 3.1.10. (Lemme d'Abel.)
Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de nombres complexes. Si la suite $(a_n r^n)$ est bornée pour un certain $r > 0$, alors la série $\sum a_n z^n$ converge normalement sur tout disque $\overline{D}(0,s)$, $s < r$.

Preuve. Il suffit d'écrire $a_n z^n = (a_n r^n) \times (\frac{z}{r})^n$ et d'observer que la série géométrique $\sum(\frac{s}{r})^n$ est convergente si $s < r$.

Il découle du lemme d'Abel que si on pose

$$R = \sup\,\{r \geqslant 0;\ \text{la suite } (a_n r^n) \text{ est bornée}\}\ ,$$

alors la série $\sum a_n z^n$ converge normalement sur tout compact du disque ouvert $D(0,R)$. Comme cette série diverge pour tout z vérifiant $|z| > R$ (son terme général n'est pas borné), on a donc également

$$R = \sup\,\Big\{r \geqslant 0;\ \text{la série } \sum a_n r^n \text{converge}\Big\}\ .$$

Le nombre R s'appelle le **rayon de convergence** de la série entière $\sum a_n z^n$.

Lemme 3.1.11. (Formule d'Hadamard.) *Le rayon de convergence* R *d'une série entière $\sum a_n z^n$ est donné par la formule*

$$\frac{1}{R} = \overline{\lim_{n\to\infty}}\,|a_n|^{1/n}\ .$$

Preuve. Si $r < 1/\overline{\lim}\,|a_n|^{1/n}$, alors $|a_n|r^n < 1$ à partir d'un certain rang, donc la suite $(a_n r^n)$ est bornée; et si $r > 1/\overline{\lim}\,|a_n|^{1/n}$, alors $|a_n|r^n > 1$ pour une infinité d'entiers n, donc la série $\sum a_n r^n$ diverge.

Corollaire 3.1.12. *Une série entière et sa série dérivée ont le même rayon de convergence.*

Preuve. Si $S = \sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$, sa série dérivée est $S' = \sum_{n\geqslant 1} n a_n z^{n-1}$. Comme on a $\lim_{n\to\infty} n^{1/n-1} = 1$ et $\overline{\lim}\,|a_n|^{1/n-1} = \overline{\lim}\,|a_n|^{1/n}$, il suffit donc d'appliquer la formule d'Hadamard.

Proposition 3.1.13. *Si $f(z) = \sum_0^\infty a_n z^n$ est la somme d'une série entière de rayon de convergence $R > 0$, alors f est infiniment $\mathbb{C}$-dérivable dans le disque ouvert $D(0,R)$, et ses dérivées s'obtiennent en dérivant terme à terme.*

Preuve. On vient de voir qu'une série entière et sa série dérivée ont le même rayon de convergence. Par conséquent, si on pose $S_N(z) = \sum_0^N a_n z^n$, alors la suite (S'_N) converge uniformément sur les compacts de $D(0,R)$ vers la fonction f_1 définie par $f_1(z) = \sum_1^\infty n a_n z^{n-1}$. D'après le théorème usuel sur les suites de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ (rappelé au début des prérequis), on en déduit que f est de classe $\mathcal{C}^1$ et $df = f_1 dz$; autrement dit, f est holomorphe et $f' = f_1$. On conclut par récurrence.

On dit qu'une fonction $f : \Omega \to \mathbb{C}$ est **$\mathbb{C}$-analytique** si elle est développable en série entière de la variable z au voisinage de chaque point, autrement dit si pour tout point $z_0 \in \Omega$, il existe une suite de coefficients (c_n) (dépendant bien sûr de z_0) et un nombre $r > 0$ tels que pour $z \in D(z_0, r)$, on puisse écrire

$$f(z) = \sum_0^\infty c_n\,(z - z_0)^n\ .$$

Cette définition posée, la proposition précédente entraîne immédiatement le

Corollaire 3.1.14. *Toute fonction $\mathbb{C}$-analytique est holomorphe.*

b. Transformée de Cauchy d'une mesure de Radon

Dans cette section, K est un compact de $\mathbb{C}$. On désigne par $\mathcal{C}(K)$ l'espace des fonctions continues sur K à valeurs complexes. Pour $z \in \mathbb{C}\backslash K$, on notera $\frac{1}{\zeta - z}$ la fonction de $\mathcal{C}(K)$ qui à $\zeta \in K$ associe... $\frac{1}{\zeta - z}$.

Rappelons qu'une *mesure de Radon* sur K est une forme linéaire continue sur $\mathcal{C}(K)$, et qu'on note $\langle \mu, \varphi \rangle$ le résultat de l'action d'une mesure

de Radon μ sur une fonction φ. Si μ est une mesure de Radon sur K, on définit une fonction $\hat{\mu} : \mathbb{C}\backslash K \to \mathbb{C}$ en posant

$$\hat{\mu}(z) = -\frac{1}{\pi}\left\langle \mu, \frac{1}{\zeta - z}\right\rangle .$$

La fonction $\hat{\mu}$ s'appelle la **transformée de Cauchy** de la mesure de Radon μ. Le facteur $-\frac{1}{\pi}$ est présent uniquement pour des raisons de normalisation qui apparaîtront clairement à la section 3.7.

Proposition 3.1.15. *Si μ est une mesure de radon sur* K, *alors sa transformée de Cauchy $\hat{\mu}$ est infiniment $\mathbb{C}$-dérivable sur $\Omega = \mathbb{C}\backslash K$, et on a $\hat{\mu}^{(n)}(z) \equiv -\frac{n!}{\pi}\left\langle \mu, \frac{1}{(\zeta - z)^{n+1}}\right\rangle$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

Preuve. Soit μ une mesure de Radon sur K, et notons encore μ la mesure borélienne complexe associée à μ par le théorème de représentation de Riesz ; ainsi, $\hat{\mu}(z)$ s'écrit maintenant

$$\hat{\mu}(z) = -\frac{1}{\pi}\int_K \frac{d\mu(\zeta)}{\zeta - z} .$$

Pour $(z, \zeta) \in \Omega \times K$, posons $F(z, \zeta) = \frac{1}{\zeta - z}$. La fonction F est continue, holomorphe par rapport à z, et $\frac{\partial F}{\partial z}(z, \zeta) \equiv \frac{1}{(\zeta - z)^2}$. Si L est un compact de Ω, on peut trouver une constante C_L tels que $|\frac{\partial F}{\partial z}(z, \zeta)| \leqslant C_L$ sur $L \times K$: il suffit de poser $C_L = 1/\delta^2$, où δ est la distance de L à K, qui est strictement positive par compacité de L. On a alors $|\frac{\partial F}{\partial x}(z, \zeta)| \leqslant C_L$ et $|\frac{\partial F}{\partial y}(z, \zeta)| \leqslant C_L$ sur $L \times K$, car $\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial z} = \frac{1}{i}\frac{\partial F}{\partial y}$. Comme on intègre par rapport à une mesure bornée, il découle donc du théorème usuel de dérivation pour les intégrales à paramètres (énoncé dans les prérequis) que $\hat{\mu}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω et que ses dérivées partielles s'obtiennent en dérivant sous le signe intégral. On a ainsi $\frac{\partial \hat{\mu}}{\partial \bar{z}}(z) \equiv -\frac{1}{\pi}\int \frac{\partial F}{\partial \bar{z}}(z, \zeta)\, d\mu(\zeta) = 0$, ce qui prouve que $\hat{\mu}$ est holomorphe (donc $\mathbb{C}$-dérivable), et $\hat{\mu}'(z) = \frac{\partial \hat{\mu}}{\partial z}(z) \equiv -\frac{1}{\pi}\int \frac{d\mu(\zeta)}{(\zeta - z)^2}$. En répétant ce raisonnement, on conclut par récurrence.

Autre preuve. La démonstration qui suit est plus « élémentaire », car elle n'utilise pas le théorème de représentation de Riesz.

Soit μ une mesure de Radon sur K. Pour $k \in \mathbb{N}^*$ et $z \in \Omega$, posons $f_k(z) = \left\langle \mu, \frac{1}{(\zeta - z)^k}\right\rangle$. Il suffit de montrer que les f_k sont $\mathbb{C}$-dérivables sur Ω et qu'on a $f_k' = k f_{k+1}$ pour tout k.

Fixons $z_0 \in \Omega$ et $k \in \mathbb{N}^*$. Pour $z \in \Omega$, notons φ_z la fonction $\frac{1}{(\zeta - z)^k}$. Si $z \neq z_0$, on a

$$\frac{f_k(z) - f_k(z_0)}{z - z_0} = \left\langle \mu, \frac{\varphi_z - \varphi_{z_0}}{z - z_0}\right\rangle .$$

En réduisant φ_z et φ_{z_0} au même dénominateur, on obtient

$$\frac{\varphi_z(\zeta) - \varphi_{z_0}(\zeta)}{z - z_0} = \frac{\sum_0^{k-1} (\zeta - z_0)^j (\zeta - z)^{k-1-j}}{(\zeta - z)^k (\zeta - z_0)^k} .$$

Quand z tend vers z_0, le numérateur du second membre tend vers $k(\zeta - z_0)^{k-1}$ uniformément par rapport à $\zeta \in \mathrm{K}$ car chaque terme de la somme tend vers $(\zeta - z_0)^{k-1}$; et le dénominateur tend vers $(\zeta - z_0)^{2k}$ uniformément, en restant uniformément minoré en module. Par conséquent, $\frac{\varphi_z - \varphi_{z_0}}{z - z_0}$ converge dans $\mathcal{C}(\mathrm{K})$ vers la fonction $\frac{k}{(\zeta - z_0)^{k+1}}$. Puisque μ est une forme linéaire continue sur $\mathcal{C}(\mathrm{K})$, on en déduit

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f_k(z) - f_k(z_0)}{z - z_0} = k \left\langle \mu , \frac{1}{(\zeta - z)^{k+1}} \right\rangle = k f_{k+1}(z_0)$$

pour tout point $z_0 \in \Omega$. Ainsi, f_k est $\mathbb{C}$-dérivable sur Ω et $f_k' = k f_{k+1}$.

Corollaire 3.1.16. *Soit γ un chemin de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux dans $\mathbb{C}$, d'image Γ. Si u est une fonction continue sur Γ, alors la fonction f définie par $f(z) = \int_\gamma \frac{u(\zeta)}{\zeta - z} \, d\zeta$ est infiniment $\mathbb{C}$-dérivable sur $\mathbb{C} \backslash \Gamma$, et ses dérivées s'obtiennent en dérivant sous le signe intégral.*

Preuve. On applique la proposition à la mesure $\mu = u \, (dz)_\gamma$, définie par $\langle \mu , \varphi \rangle = \int_\gamma u(\zeta) \varphi(\zeta) \, d\zeta$.

3.2. Fonctions usuelles

Cette section est consacrée aux fonctions dites « usuelles » : exponentielle, logarithme, argument, fonctions trigonométriques, fonctions puissances. Vu sa très grande importance, on a assez longuement insisté sur la fonction exponentielle, en détaillant en particulier plusieurs définitions possibles.

3.2.1. Exponentielle

a. Exponentielle complexe

En supposant connues la fonction exponentielle réelle et les fonctions trigonométriques réelles sinus et cosinus, l'**exponentielle** d'un nombre $z \in \mathbb{C}$ est définie par la formule

$$e^z = e^x \left(\cos y + i \sin y \right) ,$$

où $x = \mathrm{Re}(z)$ et $y = \mathrm{Im}(z)$.

Proposition 3.2.1. *On a $e^z \neq 0$ pour tout $z \in \mathbb{C}$, et l'exponentielle définit un homomorphisme de $(\mathbb{C}, +)$ dans $(\mathbb{C}^*, \times)$. De plus, cet homomorphisme est surjectif, de noyau $2i\pi\mathbb{Z}$.*

Preuve. Par définition, on a $e^0 = 1$ et $|e^z| = e^{\mathrm{Re}(z)} \neq 0$ pour tout z. De plus, les formules trigonométriques usuelles montrent que si $y, y' \in \mathbb{R}$, alors $e^{i(y+y')} = e^{iy}e^{iy'}$, et on en déduit $e^{z+z'} = e^z e^{z'}$ pour tous $z, z' \in \mathbb{C}$. L'exponentielle définit donc un homomorphisme de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}^*$. La surjectivité découle directement de la définition puisque tout nombre complexe non nul peut s'écrire sous forme « polaire »

$$z = r\,(\cos\theta + i\sin\theta) = e^{\ln r + i\theta}\,,$$

avec $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Enfin, comme $|e^z| = e^{\mathrm{Re}(z)}$ et $\mathrm{Re}(e^z) = |e^z|\cos(\mathrm{Im}(z))$, on a $e^z = 1$ si et seulement si $\mathrm{Re}(z) = 0$ et $\cos(\mathrm{Im}(z)) = 1$, autrement dit $z \in 2i\pi\mathbb{Z}$.

Proposition 3.2.2. *La fonction exponentielle est holomorphe sur $\mathbb{C}$, et $(e^z)' = e^z$.*

Preuve. La définition montre que la fonction exponentielle $\mathbf{e} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$. D'autre part, on a $\frac{\partial \mathbf{e}}{\partial x}(x, y) = e^{x+iy} = \mathbf{e}(x, y)$ et $\frac{\partial \mathbf{e}}{\partial y}(x, y) = e^x(-\sin y + i\cos y) = i\,\mathbf{e}(x, y)$. Par conséquent, $\mathbf{e}$ vérifie l'équation de Cauchy-Riemann et $\frac{\partial \mathbf{e}}{\partial z} = \mathbf{e}$.

Corollaire 3.2.3. *La fonction exponentielle est un difféomorphisme local en tout point.*

Preuve. Sa différentielle est inversible en tout point.

Proposition 3.2.4. *On a $e^z \equiv \sum_0^\infty \frac{z^n}{n!}$, où la série converge normalement sur tout compact de $\mathbb{C}$.*

Preuve. On vérifie sans peine que la série $\sum \frac{z^n}{n!}$ converge normalement sur tout compact.

D'après la proposition précédente, on a $(e^z)^{(n)} = e^z$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. D'après la formule de Taylor, on peut donc écrire $e^z = \sum_0^{\mathrm{N}} \frac{z^n}{n!} + \mathrm{R_N}(z)$ pour tout entier $\mathrm{N} \geqslant 0$, où $\mathrm{R_N}(z) = z^{\mathrm{N}+1} \int_0^1 \frac{(1-t)^{\mathrm{N}}}{\mathrm{N}!} e^{tz} dt$. On a $|\mathrm{R_N}(z)| \leqslant |z|^{\mathrm{N}+1} e^{|z|} \int_0^1 \frac{(1-t)^{\mathrm{N}}}{\mathrm{N}!}\, dt = \frac{|z|^{\mathrm{N}+1} e^{|z|}}{(\mathrm{N}+1)!}$, donc $\mathrm{R_N}(z)$ tend vers 0 quand N tend vers l'infini.

b. Remarques sur la définition

La définition de l'exponentielle adoptée plus haut a l'avantage d'être directement reliée à la représentation géométrique des nombres complexes.

Il y a cependant des difficultés cachées : outre le fait qu'elle suppose connue l'exponentielle réelle (définie par exemple comme réciproque du logarithme), cette présentation repose sur les fonctions trigonométriques réelles sin et cos, qui ne sont pas des fonctions totalement élémentaires. De fait, la définition « rigoureuse » la plus courante des fonctions sin et cos repose sur... l'exponentielle complexe, définie comme somme de la série entière $\sum \frac{z^n}{n!}$.

Voici une manière de définir les fonctions trigonométriques sans cercle vicieux.

On commence par définir la fonction arctan par la formule

$$\arctan x = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} \cdot$$

Cette fonction est de classe $\mathcal{C}^\infty$, et elle définit un homéomorphisme de $\mathbb{R}$ sur un certain intervalle $]-\mathrm{A};\mathrm{A}[$, le nombre A étant baptisé $\frac{\pi}{2}$.

On appelle tan la réciproque de arctan, et on définit sin et cos sur $]0;\pi/2[$ à l'aide de tan : $\cos\theta$ et $\sin\theta$ sont les coordonnées du point d'intersection de la demi-droite « positive » d'équation $y{=}(\tan\theta)\,x$ avec le cercle unité, ce qui se traduit par les formules

$$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{1+\tan^2\theta}} \\ \sin\theta = \dfrac{\tan\theta}{\sqrt{1+\tan^2\theta}} \end{cases}$$

Par définition, les fonctions cos et sin sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0;\pi/2[$, et on vérifie qu'on a $\cos' = -\sin$ et $\sin' = \cos$. On prolonge enfin sin et cos à $\mathbb{R}$ tout entier en imposant les identités $\cos(\theta+\pi) = -\cos\theta$ et $\sin(\theta+\pi) = -\sin\theta$. On vérifie que sin et cos ainsi prolongées sont de classe $\mathcal{C}^\infty$, et qu'on a encore $\cos' = -\sin$ et $\sin' = \cos$.

Les fonctions sin et cos sont donc solutions de l'équation différentielle $y'' + y = 0$, ce qui permet d'établir les formules trigonométriques usuelles. Par exemple, pour $a \in \mathbb{R}$ fixé, les fonctions $b \mapsto \cos(a+b)$ et $b \mapsto \cos a \cos b - \sin a \sin b$ sont toutes les deux solutions de cette équation différentielle avec les mêmes « conditions initiales », d'où la formule pour $\cos(a+b)$.

Voici une deuxième manière de procéder.

On commence par baptiser 2π la longueur du cercle unité ; comme le demi-cercle supérieur se paramètre par le chemin $t \mapsto \gamma(t) = (t, \sqrt{1-t^2})$, $t \in [-1;1]$, on a donc, d'après le corollaire 1.5.3 :

$$\pi = \int_{-1}^{1} |\gamma'(t)|\, dt = \int_{-1}^{1} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \cdot$$

Si M est un point du demi-cercle supérieur, on note $l(\mathrm{M})$ la longueur de l'arc de ce demi-cercle joignant le point $(1,0)$ à M. En notant x l'abscisse de M, on a ainsi $l(\mathrm{M}) = \int_x^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$, ce qui permet de voir immédiatement que l'application l est un homéomorphisme du demi-cercle supérieur sur $[0;\pi]$. Pour $\theta \in [0;\pi]$, on note alors $\cos\theta$ et $\sin\theta$ l'abscisse et l'ordonnée du point $l^{-1}(\theta)$, c'est-à-dire du point M sur le demi-cercle supérieur tel que la longueur de l'arc joignant $(1,0)$ à M soit égale à θ. Par définition, la fonction cos est donc la réciproque de la fonction $x \mapsto \int_x^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$, ce qui montre que cos est de classe $\mathcal{C}^1$, avec $\cos'(\theta) \equiv -\sqrt{1-\cos^2\theta} \equiv -\sin\theta$. De même, sin est de classe $\mathcal{C}^1$ et $\sin' = \cos$. On conclut comme plus haut.

Pour terminer, détaillons brièvement les différentes étapes de la présentation lorsqu'on définit l'exponentielle comme somme de la série entière $\sum \frac{z^n}{n!}$.

L'identité $e^{a+b} = e^a e^b$ s'obtient par un calcul direct grâce au théorème usuel sur le produit de deux séries absolument convergentes. L'application exponentielle $\exp : (\mathbb{C}, +) \to (\mathbb{C}^*, \times)$ est donc un homomorphisme de groupes. L'holomorphie de l'exponentielle vient de la proposition 3.1.13, et l'identité $(e^z)' = e^z$ s'obtient en dérivant terme à terme.

Le point délicat est la preuve de la surjectivité de exp. On peut par exemple raisonner comme suit : $\mathrm{G} = \exp(\mathbb{C})$ est un ouvert de $\mathbb{C}^*$ car l'exponentielle est un difféomorphisme local en tout point ; d'autre part, G est un sous-groupe de $\mathbb{C}^*$, ce qui permet d'écrire $\mathbb{C}^* \backslash \mathrm{G} = \bigcup_{a \in \mathbb{C}^* \backslash \mathrm{G}} a\mathrm{G}$ et d'en déduire que $\mathbb{C}^* \backslash \mathrm{G}$ est également un ouvert de $\mathbb{C}^*$; au total, on a $\mathrm{G} = \mathbb{C}^*$ par connexité de $\mathbb{C}^*$. Le même raisonnement fournira un résultat analogue au chapitre 6, dans un cadre beaucoup plus général.

Comme la série entière définissant e^z est à coefficients réels, on a $e^{\bar{z}} = \overline{e^z}$ pour tout $z \in \mathbb{C}$. On en déduit $|e^z| = e^{\mathrm{Re}(z)}$, ce qui prouve qu'on a $|e^z| = 1$ si et seulement si z est imaginaire pur. Par conséquent, le noyau de l'homomorphisme exp : $\mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$ est un sous-groupe de $i\mathbb{R}$, qui est fermé car exp est continu. Comme exp est surjectif, on a $\mathrm{Ker}(\exp) \neq i\mathbb{R}$ (si e^{iy} valait 1 pour tout $y \in \mathbb{R}$, alors e^z serait réel pour tout z). D'autre part, si $\lambda \in \mathbb{C}$ vérifie $e^\lambda = -1$, alors $e^{2\lambda} = 1$, ce qui prouve que $\mathrm{Ker}(\exp)$ n'est pas réduit à $\{0\}$. D'après un résultat bien

connu sur les sous-groupes de $\mathbb{R}$, on peut conclure que Ker(exp) est de la forme $ia\mathbb{Z}$, pour un certain $a > 0$. On baptise alors π le nombre $a/2$.

On définit enfin les fonctions trigonométriques en posant $\cos\theta = \mathrm{Re}\,(e^{i\theta})$, $\sin\theta = \mathrm{Im}\,(e^{i\theta})$, ce qui conduit à l'identité

$$e^{x+iy} = e^x\,(\cos x + i\sin y)\,.$$

c. Exponentielle d'un élément d'une algèbre de Banach

Soit A est une algèbre de Banach avec unité **1**. Si $a \in$ A, les inégalités $\|a^n\| \leqslant \|a\|^n$ montrent que la série $\sum \frac{a^n}{n!}$ est absolument convergente, donc convergente dans A. On pose

$$e^a = \sum_0^\infty \frac{a^n}{n!}\,,$$

et on dit que e^a est **l'exponentielle** de a.

On vérifie par un calcul direct analogue à celui du cas scalaire que *si* $a\,, b \in$ A commutent, alors

$$e^{a+b} = e^a e^b\,.$$

De façon précise, on commence par montrer que si $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont deux séries absolument convergentes à termes dans A, alors on peut écrire $(\sum_0^\infty a_n)(\sum_0^\infty b_n) = \sum_0^\infty c_n$, où $c_n = \sum_0^n a_k b_{n-k}$; puis on applique ce résultat avec $a_n = \frac{a^n}{n!}$ et $b_n = \frac{b^n}{n!}$: si a et b commutent, on a $c_n = \frac{(a+b)^n}{n!}$.

Comme $e^0 = \mathbf{1}$, on en déduit que e^a est toujours inversible, avec $(e^a)^{-1} = e^{-a}$.

Enfin, l'application $a \mapsto e^a$ est continue car la série $\sum \frac{a^n}{n!}$ converge normalement sur toute partie bornée de A.

3.2.2. Fonctions trigonométriques

À partir de l'exponentielle, on peut définir les fonctions trigonométriques complexes sinus, cosinus et tangente par les formules

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\,,\quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}\,,\quad \tan z = \frac{\sin z}{\cos z}\,.$$

Les fonctions sinus et cosinus sont holomorphes sur $\mathbb{C}$, le sinus s'annule exactement aux multiples de π, et le cosinus s'annule exactement aux multiples impairs de $\frac{\pi}{2}$. La fonction tangente est donc holomorphe sur $\mathbb{C}\backslash(2\mathbb{Z}+1)\frac{\pi}{2}$.

À l'aide de l'identité $e^{a+b} = e^a e^b$, on vérifie sans difficulté que les formules trigonométriques usuelles sont toutes valables dans le cas complexe. Comme on a $\cos iy = \mathrm{ch}\,y$ et $\sin iy = i\,\mathrm{sh}\,y$ si $y \in \mathbb{R}$, on en déduit

en particulier que si $z = x + iy$, avec $x, y \in \mathbb{R}$, alors

$$\begin{cases} \cos z = \cos x \operatorname{ch} y - i \sin x \operatorname{sh} y \\ \sin z = \sin x \operatorname{ch} y + i \cos x \operatorname{sh} y \end{cases}$$

Enfin, mentionnons les identités suivantes, dont la vérification est laissée en exercice : pour $z = x + iy$, où $x, y \in \mathbb{R}$, on a

$$|\cos z|^2 = \cos^2 x + \operatorname{sh}^2 y \quad , \quad |\sin z|^2 = \sin^2 x + \operatorname{sh}^2 y \, .$$

3.2.3. Logarithmes et arguments

Définition 3.2.5. *Si $z \in \mathbb{C}^*$, on dit qu'un nombre complexe w est un* **logarithme** *de z si $e^w = z$, et qu'un nombre $\theta \in \mathbb{R}$ est un* **argument** *de z si on a $z = |z| e^{i\theta}$.*

D'après la proposition 3.2.1, tout nombre complexe $z \in \mathbb{C}^*$ admet une infinité de logarithmes et d'arguments. Deux logarithmes de z diffèrent d'un multiple entier de $2i\pi$, et deux arguments de z diffèrent d'un multiple entier de 2π. D'autre part, logarithmes et arguments se correspondent de manière très simple : si θ est un argument de z, alors $\ln(|z|) + i\theta$ est un logarithme de z ; et si w est un logarithme de z, alors on a $\operatorname{Re}(w) = \ln(|z|)$, et le nombre $\theta = \operatorname{Im}(w)$ est un argument de z.

Si X est une partie de $\mathbb{C}^*$, on appellera **détermination du logarithme sur** X toute fonction $g : X \to \mathbb{C}$ vérifiant $e^{g(z)} = z$ pour tout $z \in \mathbb{C}$; on définit de même les **déterminations de l'argument**.

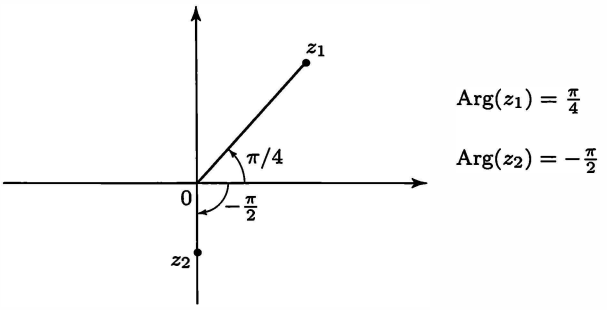


FIG. 19.

Définition 3.2.6. *Les* **déterminations principales du logarithme et de l'argument** *sont les fonctions* Log *et* Arg *définies sur $\mathbb{C}^*$ de la façon suivante :* $\operatorname{Arg}(z)$ *est l'unique argument de z appartenant à l'intervalle* $]-\pi;\pi]$, *et* $\operatorname{Log}(z) = \ln(|z|) + i \operatorname{Arg}(z)$.

Si $z = re^{i\theta}$, avec $r > 0$ et $\theta \in]-\pi;\pi]$, on a donc

$$\operatorname{Log}(z) = \operatorname{Log}(re^{i\theta}) = \ln(r) + i\theta.$$

Remarques. 1) La restriction de Log à $]0;+\infty[$ est la fonction logarithme habituelle ; pour $x > 0$, on écrira donc désormais $\log(x)$ au lieu de $\ln(x)$.

2) L'identité $\mathrm{Log}(ab) = \mathrm{Log}(a)+\mathrm{Log}(b)$ n'est pas valable dans $\mathbb{C}^*$ tout entier (elle est vraie seulement modulo $2i\pi$). Cependant, si $|\mathrm{Arg}(a)|$ et $|\mathrm{Arg}(b)|$ sont strictement inférieurs à $\pi/2$, alors on a bien $\mathrm{Log}(ab) = \mathrm{Log}(a)+\mathrm{Log}(b)$: en effet, dans ce cas, $\mathrm{Arg}(a)+\mathrm{Arg}(b) \in]-\pi;\pi[$, donc $\mathrm{Arg}(a)+\mathrm{Arg}(b) = \mathrm{Arg}(ab)$ puisque $\mathrm{Arg}(a)+\mathrm{Arg}(b)$ est un argument de ab.

Les fonctions Arg et Log ne sont pas continues sur $\mathbb{C}^*$. Plus précisément, pour tout $r > 0$, la restriction de Arg au cercle $\{|z| = r\}$ est discontinue au point $-r$, et il en est donc de même pour Log. En effet, $\mathrm{Arg}(z)$ tend vers π quand z tend vers $-r$ en restant sur le demi-cercle supérieur, et $\mathrm{Arg}(z)$ tend vers $-\pi$ quand z tend vers $-r$ en restant sur le demi-cercle inférieur. Ce phénomène n'est pas lié à la définition particulière de Arg et Log : il se trouve qu'il n'existe *aucune* détermination continue du logarithme sur $\mathbb{C}^*$, comme le montre le lemme suivant.

Lemme 3.2.7. *Il n'existe pas de détermination continue du logarithme sur le cercle unité* $\mathbb{T}$.

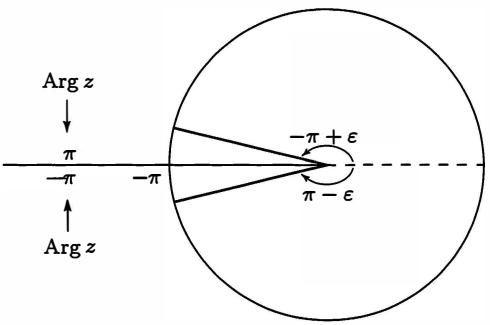


FIG. 20.

Preuve. Si g est une détermination du logarithme sur $\mathbb{T}$, alors $\exp(g(e^{i\theta})) = e^{i\theta}$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, donc $g(e^{i\theta}) = i\theta + 2i\pi k(\theta)$ pour un certain entier $k(\theta)$. Si g était continue, la fonction k serait continue sur $\mathbb{R}$, et serait donc constante par connexité de $\mathbb{R}$. On aurait ainsi $g(e^{i\theta}) \equiv i\theta + 2ik\pi$ pour un certain entier k, et on obtiendrait alors à la fois $g(1) = g(e^{i0}) = 2ik\pi$ et $g(1) = g(e^{2i\pi}) = 2i\pi + 2ik\pi$, d'où une contradiction.

On peut cependant montrer que Arg et Log sont extrêmement régulières sur un domaine un peu plus petit que $\mathbb{C}^*$.

Proposition 3.2.8. *La fonction* Arg *est de classe* C^∞ *sur* $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}^-$. *La fonction* Log *est holomorphe sur* $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}^-$, *et* $\mathrm{Log}'(z) \equiv 1/z$.

Preuve. Si $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}^-$, écrivons $z = x + iy = re^{i\theta}$, où $x, y \in \mathbb{R}$ et $\theta = \mathrm{Arg}(z) \in]-\pi;\pi[$. Soit p le point d'intersection du cercle $\{|z| = r\}$ avec $\mathbb{R}^-$. D'après le théorème de l'angle au centre et de l'angle inscrit, la mesure de l'angle orienté (pO, pz) est égale à $\theta/2$. On a donc $\tan(\theta/2) = y/(r+x)$, et comme $\theta/2 \in]-\pi/2;\pi/2[$, on en déduit

$$\theta = \mathrm{Arg}(z) = 2\arctan\left(\frac{y}{x + \sqrt{x^2+y^2}}\right) .$$

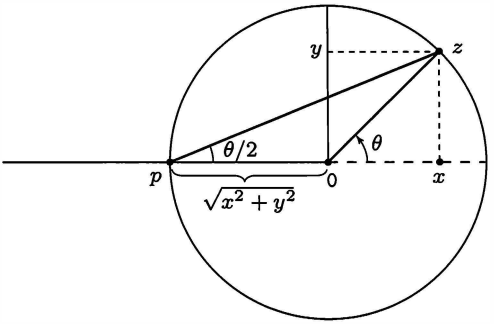


FIG. 21.

Cela prouve que Arg est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}^-$, et il en va donc de même pour Log.

En différentiant la relation $e^{\mathrm{Log}(z)} = z$, on obtient $e^{\mathrm{Log}}\, d(\mathrm{Log}) = dz$, ou encore $d(\mathrm{Log}) = dz/z$. Cela montre que Log est holomorphe dans $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}^-$, avec $\mathrm{Log}'(z) \equiv 1/z$.

Autre preuve. Pour montrer que Log (et donc Arg) est $\mathcal{C}^\infty$, on peut également procéder comme suit : la fonction exponentielle est de classe $\mathcal{C}^\infty$, et sa restriction à $\mathrm{U} = \{w \in \mathbb{C};\ |\mathrm{Im}(w)| < \pi\}$ est une bijection de U sur $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}^-$, dont la réciproque est précisément la fonction Log. Comme par ailleurs l'exponentielle est un difféomorphisme local en tout point, Log est donc $\mathcal{C}^\infty$.

Corollaire 3.2.9. *Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, et soit L_α la demi-droite $\{te^{i\alpha};\ t \in \mathbb{R}^+\}$. Pour $z \in \mathbb{C}\backslash\mathrm{L}_\alpha$, notons $\mathrm{Arg}_\alpha(z)$ l'unique argument de z appartenant à l'intervalle $]\alpha\,;\,2\pi+\alpha[$, et posons*

$$\mathrm{Log}_\alpha(z) = \log|z| + i\,\mathrm{Arg}_\alpha(z) .$$

Alors Arg_α est une détermination $\mathcal{C}^\infty$ de l'argument dans $\mathbb{C}\backslash\mathrm{L}_\alpha$, et Log_α est une détermination holomorphe du logarithme dans $\mathbb{C}\backslash\mathrm{L}_\alpha$.

Par rotation, la preuve est immédiate.

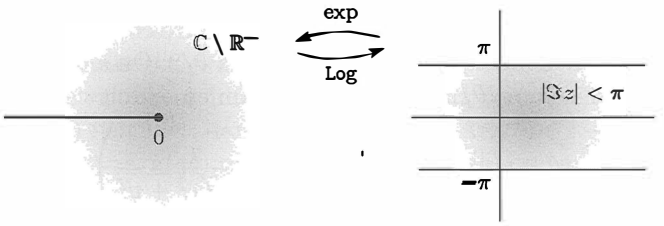


FIG. 22.

Proposition 3.2.10. *Dans le disque unité* $\mathbb{D} = \mathrm{D}(0,1)$, *on a*

$$\mathrm{Log}(1-h) \equiv -\sum_1^\infty \frac{h^n}{n},$$

où la série converge normalement sur tout compact.

Preuve. D'après la formule de Taylor, on a $\mathrm{Log}(1-h) = -\int_0^1 \frac{h}{1-th}\,dt$ pour tout $h \in \mathbb{D}$. Il suffit donc d'intégrer terme à terme la formule $\frac{1}{1-th} = \sum_0^\infty t^n h^n$, ce qui est possible car la série converge normalement sur $[0\,;1]$.

3.2.4. Racines k-ièmes, puissances

Si k est un entier supérieur à 1, on appelle **racine k-ième** d'un nombre $z \in \mathbb{C}^*$ tout nombre complexe ξ vérifiant $\xi^k = z$.

Si w est un logarithme de $z \in \mathbb{C}^*$ et si $k \in \mathbb{N}^*$, alors $e^{w/k}$ est une racine k-ième de z. En particulier tout nombre complexe non nul admet au moins une racine k-ième.

Les racines k-ièmes de 1 sont les k nombres $e^{2i\pi j/k}$, $0 \leqslant j \leqslant k-1$. En effet, elles sont nécessairement de module 1, et en les cherchant sous la forme $\xi = e^{i\theta}$, on trouve $k\theta \in 2\pi\mathbb{Z}$. Les racines k-ièmes de 1 sont donc de la forme $e^{2i\pi j/k}$, $j \in \mathbb{Z}$, d'où le résultat par périodicité de l'exponentielle.

On en déduit que tout nombre $z \in \mathbb{C}^*$ admet exactement k racines k-ièmes distinctes, données par les formules $\xi_j = \xi_0 e^{2i\pi j/k}$, où ξ_0 est une racine k-ième quelconque de z et $j \in \{0\,;\ldots\,;k-1\}$.

On appellera **détermination de** $z^{1/k}$ sur un ensemble $\mathrm{X} \subset \mathbb{C}^*$ toute application $g : \mathrm{X} \to \mathbb{C}$ vérifiant $g(z)^k \equiv z$. Comme pour le logarithme, il n'est pas difficile de montrer qu'il n'existe pas de détermination continue

de $z^{1/k}$ sur $\mathbb{C}^*$ dès que $k \geqslant 2$; mais si $\alpha \in \mathbb{R}$ et si on note L_α la demi-droite $\mathbb{R}^+ e^{i\alpha}$, alors on définit une détermination holomorphe de $z^{1/k}$ sur $\mathbb{C}\backslash\mathrm{L}_\alpha$ en posant

$$z^{1/k} = e^{\mathrm{Log}_\alpha(z)/k} .$$

On en déduit qu'il existe exactement k déterminations holomorphes de $z^{1/k}$ sur $\mathbb{C}\backslash\mathrm{L}_\alpha$.

Si λ est un nombre complexe quelconque, on définit de même une fonction holomorphe $z \mapsto z^\lambda$ sur $\mathbb{C}\backslash\mathrm{L}_\alpha$ en posant

$$z^\lambda = e^{\lambda\,\mathrm{Log}_\alpha(z)} .$$

Autrement dit, si $z = re^{i\theta}$, avec $r > 0$ et $\theta \in]\,\alpha\,;\,2\pi + \alpha\,[$, alors

$$z^\lambda = r^\lambda\, e^{i\lambda\theta} .$$

En particulier, si $\lambda \in \mathbb{R}$, alors

$$\left|z^\lambda\right| = |z|^\lambda ,$$

et si $\alpha = -\pi$ (donc $\mathrm{L}_\alpha = \mathbb{R}^-$) alors

$$\left|x^\lambda\right| = x^{\mathrm{Re}(\lambda)}$$

pour tout $x \in]0\,;+\infty[$.

3.3. Théorème de Cauchy, formule de Cauchy

3.3.1. Théorème de Cauchy

Si $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, alors $d(f\,dz) = 0$. En appliquant la formule de Stokes avec $\omega = f\,dz$, on obtient donc le résultat suivant.

Théorème 3.3.1. (Théorème de Cauchy.)
Si f est une fonction holomorphe dans Ω, alors $\int_{\partial \mathrm{K}} f\,dz = 0$ pour tout compact à bord régulier $\mathrm{K} \subset \Omega$.

Corollaire 3.3.2. *Si $\mathrm{K} \subset \mathbb{C}$ est un compact à bord régulier, alors*

$$\int_{\partial \mathrm{K}} \frac{dz}{z-a} = 0 \quad \textit{pour tout point } a \in \mathbb{C}\backslash\mathrm{K} .$$

Preuve. Si $a \in \mathbb{C}\backslash\mathrm{K}$ est fixé, la fonction $z \mapsto 1/(z-a)$ est holomorphe sur $\Omega_a = \mathbb{C}\backslash\{a\}$, qui contient K.

3.3.2. Formule de Cauchy-Pompeiu

Dans cette section, on note $\frac{1}{z}$ la fonction $z \mapsto \frac{1}{z}$, définie arbitrairement en 0.

Lemme 3.3.3. *La fonction $\frac{1}{z}$ est localement intégrable sur $\mathbb{C}$.*

Preuve. Cette fonction est mesurable comme inverse d'une fonction mesurable. En intégrant en coordonnées polaires, on obtient

$$\int_{\mathrm{D}(0,\mathrm{R})} \frac{1}{|z|}\, dm(z) = \int_0^{2\pi} \int_0^{\mathrm{R}} \frac{1}{r}\, r dr d\theta = 2\pi \mathrm{R}\,,$$

donc $\int_{\mathrm{D}(0,\mathrm{R})} \frac{1}{|z|}\, dm(z) < +\infty$ pour tout $\mathrm{R} > 0$. Cela prouve que $\frac{1}{z}$ est intégrable sur tout compact.

Théorème 3.3.4. (Formule de Cauchy-Pompeiu.)

Soit K *un compact à bord régulier, et soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ au voisinage de* K. *Pour tout point $a \in \mathring{\mathrm{K}}$, la fonction $\frac{1}{z-a}\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}$ est intégrable sur* K, *et on a*

$$f(a) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\partial \mathrm{K}} \frac{f(z)}{z-a}\, dz \; - \frac{1}{\pi}\int_{\mathrm{K}} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\, \frac{dm(z)}{z-a}\,.$$

Preuve. Fixons $a \in \mathring{\mathrm{K}}$. Comme la fonction $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}$ est continue, elle est bornée sur le compact K, donc l'intégrabilité de la fonction $\frac{1}{z-a}\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}$ découle de l'intégrabilité locale de la fonction $\frac{1}{z}$.

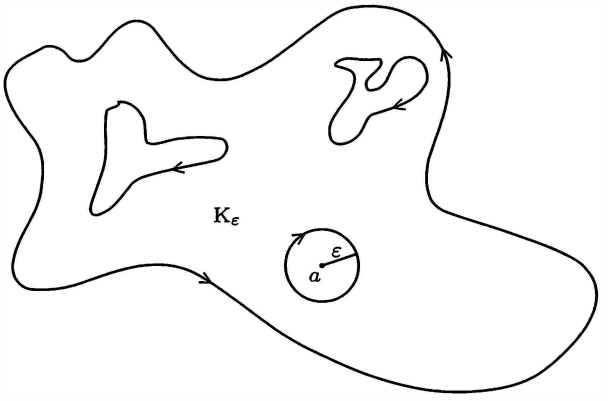


FIG. 23.

Pour $\varepsilon < d(a, \partial \mathrm{K})$, posons $\mathrm{K}_\varepsilon = \{z \in \mathrm{K};\ |z-a| > \varepsilon\}$. On va appliquer la formule de Stokes au compact à bord régulier K_ε et à la 1-forme

$$\omega = \frac{f(z)}{z-a}\, dz\,,$$

qui est de classe $\mathcal{C}^1$ au voisinage de K_ε.

En notant u la fonction $z \mapsto \frac{f(z)}{z-a}$, on a

De plus, comme la fonction $\frac{1}{z-a}$ est holomorphe au voisinage de K_ε, on a $\frac{\partial u}{\partial \overline{z}} = \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} \frac{1}{z-a}$ au voisinage de K_ε. Ainsi :

$$d\omega = 2i \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} \frac{1}{z-a} \, dx \wedge dy \ .$$

En notant D_ε le disque ouvert $D(a,\varepsilon)$, on a $\partial K_\varepsilon = \partial K \cup \partial D_\varepsilon$ et, d'après les conventions d'orientation, $\int_{\partial K_\varepsilon} = \int_{\partial K} - \int_{\partial D_\varepsilon}$. La formule de Stokes s'écrit donc

$$\int_{\partial K} \frac{f(z)}{z-a} \, dz - \int_{\partial D_\varepsilon} \frac{f(z)}{z-a} \, dz = 2i \int_{K_\varepsilon} \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} \frac{1}{z-a} \, dm \ .$$

D'autre part, on a

$$\int_{\partial D_\varepsilon} \frac{f(z)}{z-a} \, dz = i \int_0^{2\pi} \frac{f(a+\varepsilon e^{i\theta})}{\varepsilon e^{i\theta}} \, \varepsilon e^{i\theta} \, d\theta = i \int_0^{2\pi} f(a+\varepsilon e^{i\theta}) \, d\theta \ .$$

Par continuité de f, on en déduit que l'intégrale $\int_{\partial D_\varepsilon} \frac{f(z)}{z-a} dz$ tend vers $2i\pi f(a)$ quand ε tend vers 0. Enfin, l'intégrale $\int_{K_\varepsilon} \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} \frac{1}{z-a} \, dm$ tend vers $\int_K \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} \frac{1}{z-a} \, dm$, d'après le théorème de convergence dominée appliqué aux fonctions $\mathbf{1}_{K_\varepsilon} \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} \frac{1}{z-a}$. On obtient ainsi

$$\int_{\partial K} \frac{f(z)}{z-a} \, dz - 2i\pi f(a) = 2i \int_K \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} \frac{1}{z-a} \, dm \ ,$$

ce qui termine la démonstration.

Corollaire 3.3.5. *Si $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ à support compact, alors, pour tout point $a \in \mathbb{C}$, on a $\varphi(a) = -\frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{C}} \frac{\partial \varphi}{\partial \overline{z}} \frac{dm(z)}{z-a}$.*

Preuve. Si D est un disque ouvert contenant $\mathrm{supp}(\varphi) \cup \{a\}$, alors $\varphi \equiv 0$ sur ∂D, donc la formule de Cauchy-Pompeiu appliquée à $K = \overline{D}$ s'écrit

$$\varphi(a) = -\frac{1}{\pi} \int_{\overline{D}} \frac{\partial \varphi}{\partial \overline{z}} \frac{dm(z)}{z-a} \ ,$$

d'où le résultat puisque $\frac{\partial \varphi}{\partial \overline{z}} \equiv 0$ en dehors de D.

Corollaire 3.3.6. *Au sens des distributions, on a $\frac{\partial}{\partial \overline{z}} \left(\frac{1}{\pi z} \right) = \delta_0$.*

3.3.3. Formule de Cauchy et conséquences immédiates

Le résultat suivant est la clé de toute la théorie des fonctions holomorphes.

Théorème 3.3.7. (Formule de Cauchy.)
Si f est une fonction holomorphe dans Ω, alors, pour tout compact à bord régulier $K \subset \Omega$ et pour tout point $z \in \mathring{K}$, on a

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial K} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta \,.$$

Preuve. Comme $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$, cela découle directement de la formule de Cauchy-Pompeiu.

Corollaire 3.3.8. *Si $K \subset \Omega$ est un compact à bord régulier, alors*

$$\int_{\partial K} \frac{dz}{z - a} = 2i\pi \quad \textit{pour tout point } a \in \mathring{K} \,.$$

Preuve. On applique la formule de Cauchy à la fonction constante $f = 1$.

Corollaire 3.3.9. *Toute fonction holomorphe est infiniment $\mathbb{C}$-dérivable. En particulier, la dérivée d'une fonction holomorphe est encore holomorphe.*

Preuve. Si f est une fonction continue sur Ω, alors, pour tout disque fermé $\overline{D} \subset \Omega$, la fonction $z \mapsto \int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta$ est infiniment $\mathbb{C}$-dérivable sur D d'après le corollaire 3.1.16 . Il découle donc de la formule de Cauchy appliquée avec $K = \overline{D}$ que si f est holomorphe sur Ω, alors f est infiniment $\mathbb{C}$-dérivable dans tout disque ouvert D vérifiant $\overline{D} \subset \Omega$, donc infiniment $\mathbb{C}$-dérivable sur Ω.

Corollaire 3.3.10. *Si $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ et si $K \subset \Omega$ est un compact à bord régulier, alors, pour tout entier $n \geqslant 0$ et pour tout point $z \in \mathring{K}$, on a*

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2i\pi} \int_{\partial K} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\, d\zeta \,.$$

Preuve. D'après la proposition 3.1.15 appliquée à la mesure de Radon μ définie par $\langle \mu, \varphi \rangle = \int_{\partial K} \varphi(\zeta)\, d\zeta$, les dérivées successives du second membre de la formule de Cauchy s'obtiennent en dérivant sous le signe intégral.

Corollaire 3.3.11. (Formule de la moyenne.)
Si f est holomorphe au voisinage d'un disque $\overline{D}(z_0, r)$, alors, pour tout entier $n \geqslant 0$, on a

$$\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = r^{-n} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta})\, e^{-in\theta}\, \frac{d\theta}{2\pi} \,.$$

En particulier,

$$f(z_0) = \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) \frac{d\theta}{2\pi} ,$$

ce qui signifie que $f(z_0)$ est égal à la valeur moyenne de la fonction f sur le cercle $\partial \mathrm{D}$.

Preuve. On applique le corollaire précédent en prenant $\mathrm{K} = \overline{\mathrm{D}}(z_0, r)$ et $z = z_0$. Le cercle $\partial \mathrm{K}$ se paramètre par $\zeta = z_0 + re^{i\theta}$ $(0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi)$, et on obtient donc

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2i\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + re^{i\theta})}{r^{n+1} e^{i(n+1)\theta}} ire^{i\theta} d\theta ,$$

d'où le résultat.

Corollaire 3.3.12. *Si f est une fonction holomorphe au voisinage d'un disque fermé $\overline{\mathrm{D}} = \overline{\mathrm{D}}(z_0, r)$, alors*

$$f(z_0) = \frac{1}{m(\mathrm{D})} \int_{\mathrm{D}} f dm .$$

Ainsi, $f(z_0)$ est égal à la valeur moyenne de la fonction f sur tout disque centré en z_0.

Preuve. Pour tout $s < r$, on a $f(z_0) = \int_0^{2\pi} f(z_0 + se^{i\theta}) \frac{d\theta}{2\pi}$. En multipliant par s et en intégrant entre 0 et r, on obtient

$$\frac{r^2}{2} f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^r \int_0^{2\pi} f(z_0 + se^{i\theta})\, s\, ds d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathrm{D}} f dm ,$$

d'où le résultat.

Remarque 3.3.13. *La formule de Cauchy $f(z) = \int_{\partial \mathrm{D}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$ et les deux formules de la moyenne*

$$f(z_0) = \int_0^{2\pi} f(z_0 + \mathrm{R}e^{i\theta}) \frac{d\theta}{2\pi} \quad \text{et} \quad f(z_0) = \frac{1}{m(\mathrm{D})} \int_{\mathrm{D}} f\, dm$$

sont encore valables si on suppose seulement que f est continue sur un disque fermé $\overline{\mathrm{D}} = \overline{\mathrm{D}}(z_0, \mathrm{R})$ et holomorphe dans le disque ouvert $\mathrm{D} = \mathrm{D}(z_0, \mathrm{R})$.

Preuve. Si f est holomorphe dans D, alors, pour tout $r < \mathrm{R}$, la formule de Cauchy s'applique à f et au disque $\mathrm{D}_r = \mathrm{D}(z_0, r)$. Si de plus f est continue sur $\overline{\mathrm{D}}$, alors, pour tout $z \in \mathrm{D}$, l'intégrale $\int_{\partial \mathrm{D}_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$ tend vers $\int_{\partial \mathrm{D}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$ quand r tend vers R, donc la formule de Cauchy est également valable pour D. Les deux formules de la moyenne s'en déduisent comme plus haut.

3.4. Développement en série entière

On a vu que si une fonction $f : \Omega \to \mathbb{C}$ est développable en série entière au voisinage de chaque point de Ω, alors f est holomorphe dans Ω. Le théorème suivant montre que la réciproque est vraie. Ainsi, les solutions de l'équation de Cauchy-Riemann $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$ sont bien des fonctions qui « ne dépendent que de z ».

Théorème 3.4.1. *Si f est une fonction holomorphe dans un disque ouvert $\mathrm{D} = \mathrm{D}(z_0, \mathrm{R})$, alors on peut écrire*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n ,$$

où la série converge normalement sur les compacts de D.

Preuve. Par translation, on se ramène au cas où $z_0 = 0$. Fixons f holomorphe dans $\mathrm{D} = \mathrm{D}(0, \mathrm{R})$, et fixons également $r < \mathrm{R}$. Si $|z| < r$, alors d'après la formule de Cauchy, on a

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial \mathrm{D}(0,r)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \, d\zeta = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial \mathrm{D}(0,r)} \frac{f(\zeta)}{1 - (z/\zeta)} \frac{d\zeta}{\zeta} .$$

D'autre part, on peut écrire

$$\frac{1}{1 - (z/\zeta)} = \sum_{0}^{\infty} \left(\frac{z}{\zeta} \right)^n ,$$

où la série converge normalement sur $\mathrm{K} \times \partial \mathrm{D}(0, r)$ pour tout compact $\mathrm{K} \subset \mathrm{D}(0, r)$. On en déduit

$$f(z) = \sum_{0}^{\infty} \left(\frac{1}{2i\pi} \int_{\partial \mathrm{D}(0,r)} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}} \, d\zeta \right) z^n = \sum_{0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \, z^n ,$$

où la série converge normalement sur tout compact de $\mathrm{D}(0, r)$, la deuxième égalité provenant à nouveau de la formule de Cauchy. Comme $r < \mathrm{R}$ est arbitraire, cela termine la démonstration.

« Autre » preuve. Par translation, il suffit de montrer que si f est holomorphe dans un disque $\mathrm{D} = \mathrm{D}(0, \mathrm{R})$, alors f se développe en série entière dans D. Pour $0 < r < \mathrm{R}$, notons $\mathbf{f}_r$ la fonction 2π-périodique définie par $\mathbf{f}_r(e^{i\theta}) = f(re^{i\theta})$. Chaque $\mathbf{f}_r$ est de classe $\mathcal{C}^1$ car f est holomorphe dans D. On peut donc développer $\mathbf{f}_r$ en série de Fourier : $\mathbf{f}_r(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{\mathbf{f}}_r(n) e^{int}$, où la série converge normalement sur $\mathbb{R}$. D'autre part, d'après la formule de la moyenne 3.3.11appliquée à $f(z)z^{-n}$ pour $n < 0$, on a $\hat{\mathbf{f}}_r(n) = 0$ si $n < 0$ et $\hat{\mathbf{f}}_r(n) = c_n r^n$ si $n \geqslant 0$, où $c_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$.

On obtient donc $f(re^{i\theta}) = \sum_{n\geqslant 0} c_n r^n e^{in\theta}$ pour tout $r < \mathrm{R}$ et pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, autrement dit, $f(z) = \sum_{n\geqslant 0} c_n z^n$ pour tout $z \in \mathrm{D}(0,\mathrm{R})$.

Corollaire 3.4.2. *Si $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, alors f est développable en série entière dans tout disque contenu dans Ω. En particulier, f est développable en série entière au voisinage de chaque point de Ω.*

Remarques. 1) Rappelons qu'une fonction est dite **$\mathbb{C}$-analytique** si elle se développe en série entière de la variable z au voisinage de chaque point. Le corollaire précédent, joint à la proposition 3.1.13, montre qu'une fonction est holomorphe si et seulement si elle est $\mathbb{C}$-analytique.

2) On dit qu'une fonction est **entière** si elle est la somme d'une série entière de rayon de convergence infini. Les fonctions entières sont donc exactement les fonctions holomorphes sur $\mathbb{C}$ tout entier.

Il est utile de savoir « jongler » avec les différents moyens de déterminer les coefficients du développement en série entière d'une fonction holomorphe. Voici un récapitulatif.

Remarque 3.4.3. *Si f est une fonction holomorphe dans un disque $\mathrm{D}(0,\mathrm{R})$, alors les coefficients c_n de son développement en série entière dans $\mathrm{D}(0,\mathrm{R})$ sont déterminés de manière unique. Plus précisément :*

a) *On a $c_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

b) *On a également $c_n = \frac{1}{2i\pi}\int_{\partial \mathrm{D}(0,r)} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}}\,d\zeta$ pour tout n et pour tout $r < \mathrm{R}$.*

c) *Si $r < \mathrm{R}$, alors, en notant $\mathbf{f}_r$ la fonction continue 2π-périodique définie par $\mathbf{f}_r(\theta) = f(re^{i\theta})$, on a $\hat{\mathbf{f}}(n) = 0$ si $n < 0$ et $\hat{\mathbf{f}}(n) = r^n c_n$ si $n \geqslant 0$.*

d) *Si de plus f est continue sur le disque fermé $\overline{\mathrm{D}}(0,\mathrm{R})$, alors* b *et* c *sont encore valables pour $r = \mathrm{R}$.*

Preuve. La partie a s'obtient en dérivant terme à terme l'identité $f(z) = \sum_0^\infty c_n z^n$ et en prenant $z = 0$. La partie b vient de la formule de Cauchy. La partie c se démontre en intégrant terme à terme l'identité $f(re^{i\theta}) = \sum_0^\infty c_n r^n e^{in\theta}$. Enfin, si f est continue sur $\overline{\mathrm{D}}(0,\mathrm{R})$, alors elle y est uniformément continue, donc $f(r\zeta)$ tend vers $f(\mathrm{R}\zeta)$ uniformément par rapport à $\zeta \in \mathbb{T}$ quand r tend vers R ; par passage à la limite, on obtient d.

3.4.1. Principe du prolongement analytique

On sait qu'il existe des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ non identiquement nulles dont toutes les dérivées en 0 sont nulles ; par exemple, la

fonction f définie par $f(x) = 0$ pour $x \leqslant 0$ et $f(x) = e^{-1/x}$ pour $x > 0$. Le théorème suivant montre que ce phénomène ne peut avoir lieu pour une fonction holomorphe. Une conséquence importante de ce résultat est le **principe du prolongement analytique** énoncé plus bas. On aurait pu ajouter le *principe des zéros isolés* (voir le chapitre 4), mais on ne l'a pas fait car il s'agit d'un résultat spécifique aux fonctions d'une seule variable complexe, tandis que le principe du prolongement analytique est valable pour les fonctions holomorphes de plusieurs variables, et même pour les fonctions $\mathbb{R}$-analytiques (voir le chapitre 11).

Théorème 3.4.4. *Supposons Ω connexe.*

Si $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ s'annule ainsi que toutes ses dérivées en un même point $z_0 \in \Omega$, alors f est identiquement nulle.

Preuve. L'ensemble $\mathrm{A} = \{z \in \Omega;\ \forall n \geqslant 0\ f^{(n)}(z) = 0\}$ est un fermé de Ω car toutes les $f^{(n)}$ sont continues. D'autre part, si $z_0 \in \mathrm{A}$ et si D est un disque ouvert de centre z_0 contenu dans Ω, alors f est identiquement nulle dans D puisque $f(z) \equiv \sum_n \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$ dans ce disque. Comme D est un ouvert, toutes les dérivées de f sont elles aussi nulles sur D, autrement dit $\mathrm{D} \subset \mathrm{A}$. L'ensemble A est donc également un ouvert de Ω. Par connexité, on a $\mathrm{A} = \emptyset$ ou $\mathrm{A} = \Omega$, ce qui termine la démonstration.

Corollaire 3.4.5. (Principe du prolongement analytique.)

On suppose Ω connexe. Si f et g sont deux fonctions holomorphes dans Ω qui coïncident sur un ouvert non vide $\mathrm{V} \subset \Omega$, alors $f \equiv g$ dans Ω tout entier.

Preuve. On applique le théorème précédent à $u = f - g$: comme V est ouvert, on a $u^{(n)} \equiv 0$ sur V pour tout $n \geqslant 0$.

Corollaire 3.4.6. *Si Ω est connexe, alors $\mathcal{H}(\Omega)$ est un anneau intègre.*

Preuve. Si $f, g \in \mathcal{H}(\Omega)$ vérifient $fg = 0$, alors $\Omega = f^{-1}(0) \cup g^{-1}(0)$, donc $f^{-1}(0)$ ou $g^{-1}(0)$ est d'intérieur non vide car ces deux ensembles sont des fermés de Ω, et donc $f = 0$ ou $g = 0$.

3.5. Inégalités de Cauchy et applications

3.5.1. Inégalités de Cauchy

Les inégalités de Cauchy fournissent des estimations sur les dérivées d'une fonction holomorphe lorsqu'on connaît des estimations sur la fonction elle-même. On va en donner deux versions.

La première version découle de la formule de la moyenne et de l'analyticité des fonctions holomorphes.

Théorème 3.5.1. *Si f est une fonction holomorphe dans un disque $\mathrm{D}(z_0,\mathrm{R})$, alors, pour tout $n \geqslant 0$ et pour tout $r \in]0;\mathrm{R}[$, on a*

$$\left|\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}\right| \leqslant \frac{\mathrm{M}(r)}{r^n} ,$$

où $\mathrm{M}(r) = \sup\left\{|f(z)|;\ |z-z_0| = r\right\}$. De plus, si l'égalité a lieu pour un certain entier n_0 et pour un certain $r < \mathrm{R}$, alors $f(z)$ est de la forme $\lambda(z-z_0)^{n_0}$, où λ est une constante.

Preuve. On peut supposer $z_0 = 0$. Fixons f et r, et posons $c_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$. Notons $\mathbf{f}_r$ la fonction continue 2π-périodique définie par $\mathbf{f}_r(\theta) = f(re^{i\theta})$. D'après la remarque 3.4.3, les coefficients de Fourier de $\mathbf{f}_r$ sont donnés par $\hat{\mathbf{f}}_r(n) = c_n r^n$ si $n \geqslant 0$ et $\hat{\mathbf{f}}_r(n) = 0$ si $n < 0$. D'après la formule de Parseval, on a donc

$$\sum_0^\infty |c_n|^2 r^{2n} = \int_0^{2\pi} \left|f(re^{i\theta})\right|^2 \frac{d\theta}{2\pi} ,$$

et comme $\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 \frac{d\theta}{2\pi} \leqslant \mathrm{M}(r)^2$, on en déduit

$$(*) \qquad \sum_0^\infty |c_n|^2 r^{2n} \leqslant \mathrm{M}(r)^2 .$$

En particulier, on a $|c_n|^2 r^{2n} \leqslant \mathrm{M}(r)^2$ pour tout n, autrement dit $|c_n| \leqslant \mathrm{M}(r)/r^n$. De plus, si $|c_{n_0}|^2 r^{2n_0} = \mathrm{M}(r)$ pour un certain entier n_0, alors on a nécessairement $c_n = 0$ pour $n \neq n_0$ sinon l'inégalité $(*)$ n'aurait pas lieu. Cela termine la démonstration.

Remarque 3.5.2. *Si on veut juste obtenir les inégalités $|\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}| \leqslant \frac{\mathrm{M}(r)}{r^n}$, il suffit d'écrire la formule de la moyenne*

$$\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{r^n}\int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta})\, e^{-in\theta}\, \frac{d\theta}{2\pi}$$

et de majorer l'intégrale.

Corollaire 3.5.3. *Si K est un compact de Ω et si $\mathrm{V} \subset \Omega$ est un voisinage compact de K, il existe des constantes $\mathrm{C}_1, \mathrm{C}_2, \ldots$ telles que pour toute fonction $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ et pour tout n, on ait*

$$\sup_{\mathrm{K}} \left|f^{(n)}(z)\right| \leqslant \mathrm{C}_n \sup_{\mathrm{V}} |f| .$$

Preuve. Fixons K et V. Comme K est compact, on peut trouver $r > 0$ tel que $\overline{\mathrm{D}}(z,r) \subset \mathrm{V}$ pour tout $z \in \mathrm{K}$. D'après le théorème précédent, on a alors $\sup_{\mathrm{K}} |f^{(n)}(z)| \leqslant r^{-n} \sup_{\mathrm{V}} |f|$.

Voici maintenant une deuxième version des inégalités de Cauchy. On pourrait la déduire de la première, mais il est plus instructif d'utiliser directement la formule de Cauchy-Pompeiu.

Théorème 3.5.4. *Si* K *est un compact de* Ω *et si* $V \subset \Omega$ *est un voisinage compact de* K, *il existe des constantes* $C_0, C_1, C_2, \ldots$ *vérifiant la propriété suivante : pour toute fonction* $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ *et pour tout* $n \geqslant 0$, *on a*

$$\sup_K \left| f^{(n)} \right| \leqslant C_n \, \|f\|_{L^1(V)} ,$$

où on a posé $\|f\|_{L^1(V)} = \int_V |f| \, dm$.

Preuve. Fixons K et V. Choisissons une fonction $\chi \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ à support compact contenu dans V et identiquement égale à 1 sur un ouvert W contenant K. L'existence d'une telle fonction est démontrée en appendice.

Soit maintenant $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. La fonction χf se prolonge en une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{C}$, encore notée χf. On a $\frac{\partial(\chi f)}{\partial \bar{z}} = f \frac{\partial \chi}{\partial \bar{z}}$ car f est holomorphe, et $\frac{\partial \chi}{\partial \bar{z}} \equiv 0$ sur W car χ est constante sur l'ouvert W. D'après le corollaire 3.3.5 appliqué à la fonction χf, on a donc

$$\chi f(a) = -\frac{1}{\pi} \int_{V \setminus W} \frac{\partial \chi}{\partial \bar{z}} \, \frac{f(z)}{z-a} \, dm(z)$$

pour tout point $a \in \mathbb{C}$. Comme $\chi f \equiv f$ au voisinage de K, on a donc $f(a) \equiv -\frac{1}{\pi} \int_{V \setminus W} \frac{\partial \chi}{\partial \bar{z}} \frac{f(z)}{z-a} dm(z)$ au voisinage de K. En dérivant n fois sous le signe intégral ($n \geqslant 0$), on obtient donc, pour tout point $a \in K$:

$$f^{(n)}(a) = \frac{(-1)^{n+1} n!}{\pi} \int_{V \setminus W} \frac{\partial \chi}{\partial \bar{z}} \, \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} \, dm(z) \cdot$$

On en déduit

$$\sup_K \left| f^{(n)} \right| \leqslant \frac{n!}{\pi} \left\| \frac{\partial \chi}{\partial \bar{z}} \right\|_\infty (d(\mathbb{C} \setminus W, K))^{-n-1} \int_V |f| \, dm ,$$

où $d(\mathbb{C} \setminus W, K) = \inf\{|z-a|;\ z \in \mathbb{C} \setminus W, a \in K\}$ est strictement positif par compacité de K. Il suffit donc de poser $C_n = \frac{n!}{\pi} \, \| \frac{\partial \chi}{\partial \bar{z}} \|_\infty (d(\mathbb{C} \setminus W, K))^{-n-1}$.

3.5.2. Suites de fonctions holomorphes

a. Théorème de convergence de Weierstrass

On a vu au début du chapitre que la somme d'une série entière est holomorphe dans son disque de convergence. Grâce aux inégalités de Cauchy, ce résultat peut se généraliser considérablement.

Théorème 3.5.5. (Théorème de convergence de Weierstrass.)
Si (f_n) est une suite de fonctions holomorphes dans Ω convergeant uniformément sur les compacts de Ω vers une fonction f, alors f est holomorphe et la suite (f_n') converge vers f' uniformément sur les compacts.

Preuve. Si (f_n) converge uniformément sur les compacts de Ω, il découle des inégalités de Cauchy, appliquées aux fonctions $f_n - f_m$, que la suite (f_n') est uniformément de Cauchy sur tout compact de Ω : en effet, si K est un compact de Ω, alors, en choisissant un voisinage compact de K, $V \subset \Omega$, on peut écrire $\sup_K |f_n'(z) - f_m'(z)| \leqslant C \sup_V |f_n - f_m|$, où C est une constante indépendante de n et m.

Il existe donc une fonction $g : \Omega \to \mathbb{C}$ telle que (f_n') converge vers g uniformément sur les compacts de Ω. Comme les f_n sont de classe $\mathcal{C}^1$ et $df_n = f_n' dz$ pour tout n, on en conclut que f est de classe $\mathcal{C}^1$ et $df = g dz$. Autrement dit, la fonction f est holomorphe et $f' = g$.

Variante. Comme tout compact de Ω peut être recouvert par un nombre fini de disques ouverts d'adhérences contenues dans Ω, il suffit de montrer que f est holomorphe dans tout disque ouvert D vérifiant $\overline{D} \subset \Omega$, et que f_n' converge uniformément vers f' sur tout compact d'un tel disque D. Fixons D.

Comme $f_n(\zeta)$ converge vers $f(\zeta)$ uniformément sur ∂D, on peut passer à la limite dans la formule de Cauchy, ce qui donne $f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta$. Cela prouve que f est holomorphe dans D, avec $f'(z) \equiv \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2}\, d\zeta$. Comme $f_n'(z)$ s'obtient à partir de $f_n(z)$ par la même formule intégrale et comme $f_n(\zeta)$ tend vers $f(\zeta)$ uniformément sur ∂D, on en déduit sans peine que $f_n'(z)$ tend vers $f'(z)$ uniformément sur les compacts de D.

Exemple 3.5.6. (Fonction ζ.)
La formule $\zeta(s) = \sum_1^\infty \frac{1}{n^s}$ définit une fonction holomorphe dans le demi-plan $\{\mathrm{Re}(s) > 1\}$.

Preuve. On a $|n^s| = n^{\mathrm{Re}(s)}$ pour tout n, donc la série converge normalement sur les compacts de $\{\mathrm{Re}(s) > 1\}$.

b. Théorème de Montel

Une deuxième application frappante des inégalités de Cauchy est le *théorème de Montel*, qui est un résultat de compacité extrêmement utile. On aura besoin de ce résultat au chapitre 10 pour démontrer le théorème de la représentation conforme (théorème de Riemann).

Théorème 3.5.7. (Théorème de Montel.)
Soit (f_n) une suite de fonctions holomorphes dans Ω. On suppose que la suite (f_n) est uniformément bornée sur les compacts de Ω, autrement dit, que pour tout compact $K \subset \Omega$, il existe une constante C_K (indépendante de n) telle que $|f_n(z)| \leqslant C_K$ sur K pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors (f_n) admet une sous-suite qui converge uniformément sur les compacts de Ω vers une fonction $f \in \mathcal{H}(\Omega)$.

Pour la preuve, on a besoin des deux lemmes suivants.

Lemme 3.5.8. *Si W est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, Il existe une suite $(K_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de compacts de W vérifiant les propriétés suivantes : $K_i \subset \mathring{K}_{i+1}$ pour tout i, et tout compact de W est contenu dans l'intérieur de l'un des K_i ; en particulier, $\bigcup_i K_i = \bigcup_i \mathring{K}_i = W$.*

Preuve. Il suffit de poser $K_i = \{x \in \mathbb{R}^n ; |x| \leqslant i \text{ et } d(x, \mathbb{R}^n \backslash W) \geqslant 2^{-i}\}$, où $|\ |$ est par exemple la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$.

Une suite de compacts K_i vérifiant les propriétés du lemme précédent s'appelle une **suite exhaustive de compacts pour** W.

Avant d'énoncer le deuxième lemme, rappelons qu'une partie A d'un espace topologique X est dite **relativement compacte dans** X si l'adhérence de A dans X est compacte. Si X est lui-même une partie d'un plus gros espace topologique Y, il revient au même de dire que l'adhérence de A dans Y est compacte et contenue dans X.

Lemme 3.5.9. *Soit W un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Si $f \in \mathcal{C}^1(W)$, alors f est lipschitzienne sur tout compact. Plus précisément, si K est un compact de W et si V est un voisinage de K relativement compact dans W, alors la restriction de f à K est C-lipschitzienne, où la constante C ne dépend que de K, de V et de $\|f\|_V = \sup_V |f(x)| + \sup_V \|df(x)\|$.*

Preuve. Le point « délicat » est que V n'a aucune raison d'être convexe, et qu'on ne peut donc pas appliquer directement l'inégalité des accroissements finis.

Fixons K et V, et choisissons une fonction $\chi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ à support compact contenu dans V et identiquement égale à 1 sur K (voir l'appendice A). La fonction χf se prolonge en une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^n$ à support compact, encore notée χf. On a $d(\chi f) \equiv 0$ en dehors de V et $d(\chi f) \equiv f d\chi + \chi df$ sur V, donc

$$\|d(\chi f)\|_\infty \leqslant C = (\|d\chi\|_\infty + \|\chi\|_\infty)\|f\|_V .$$

D'après l'inégalité des accroissements finis, la fonction χf est C-lipschitzienne, donc $f_{|K} = (\chi f)_{|K}$ est également C-lipschitzienne.

Preuve du théorème de Montel. D'après les inégalités de Cauchy, la suite (f_n') est uniformément bornée sur tout compact de Ω, donc la famille $\{f_n; n \in \mathbb{N}\}$ est équi-lipschitzienne sur tout compact d'après le lemme précédent. D'après le théorème d'Ascoli, on en déduit que si $K \subset \Omega$ est un compact fixé, alors toute sous-suite de (f_n) admet une sous-suite qui converge uniformément sur K.

Soit maintenant (K_i) une suite exhaustive de compacts pour Ω. D'après ce qui précède, on peut construire par récurrence une suite décroissante $(\mathbf{N}_i)$ de parties infinies de $\mathbb{N}$ telle que $\min \mathbf{N}_{i+1} > \min \mathbf{N}_i$ pour tout i, et telle que pour chaque $i \in \mathbb{N}$, la suite $(f_n)_{n \in \mathbf{N}_i}$ converge uniformément sur K_i. En posant $\varphi(n) = \min \mathbf{N}_n$, la suite $(f_{\varphi(n)})$ est une sous-suite de (f_n) qui converge uniformément sur chacun des K_i. Par définition d'une suite exhaustive de compacts, cette sous-suite converge donc uniformément sur tout compact de Ω. Enfin, la fonction limite est holomorphe d'après le théorème de convergence de Weierstrass.

Variante. On peut procéder de manière un peu plus élémentaire sans utiliser les lemmes 3.5.9 et 3.5.8. On commence par écrire $\Omega = \bigcup_0^\infty D_i$, où les D_i sont des disques ouverts vérifiant $\overline{D}_i \subset \Omega$ pour tout i. Les inégalités de Cauchy et l'inégalité des accroissements finis montrent que la suite (f_n) est redevable du théorème d'Ascoli sur chaque disque $\overline{D}_i$. En raisonnant comme plus haut, on peut donc construire une sous-suite (g_n) de (f_n) qui converge uniformément sur chacun des $\overline{D}_i$. Comme tout compact de Ω est contenu dans la réunion d'un nombre fini de disques D_i, la suite (g_n) converge uniformément sur tout compact.

c. Topologie de $\mathcal{H}(\Omega)$

Notons $\mathcal{C}(\Omega)$ l'espace vectoriel $\mathcal{C}^0(\Omega)$ muni de la topologie de la convergence uniforme sur les compacts. Par définition, cette topologie est engendrée par les semi-normes p_K définies par $p_K(f) = \sup_{z \in K} |f(z)|$, où K parcourt la famille des compacts de Ω. Il découle directement de cette définition qu'une suite $(f_n) \subset \mathcal{C}(\Omega)$ converge vers une fonction f dans $\mathcal{C}(\Omega)$ si et seulement si $f_n(z)$ tend vers $f(z)$ uniformément sur les compacts.

Il se trouve que la topologie de $\mathcal{C}(\Omega)$ est en fait *métrisable.* Plus précisément, si (K_i) est une suite exhaustive de compacts pour Ω, alors la distance d définie par

$$d(f,g) = \sum_i 2^{-i} \frac{p_{K_i}(f-g)}{1 + p_{K_i}(f-g)}$$

engendre la topologie de $\mathcal{C}(\Omega)$. Par conséquent, toutes les propriétés topologiques de $\mathcal{C}(\Omega)$ peuvent se traduire en termes de suites.

On dit qu'une partie $\mathcal{A}$ de $\mathcal{C}(\Omega)$ est **bornée** si toutes les semi-normes p_K sont bornées sur $\mathcal{A}$, autrement dit si la famille $\mathcal{A}$ est uniformément bornée sur tout compact de Ω.

Le théorème de convergence de Weierstrass et le théorème de Montel se reformulent maintenant de manière particulièrement simple :

Théorème 3.5.10. **a)** *$\mathcal{H}(\Omega)$ est un sous-espace fermé de $\mathcal{C}(\Omega)$.*

b) *L'application $f \mapsto f'$ est continue de $\mathcal{H}(\Omega)$ dans $\mathcal{H}(\Omega)$.*

c) *Les parties bornées de $\mathcal{H}(\Omega)$ sont relativement compactes dans $\mathcal{H}(\Omega)$.*

3.5.3. Intégrales à paramètres

Comme autre application des inégalités de Cauchy, on va démontrer un théorème d'holomorphie pour les intégrales dépendant d'un paramètre.

Théorème 3.5.11. *Soit $(T, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré, et soit $F : \Omega \times T \to \mathbb{C}$. On suppose que F vérifie les propriétés suivantes :*

(i) *pour tout $z \in \Omega$, l'application $t \mapsto F(z,t)$ est mesurable ;*

(ii) *pour tout $t \in T$, l'application $z \mapsto F(z,t)$ est holomorphe dans Ω ;*

(iii) *pour tout compact $K \subset \Omega$, il existe une fonction $u_K \in L^1(T,\mu)$ telle que $|F(z,t)| \leqslant u_K(t)$ pour tout $(z,t) \in K \times T$.*

Alors la formule $f(z) = \int_T F(z,t)\, d\mu(t)$ définit une fonction holomorphe dans Ω. De plus, toutes les dérivées de f s'obtiennent par dérivation sous le signe intégral.

Preuve. Les conditions (i) et (iii) entraînent que f est bien définie. D'autre part, il découle de (iii) et des inégalités de Cauchy que pour tout compact $K \subset \Omega$, on a $|\frac{\partial F}{\partial z}(z,t)| \leqslant C u_K(t)$ sur $K \times T$ pour une certaine constante C. Comme $\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial z} = \frac{1}{i}\frac{\partial F}{\partial y}$, on a donc $|\frac{\partial F}{\partial x}(z,t)| \leqslant C u_K(t)$ et $|\frac{\partial F}{\partial y}(z,t)| \leqslant C u_K(t)$ sur $K \times T$, ce qui montre qu'on peut appliquer les théorèmes usuels de dérivation des intégrales à paramètres. Ainsi, la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ et ses dérivées partielles s'obtiennent en dérivant sous le signe intégral. En particulier, $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$ puisque $\frac{\partial F}{\partial \bar{z}} = 0$, donc f est holomorphe dans Ω, et $f'(z) \equiv \int_T \frac{\partial F}{\partial z}(z,t)\, d\mu(t)$.

On conclut par récurrence.

Remarque 3.5.12. *Le point important dans le théorème précédent est qu'on ne suppose a priori rien sur les dérivées partielles de la fonction F : les inégalités de Cauchy fournissent automatiquement des estimations sur ces dérivées lorsqu'on en connaît sur F elle-même.*

Exemple 3.5.13. (Fonction Γ.)

La formule $\Gamma(z) = \displaystyle\int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}\,dt$ *définit une fonction holomorphe dans le demi-plan* $\{\mathrm{Re}(z) > 0\}$. *On a* $\Gamma(1) = 1$, *et la fonction* Γ *vérifie l'équation fonctionnelle* $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$. *En particulier,* $\Gamma(n) = (n-1)!$ *pour tout entier* $n \geqslant 1$.

Preuve. Posons $\mathrm{U} = \{\mathrm{Re}(z) > 0\}$. La fonction $(z,t) \mapsto t^{z-1}e^{-t}$ est visiblement holomorphe en $z \in \mathrm{U}$ et mesurable en $t \in]0;+\infty[$. Pour vérifier (iii), fixons un compact $\mathrm{K} \subset \mathrm{U}$ et choisissons a et b tels que $0 < a \leqslant \mathrm{Re}(z) \leqslant b < +\infty$ pour tout $z \in \mathrm{K}$. Pour $z \in \mathrm{K}$, on a alors $|t^{z-1}e^{-t}| \leqslant t^{a-1}e^{-t}$ si $t \in [0;1]$, et $|t^{z-1}e^{-t}| \leqslant t^{b-1}e^{-t}$ si $t \geqslant 1$. Comme $a - 1 > -1$, la fonction u définie par $u(t) = t^{a-1}e^{-t}$ pour $t \in]0;1]$ et $u(t) = t^{b-1}e^{-t}$ pour $t \geqslant 1$ est intégrable sur $]0;+\infty[$, donc la condition (iii) est vérifiée avec $u_{\mathrm{K}} = u$. Ainsi, la fonction Γ est bien définie, et est holomorphe dans le demi-plan U. Un calcul immédiat donne $\Gamma(1) = 1$, et l'identité $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ s'obtient en intégrant par parties.

3.6. Formule de Cauchy pour un disque : démonstration directe

Les propriétés générales des fonctions holomorphes démontrées jusqu'à présent ont toutes été déduites de la formule de Cauchy-Pompeiu, qui repose elle même sur la formule de Stokes. On peut donc considérer que les démonstrations données ne sont pas « élémentaires ».

Cependant, pour démontrer la première version des inégalités de Cauchy et ses conséquences principales (théorème de convergence de Weierstrass, théorème de Montel), on n'a besoin que de la formule de Cauchy pour un disque. De même, le fait que la dérivée d'une fonction holomorphe soit encore holomorphe et la preuve de l'existence du développement en série entière dépendent uniquement de cette version de la formule de Cauchy.

D'autre part, en examinant la démonstration de la formule de Cauchy-Pompeiu, on constate que la formule de Cauchy pour un disque découle de la formule de Stokes pour un « disque à un trou », dont on a donné une démonstration élémentaire au chapitre précédent. Ainsi, les résultats mentionnés plus haut reposent uniquement sur cette version simple de la formule de Stokes.

On va voir maintenant qu'il est même possible de donner une démonstration directe de la formule de Cauchy pour un disque, sans aucune référence à la formule de Stokes.

Lemme 3.6.1. *Si* D *est un disque ouvert de* $\mathbb{C}$, *alors*

$$\int_{\partial \mathrm{D}} \frac{dz}{z-a} = 2i\pi \ \ si\, a \in \mathrm{D} \quad et \quad \int_{\partial \mathrm{D}} \frac{dz}{z-a} = 0 \ \ si\, a \in \mathbb{C}\backslash\overline{\mathrm{D}}\,.$$

Preuve. Par translation, on se ramène au cas d'un disque centré en 0, $\mathrm{D} = \mathrm{D}(0,\mathrm{R})$.

Remarquons d'abord que si m est un entier quelconque, alors $\int_{\partial \mathrm{D}} \frac{dz}{z^m} = i\mathrm{R}^{1-m} \int_0^{2\pi} e^{i(1-m)\theta} d\theta$: on a donc $\int_{\partial \mathrm{D}} \frac{dz}{z^m} = 0$ si $m \neq 1$, et $\int_{\partial \mathrm{D}} \frac{dz}{z} = 2i\pi$.

Si $|a| < \mathrm{R}$, on écrit $z - a = z(1 - \frac{a}{z})$, et donc $\frac{1}{z-a} = \frac{1}{z} \sum_{n\geqslant 0} (\frac{a}{z})^n$, où la série converge normalement sur $\partial\mathrm{D}$. On a donc $\int_{\partial \mathrm{D}} \frac{dz}{z-a} = \sum_{n\geqslant 0} a^n \int_{\partial \mathrm{D}} \frac{dz}{z^{n+1}} = 2i\pi$ puisque tous les termes de la somme sont nuls sauf le premier qui vaut $2i\pi$.

Si $|a| > \mathrm{R}$, on écrit cette fois $\frac{1}{z-a} = \frac{1}{a} \frac{1}{1-(z/a)} = \frac{1}{a} \sum_{n\geqslant 0} (\frac{z}{a})^n$, d'où $\int_{\partial \mathrm{D}} \frac{dz}{z-a} = \sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{a^{n+1}} \int_{\partial \mathrm{D}} z^n dz = 0$ car tous les termes de la somme sont nuls.

Preuve de la formule de Cauchy pour un disque. Soit f une fonction holomorphe au voisinage d'un disque fermé $\overline{\mathrm{D}} = \overline{\mathrm{D}}(a,\mathrm{R})$, et fixons un point $z_0 \in \mathrm{D}$. La fonction f est holomorphe sur un disque $\mathrm{D}(a,\mathrm{R}')$, avec $\mathrm{R}' > \mathrm{R}$, et si $\zeta \in \mathrm{D}(a,\mathrm{R}')$, alors le segment $[z_0;\zeta]$ est contenu dans $\mathrm{D}(a,\mathrm{R}')$. On définit donc une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ au voisinage de $[0\,;1] \times \overline{\mathrm{D}}$ en posant $\mathrm{F}(\lambda,\zeta) = f((1-\lambda)z_0 + \lambda\zeta)$.

Posons $\mathrm{F}_\lambda(\zeta) = \mathrm{F}(\lambda,\zeta)$, et

$$\mathrm{I}(\lambda) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial \mathrm{D}} \frac{\mathrm{F}_\lambda(\zeta)}{\zeta - z_0}\, d\zeta\,.$$

On a $\mathrm{F}_0(\zeta) \equiv f(z_0)$, et donc $\mathrm{I}(0) = f(z_0)$ car $\int_{\partial \mathrm{D}} \frac{d\zeta}{\zeta - z_0} = 2i\pi$. D'autre part, $\mathrm{F}_1(\zeta) \equiv f(\zeta)$, et donc $\mathrm{I}(1) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial \mathrm{D}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0}\, d\zeta$. Il s'agit donc de montrer qu'on a $\mathrm{I}(1) = \mathrm{I}(0)$.

Comme F est de classe $\mathcal{C}^1$, l'application I est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0\,;1]$, et

$$\mathrm{I}'(\lambda) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial \mathrm{D}} \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\frac{\mathrm{F}(\lambda,\zeta)}{\zeta - z_0} \right) d\zeta\,.$$

Les fonction F_λ sont holomorphes, avec $\mathrm{F}'_\lambda(\zeta) \equiv \lambda f'((1-\lambda)z_0 + \lambda\zeta)$. Comme par ailleurs on a aussi $\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial \lambda}(\lambda,\zeta) \equiv (\zeta - z_0) f'((1-\lambda)z_0 + \lambda\zeta)$, on en déduit que si $\lambda \neq 0$, alors

$$\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial \lambda}(\lambda,\zeta) \equiv \frac{\zeta - z_0}{\lambda}\, \mathrm{F}'_\lambda(\zeta)\,.$$

On obtient ainsi $\mathrm{I}'(\lambda) = \frac{1}{2i\pi\lambda} \int_{\partial \mathrm{D}} d\mathrm{F}_\lambda = 0$ pour tout $\lambda > 0$. La fonction I est donc constante sur $]0\,;1]$, et comme elle est continue sur $[0\,;1]$, on a bien $\mathrm{I}(0) = \mathrm{I}(1)$.

3.7. Transformée de Cauchy d'une mesure borélienne

On a vu au début du chapitre que si μ est une mesure de Radon sur un compact $K \subseteq \mathbb{C}$, alors sa transformée de Cauchy, définie par la formule

$$\hat{\mu}(z) = -\frac{1}{\pi}\left\langle \mu, \frac{1}{\zeta - z}\right\rangle ,$$

est une fonction holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus K$. Dans cette section, on montre qu'en considérant μ comme une mesure borélienne via la théorème de représentation de Riesz, on peut définir sa transformée de Cauchy $\hat{\mu}$ non seulement en dehors de K, mais en fait presque partout relativement à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{C}$. On établit ensuite les propriétés essentielles de la transformées de Cauchy, qui seront utilisées aux chapitres 7 et 9.

Dans ce qui suit, on note toujours $\frac{1}{z}$ la fonction $z \mapsto \frac{1}{z}$, définie arbitrairement en 0.

Lemme 3.7.1. *Soit f une fonction borélienne localement intégrable sur $\mathbb{R}^n$. Si μ est une mesure borélienne complexe sur $\mathbb{R}^n$ à support compact, alors, pour presque tout $x \in \mathbb{R}^n$ relativement à la mesure de Lebesgue, la fonction $y \mapsto f(x-y)$ est μ-intégrable. De plus, la fonction $f * \mu$ définie presque partout par la formule $f*\mu(x) = \int f(x-y)\, d\mu(y)$ est localement intégrable, et la distribution $[f*\mu]$ est égale à $[f]*[\mu]$.*

Preuve. Fixons μ, et notons K le support de μ ; rappelons aussi que la mesure de Lebesgue est notée m.

Pour $x, y \in \mathbb{R}^n$, posons $\varphi(x,y) = f(x-y)$. La fonction φ est borélienne sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. De plus, on a $\int_L (\int |\varphi(x,y)|\, d|\mu|(y))\, dm(x) = \int_K (\int_L |f(x-y)|\, dm(x))\, d|\mu|(y)$ pour tout compact $L \subset \mathbb{R}^n$, d'après le théorème de Fubini. Comme $\int_L |f(x-y)|\, dm(x) \leqslant \int_{L-K} |f|\, dm$ pour tout $y \in K$, on a donc $\int_L (\int |\varphi(x,y)|\, d|\mu|(y))\, dm(x) \leqslant \|\mu\| \times \int_{L-K} |f|\, dm < +\infty$. D'après le théorème de Fubini, on en déduit que pour tout compact $L \subset \mathbb{R}^n$, la fonction $y \mapsto f(x-y)$ est μ-intégrable pour presque tout $x \in L$, et la fonction (presque partout définie) $x \mapsto \int f(x-y)\, d\mu(y)$ est intégrable sur L.

Comme $\mathbb{R}^n$ est réunion dénombrable de compacts, la formule $f*\mu(x) = \int f(x-y)\, d\mu(y)$ a donc un sens pour presque tout $x \in \mathbb{R}^n$, et définit une fonction localement intégrable. Enfin, une dernière application du théorème de Fubini montre qu'on a $[f*\mu] = [f]*[\mu]$.

Définition 3.7.2. *Si μ est une mesure borélienne sur $\mathbb{C}$ à support compact, la* **transformée de Cauchy** *de μ est la fonction $\hat{\mu} = \frac{1}{\pi z} * \mu$; elle est donc définie presque partout par la formule*

$$\hat{\mu}(z) = -\frac{1}{\pi}\int \frac{d\mu(\zeta)}{\zeta - z}\,.$$

Par exemple, si $D \subset \mathbb{C}$ est un disque ouvert de centre a et si f est une fonction holomorphe au voisinage de $\overline{D}$, alors, d'après la formule de Cauchy, f coïncide sur D avec la transformée de Cauchy de la mesure $\mu_f = -\frac{1}{2i} f\,(dz)_\gamma$, où $\gamma = \partial D$.

Proposition 3.7.3. *Si μ est une mesure borélienne sur $\mathbb{C}$ à support compact, alors $\frac{\partial \hat{\mu}}{\partial \bar{z}} = \mu$ au sens des distributions.*

Preuve. On a $\frac{\partial [\hat{\mu}]}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial [1/\pi z]}{\partial \bar{z}} * [\mu] = \delta_0 * [\mu] = [\mu]$, la deuxième égalité venant du corollaire 3.3.6.

Corollaire 3.7.4. *Si $\hat{\mu} = 0$ presque partout, alors $\mu = 0$.*

D'après la proposition précédente, on a $\frac{\partial \hat{\mu}}{\partial \bar{z}} = 0$ au sens des distributions sur $\mathbb{C}\backslash \mathrm{supp}(\mu)$. Plus généralement, si V est un ouvert tel que $\mu = \varphi m$ sur V où $\varphi \in \mathcal{C}^k(V)$ et m est la mesure de Lebesgue, alors $\frac{\partial \hat{\mu}}{\partial \bar{z}} = \varphi$ sur V au sens des distributions. On va voir qu'on peut en fait obtenir des résultats ponctuels plus précis.

Convenons de dire que $\hat{\mu}$ *est définie* en un point $z \in \mathbb{C}$ si la fonction $\zeta \mapsto 1/(\zeta - z)$ est intégrable par rapport à μ. Dans ce cas, on attribue évidemment à $\hat{\mu}$ la valeur $\hat{\mu}(z) = -\frac{1}{\pi}\int \frac{d\mu(\zeta)}{\zeta - z}$.

Théorème 3.7.5. *Soit μ une mesure borélienne complexe sur $\mathbb{C}$, à support compact* K.

a) *La fonction $\hat{\mu}$ est définie en tout point $z \in \mathbb{C}\backslash K$, et elle est holomorphe sur $\mathbb{C}\backslash K$.*

b) *Plus généralement, si $\mu = \varphi m$ sur un ouvert* V, *avec $\varphi \in \mathcal{C}^k(V)$ $(k \geqslant 0)$, alors $\hat{\mu}$ est définie en tout point de* V, *elle est de classe $\mathcal{C}^k$ sur* V, *et si $k \geqslant 1$, on a $\frac{\partial \hat{\mu}}{\partial \bar{z}} \equiv \varphi$ sur* V.

Preuve. La partie **a** est la transcription de la proposition 3.1.15. Pour démontrer **b**, fixons un ouvert $V \subset \mathbb{C}$ et une fonction $\varphi \in \mathcal{C}^k(V)$ tels que $\mu = \varphi m$ sur V.

Supposons d'abord $V = \mathbb{C}$. Alors φ est bornée à support compact, donc $\hat{\mu}$ est définie en tout point, et $\hat{\mu}$ est de classe $\mathcal{C}^k$ d'après la proposition A.1.5. Si $k \geqslant 1$, alors $\frac{\partial \hat{\mu}}{\partial \bar{z}} = \varphi$ au sens des distributions d'après la proposition 3.7.3, et comme $\frac{\partial \hat{\mu}}{\partial \bar{z}}$ et φ sont des fonctions continues, on en déduit $\frac{\partial \hat{\mu}}{\partial \bar{z}} = \varphi$. Sans même parler de distributions, il suffit d'écrire $\frac{\partial \hat{\mu}}{\partial \bar{z}}(z) = -\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{C}} \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{z}}(\zeta)\,\frac{dm(\zeta)}{\zeta - z}$ et d'appliquer le corollaire 3.3.5.

Supposons maintenant l'ouvert V quelconque, et fixons $z_0 \in V$. Choisissons une fonction $\chi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{C})$ valant 1 au voisinage de z_0, à support compact contenu dans V, et écrivons

$$\mu = \chi\mu + (1-\chi)\mu = \mu_1 + \mu_2 .$$

Par le choix de χ, la fonction $\chi\varphi$ se prolonge en une fonction de classe $\mathcal{C}^k$ sur $\mathbb{C}$ à support compact (encore notée $\chi\varphi$), et on a $\chi\mu = (\chi\varphi)\, m$ sur $\mathbb{C}$ tout entier. On peut donc appliquer ce qui précède à la mesure $\mu_1 = \chi\mu$, et on obtient ainsi que $\hat{\mu}_1$ est (définie et) de classe $\mathcal{C}^k$ sur $\mathbb{C}$ tout entier, avec $\frac{\partial \hat{\mu}_1}{\partial \bar{z}} = \chi\varphi$ si $k \geqslant 1$. D'autre part, comme $1-\chi \equiv 0$ au voisinage de z_0, le point z_0 n'appartient pas au support de $\mu_2 = (1-\chi)\mu$. D'après **a**, $\hat{\mu}_2$ est donc (définie et) holomorphe au voisinage de z_0. Au total, $\hat{\mu}$ est de classe $\mathcal{C}^k$ au voisinage de z_0, et si $k \geqslant 1$, alors $\frac{\partial \hat{\mu}}{\partial \bar{z}}(z_0) = \chi(z_0)\varphi(z_0) + 0 = \varphi(z_0)$.

Corollaire 3.7.6. *Si φ est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{C}$ à support compact, alors il existe une fonction $u \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{C})$ telle que $\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} = \varphi$*

Preuve. En posant $\mu = \varphi\, m$, la fonction $u = \hat{\mu}$ convient.

3.8. Noyau de Cauchy ; espaces A(𝔻) et H²(𝔻)

Cette section est essentiellement une « relecture » de la formule de Cauchy dans un langage d'analyse fonctionnelle. On y introduit deux espaces fonctionnels importants, qui réapparaîtront par la suite.

3.8.1. Algèbre du disque A(𝔻) et noyau de Cauchy

Définition 3.8.1. L'algèbre du disque, *notée* $A(\mathbb{D})$, *est l'ensemble des fonctions $f : \overline{\mathbb{D}} \to \mathbb{C}$ continues sur $\overline{\mathbb{D}}$ et holomorphes dans $\mathbb{D}$.*

Si $f \in A(\mathbb{D})$, alors la remarque 3.3.13 permet d'écrire, pour tout point $a \in \mathbb{D}$:

$$f(a) = \frac{1}{2i\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f(e^{i\theta})}{e^{i\theta}-a}\, ie^{i\theta}d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{f(e^{i\theta})}{1-e^{-i\theta}a}\,\frac{d\theta}{2\pi} = \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})\,\overline{k_a(\theta)}\,\frac{d\theta}{2\pi},$$

où on a posé $k_a(\theta) = \frac{1}{1-\bar{a}e^{i\theta}}$.

En posant $a = re^{it}$, cela s'écrit encore

$$f(re^{it}) = \int_0^{2\pi} \frac{f(e^{i\theta})}{1-re^{i(t-\theta)}}\,\frac{d\theta}{2\pi} = \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})\, k_r(t-\theta)\,\frac{d\theta}{2\pi} .$$

Cela justifie la définition suivante.

Définition 3.8.2. *Le* **noyau de Cauchy** *du disque unité est la fonction* $k : \mathbb{D} \times \partial\mathbb{D} \to \mathbb{C}$ *définie par* $k(z,\zeta) = \frac{1}{1-\bar{z}\zeta}$ *; pour* $a \in \mathbb{D}$*, on note* k_a *la fonction définie sur* $\partial\mathbb{D}$ *par* $k_a(\zeta) = k(a,\zeta)$*.*

Remarque 3.8.3. *Si* $r \in [0;1[$*, alors*

$$k_r(e^{i\theta}) = \sum_0^\infty r^n e^{in\theta} \ ,$$

où la série converge normalement par rapport à $\theta \in \mathbb{R}$*. Les coefficients de Fourier de* k_r *sont donc donnés par* $\hat{k}_r(n) = 0$ *si* $n < 0$*, et* $\hat{k}_r(n) = r^n$ *si* $n \geqslant 0$*.*

Avec ces notations, les remarques précédentes se traduisent maintenant de manière très simple.

Proposition 3.8.4. *Soit* $f \in \mathrm{A}(\mathbb{D})$*.*

a) *En notant* $\mathbf{f}$ *la restriction de* f *à* $\mathbb{T} = \partial\mathbb{D}$*, on a pour tout point* $a \in \mathbb{D}$ *:*

$$f(a) = \langle \mathbf{f}, k_a \rangle \ ,$$

où $\langle \ , \ \rangle$ *désigne le produit scalaire usuel sur* $\mathrm{L}^2(\mathbb{T})$*.*

b) *De façon équivalente, en notant* $\mathbf{f}_r$ *la fonction définie sur* $\mathbb{T}$ *par* $\mathbf{f}_r(e^{it}) = \mathbf{f}(re^{it})$*, on a pour tout* $r < 1$ *:*

$$\mathbf{f}_r = k_r * \mathbf{f} \ ,$$

où $*$ *est l'opération de convolution sur* $\mathrm{L}^1(\mathbb{T})$*.*

3.8.2. Espace de Hardy $\mathrm{H}^2(\mathbb{D})$

Définition 3.8.5. L'espace de Hardy $\mathrm{H}^2(\mathbb{D})$ *est l'ensemble des fonctions* f *holomorphes dans* $\mathbb{D}$ *dont les coefficients de Taylor* $c_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$ *vérifient* $\sum_0^\infty |c_n|^2 < +\infty$*.*

Par définition, $\mathrm{H}^2(\mathbb{D})$ s'identifie à l'espace $l^2(\mathbb{N})$ constitué par les suites complexes de carré sommable : à une fonction $f \in \mathrm{H}^2(\mathbb{D})$ est associée la suite de ses coefficients de Taylor, et à une suite $(c_n) \in l^2(\mathbb{N})$ est associée la fonction $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ définie par $f(z) = \sum_0^\infty c_n z^n$, qui est bien définie car (c_n) est bornée. On en déduit que $\mathrm{H}^2(\mathbb{D})$ est un espace vectoriel et que si, pour $f \in \mathrm{H}^2(\mathbb{D})$, $f(z) = \sum_0^\infty c_n z^n$, on pose

$$\|f\|_{\mathrm{H}^2} = \left(\sum_0^\infty |c_n|^2 \right)^{1/2} \ ,$$

alors $\| \ \|_{H^2}$ est une norme sur $H^2(\mathbb{D})$ et $(H^2(\mathbb{D}), \| \ \|_{H^2})$ est un espace de Hilbert.

Le produit scalaire de deux fonctions $f, g \in H^2(\mathbb{D})$ est donnée par

$$\langle f, g \rangle = \sum_0^\infty c_n(f)\,\overline{c_n(g)}\,,$$

où on a noté $c_n(f), c_n(g)$ les coefficients de Taylor de f et g.

La formule de Parseval permet d'identifier isométriquement $H^2(\mathbb{D})$ à un autre espace naturel, à savoir

$$H^2(\mathbb{T}) = \left\{ \mathbf{f} \in L^2(\mathbb{T});\ \hat{\mathbf{f}}(n) = 0 \ si\ n < 0 \right\}\,.$$

De façon précise, à une fonction $f \in H^2(\mathbb{D})$ est associée la fonction $\mathbf{f} \in H^2(\mathbb{T})$ dont les coefficients de Fourier d'indices positifs sont les coefficients de Taylor de f, et à une fonction $\mathbf{f} \in H^2(\mathbb{T})$ est associée la fonction $f \in H^2(\mathbb{D})$ définie par $f(z) = \sum_0^\infty \hat{\mathbf{f}}(n) z^n$. Pour une fonction $f \in H^2(\mathbb{D})$, on notera toujours $\mathbf{f}$ l'élément de $H^2(\mathbb{T})$ correspondant.

Le produit scalaire de deux fonctions $f, g \in H^2(\mathbb{D})$ correspond au produit scalaire usuel sur $L^2(\mathbb{T})$:

$$\langle f, g \rangle = \langle \mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle = \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})\,\overline{g(e^{i\theta})}\,\frac{d\theta}{2\pi}\,.$$

Si $f \in H^2(\mathbb{D})$, la fonction $\mathbf{f}$ peut être considérée comme la « valeur au bord » de la fonction f. Cette interprétation est justifiée par la remarque suivante.

Remarque 3.8.6. *Si* $F \in A(\mathbb{D})$, *alors* $f = F_{|\mathbb{D}} \in H^2(\mathbb{D})$ *et* $\mathbf{f} = F_{|\partial\mathbb{D}}$.

Preuve. Comme toute fonction continue sur $\partial\mathbb{D}$, la fonction $F_{|\partial\mathbb{D}}$ est de carré intégrable. De plus, d'après la remarque 3.4.3, ses coefficients de Fourier d'indices strictement négatifs sont nuls, et ses coefficients de Fourier d'indices positifs sont les coefficients de Taylor de f.

Compte tenu de cette remarque, le résultat suivant étend à $H^2(\mathbb{D})$ la proposition 3.8.4.

Théorème 3.8.7. *Si* $f \in H^2(\mathbb{D})$, *alors, pour tout point* $a \in \mathbb{D}$, *on a*

$$f(a) = \langle \mathbf{f}, k_a \rangle\,,$$

où k *est le noyau de Cauchy du disque unité et* $\langle\ ,\ \rangle$ *est le produit scalaire usuel sur* $L^2(\mathbb{T})$.

Notons que la fonction k_a appartient à $\mathrm{H}^2(\mathbb{T})$, car la fonction $\zeta \mapsto \frac{1}{1-\overline{a}\zeta}$ est holomorphe au voisinage de $\overline{\mathbb{D}}$, donc sa restriction à $\overline{\mathbb{D}}$ appartient à $\mathrm{A}(\mathbb{D})$. Le produit scalaire peut donc également être pris au sens de l'espace H^2.

On va donner deux démonstrations du théorème 3.8.7. Elles sont en fait quasiment identiques, mais quelque peu différentes dans l'esprit. La première est simplement une *vérification* de l'identité à obtenir. La seconde est plus « conceptuelle » : on montre par un argument abstrait qu'il *existe* une formule intégrale de représentation, et on détermine ensuite précisément cette formule. Les deux démonstrations utilisent le lemme suivant.

Lemme 3.8.8. *Pour tout point $a \in \mathbb{D}$, l'application $f \mapsto f(a)$ est une forme linéaire continue sur $\mathrm{H}^2(\mathbb{D})$.*

Preuve. La linéarité est évidente. D'autre part, si $f \in \mathrm{H}^2(\mathbb{D})$, $f(z) = \sum_0^\infty c_n z^n$, alors, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$|f(a)| \leqslant \left(\sum_0^\infty |c_n|^2\right)^{1/2} \left(\sum_0^\infty |a|^{2n}\right)^{1/2},$$

autrement dit $|f(a)| \leqslant \mathrm{C}\|f\|_{\mathrm{H}^2}$, où $\mathrm{C} = \frac{1}{\sqrt{1-|a|^2}}$. Cela prouve la continuité.

*Première preuve du théorème.*3.8.7. Fixons $a \in \mathbb{D}$. Par définition de k_a, on a $k_a(\zeta) \equiv \sum_{n\geqslant 0} \overline{a}^n \zeta^n$, où la série converge normalement sur $\mathbb{T}$; en particulier, $\hat{k}_a(n) = \overline{a}^n$ pour tout $n \geqslant 0$.

Si $f(z) = z^n$ pour un certain entier $n \geqslant 0$, alors

$$\langle \mathbf{f}, k_a \rangle = \int_0^{2\pi} e^{in\theta}\, \overline{k_a(e^{i\theta})}\, \frac{d\theta}{2\pi} = \overline{\hat{k}_a(n)} = a^n = f(a)\,.$$

Par linéarité, on a donc $\langle \mathbf{f}, k_a \rangle = f(a)$ pour toute fonction polynomiale f. Comme les fonctions polynomiales sont denses dans $\mathrm{H}^2(\mathbb{D})$ – par définition même de la norme de $\mathrm{H}^2(\mathbb{D})$ – et comme les applications $f \mapsto \langle \mathbf{f}, k_a \rangle$ et $f \mapsto f(a)$ sont des formes linéaires continues sur $\mathrm{H}^2(\mathbb{D})$, le résultat est en fait valable pour toute fonction $f \in \mathrm{H}^2(\mathbb{D})$, ce qui termine la démonstration.

Deuxième preuve. Fixons $a \in \mathbb{D}$. Comme $\mathrm{H}^2(\mathbb{D})$ est un espace de Hilbert, la forme linéaire continue $f \mapsto f(a)$ se « représente » par un élément de $\mathrm{H}^2(\mathbb{D})$. Autrement dit, il existe une fonction $\mathrm{K}_a \in \mathrm{H}^2(\mathbb{D})$ telle que pour toute fonction $f \in \mathrm{H}^2(\mathbb{D})$, on ait

$$f(a) = \langle f, \mathrm{K}_a \rangle = \langle \mathbf{f}, \mathbf{K}_a \rangle\,.$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, notons e_n la fonction de $\mathrm{H}^2(\mathbb{D})$ définie par $e_n(z) = z^n$. Par définition de $\mathrm{H}^2(\mathbb{D})$, la suite (e_n) est une base hilbertienne de $\mathrm{H}^2(\mathbb{D})$. En écrivant $\mathrm{K}_a(z) = \sum_0^\infty c_n z^n$, on a donc

$$c_n = \langle \mathrm{K}_a, e_n \rangle$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$.

D'autre part, on a également

$$\langle \mathrm{K}_a, e_n \rangle = \overline{\langle e_n, \mathrm{K}_a \rangle} = \overline{e_n(a)} = \overline{a}^n$$

par définition de K_a. On obtient ainsi $c_n = \overline{a}^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, d'où

$$\mathrm{K}_a(z) = \sum_0^\infty \overline{a}^n z^n = \frac{1}{1 - \overline{a}z} \cdot$$

On a donc $\mathbf{K}_a = k_a$, ce qui termine la démonstration.

Le raisonnement employé dans la deuxième démonstration du théorème 3.8.7 est extrêmement général, et conduit à la notion de noyau reproduisant.

De façon précise, soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert constitué de fonctions définies sur un ensemble Z, et supposons que les évaluations $a \mapsto f(a)$ soient continues sur $\mathcal{H}$. Sous ces hypothèses, à tout point $a \in \mathrm{Z}$ est associée une unique fonction $\mathrm{K}_a \in \mathcal{H}$ telle que

$$\forall f \in \mathcal{H} \quad f(a) = \langle f, \mathrm{K}_a \rangle \ .$$

La fonction $\mathrm{K} : \mathrm{Z} \times \mathrm{Z} \to \mathbb{C}$ définie par

$$\mathrm{K}(a\,, b) = \mathrm{K}_a(b) = \langle \mathrm{K}_a, \mathrm{K}_b \rangle$$

s'appelle le **noyau reproduisant** de l'espace $\mathcal{H}$.

Lorsqu'on connaît une base hilbertienne de l'espace $\mathcal{H}$, il est parfois possible, en procédant comme plus haut, de déterminer explicitement le noyau reproduisant de $\mathcal{H}$ et d'obtenir ainsi une formule de représentation pour les fonctions de $\mathcal{H}$. Voir à ce sujet l'exercice 3.96.

Exercices

3.1. Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ définie par $f(0) = 0$ et $f(z) = \frac{z^3}{\overline{z}}$ si $z \neq 0$. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$, et déterminer ses points de $\mathbb{C}$-dérivabilité.

3.2. Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ définie par $f(0) = 0$ et $f(z) = e^{-1/z^4}$ si $z \neq 0$.

1) Montrer que f admet des dérivées partielles en 0, et que l'équation de Cauchy-Riemann est vérifiée en ce point.

2) La fonction f est elle holomorphe ?

3.3. Écrire l'équation de Cauchy-Riemann $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$ en coordonnées polaires.

3.4. Que peut-on dire d'une fonction holomorphe ne prenant que des valeurs réelles ?

3.5. (Un théorème de Rolle complexe.)

Soit f une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$.

1) Soit $h \in \mathbb{C}$. Calculer les dérivées des fonctions φ et ψ définies sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(t) = \langle f(a+th), h\rangle$ et $\psi(t) = \langle if(a+th), h\rangle$, où $\langle\ ,\ \rangle$ est le produit scalaire usuel sur $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$. On exprimera ces dérivées à l'aide de $\mathrm{Re}(f')$ et de $\mathrm{Im}(f')$.

2) Soient a et b deux points de $\mathbb{C}$ distincts. On suppose qu'on a $f(b) = f(a)$. Montrer qu'il existe deux points $c_1, c_2 \in]a;b[$ tels que $\mathrm{Re}(f'(c_1)) = 0$ et $\mathrm{Im}(f'(c_2)) = 0$.

3.6. Soit f une fonction holomorphe. Exprimer $\Delta|f|^2$ à l'aide de f'.

3.7. (Principe du maximum.)

On suppose Ω borné. En utilisant l'exercice précédent et un exercice du chapitre 1, montrer que si $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{C}$ est continue sur $\overline{\Omega}$ et holomorphe dans Ω, alors $\sup_{\overline{\Omega}} |f| = \sup_{\partial\Omega} |f|$.

3.8. Soient $f_1, \ldots, f_n$ des fonctions holomorphes sur un ouvert connexe. On suppose que la fonction $\sum_1^n |f_i|^2$ est constante. Montrer que toutes les f_i sont constantes.

3.9. Démontrer la **formule d'Euler** : pour tout nombre complexe z, on a

$$e^z = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n .$$

Cette formule est-elle valable dans une algèbre de Banach arbitraire ?

3.10. Soit Θ une détermination $\mathcal{C}^\infty$ de l'argument sur un ouvert $V \subset \mathbb{C}^*$. Déterminer $d\Theta$.

3.11. Soit k un entier supérieur ou égal à 2. Montrer qu'il n'existe pas de détermination continue de $z^{1/k}$ sur le cercle $\mathbb{T}$.

3.12. Soit $\lambda > 0$, et soit Φ_λ la détermination holomorphe de z^λ dans $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}^-$ obtenue en choisissant l'argument dans $]-\pi;\pi[$.

1) Pour $\beta \in]0;\pi[$, on note S_β le secteur $\{|\operatorname{Arg}(z)| < \beta\}$. À quelle condition – portant sur β – l'application Φ_λ est-elle injective sur S_β ?

2) Déterminer l'image par Φ_λ du secteur $S_{\pi/2\lambda}$, et calculer $\Phi_\lambda^{-1}(w)$ pour $w \in \Phi_\lambda(S_{\pi/2\lambda})$.

3.13. Montrer que la fonction $\cos : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est surjective, et pour $a \in \mathbb{C}$ donné, déterminer toutes les solutions de l'équation $\cos z = a$.

3.14. Montrer que les solutions de l'équation $\tan z = z$ sont réelles ou imaginaires pures.

3.15. Montrer que la suite $(\tan(nz))$ converge uniformément sur tout compact de $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$.

3.16. Déterminer $M = \sup\{|\sin z|;\ z \in \overline{\mathbb{D}}\}$.

3.17. Montrer que la fonction $z \mapsto \cos(\sqrt{z})$, définie a priori sur $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}^-$, se prolonge en une fonction entière dont on déterminera la série de Taylor en 0.

3.18. Déterminer les rayons de convergence des séries entières suivantes. $\sum n^\alpha z^n$, $\alpha > 0$; $\sum n^n z^n$; $\sum \frac{n^\alpha}{n!} z^n$, $\alpha > 0$; $\sum \cos((1+i)n) z^n$; $\sum (1+a^n) \frac{z^n}{n}$, $a > 0$; $\sum a^n z^{n^2}$, $a > 0$; $\sum \sin(n\pi\sqrt{3}) z^n$; $\sum z^{[\sqrt{n}]}$, où [ ] désigne la partie entière.

3.19. Soit (a_n) une suite de nombres complexes admettant une limite $l \in \mathbb{C}$.

1) Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{a_n}{n!} z^n$?

2) Déterminer $\lim_{x \to +\infty} e^{-x} \sum_0^\infty \frac{a_n}{n!} x^n$.

3.20. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = \sum_0^\infty e^{-n} \cos(n^2 x)$. Montrer que f est de classe C^∞ et que le rayon de convergence de sa série de Taylor en 0 est nul.

3.21. Montrer que $f(x) = \sum_0^\infty x^{n^2}$ est équivalent à $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{1-x}}$ quand x tend vers 1^-.

3.22. (Critères d'Abel.)

Soit (a_n) une suite de fonctions définies sur un même ensemble X, et soit (b_n) une suite de fonctions définies sur un même ensemble Y.

1) On suppose que les sommes partielles de la série $\sum a_n$ sont uniformément bornées sur X, que $b_n(y)$ tend vers 0 uniformément sur Y, et que la série $\sum (b_{n+1} - b_n)$ est uniformément absolument convergente sur Y. Montrer que la série de fonctions $\sum a_n(x)\, b_n(y)$ converge uniformément sur $X \times Y$.

2) On suppose que la série $\sum a_n$ converge uniformément sur X, que la suite (b_n) est uniformément bornée, et qu'il existe une constante C telle que $\sum_0^\infty |b_{n+1}(y) - b_n(y)| \leqslant C$ pour tout $y \in Y$. Montrer que la série $\sum a_n(x)\, b_n(y)$ converge uniformément sur $X \times Y$.

3.23. 1) En utilisant un des critères d'Abel (exercice précédent), montrer que la série $\sum \frac{z^n}{n}$ converge uniformément sur tout compact de $\overline{\mathbb{D}}\backslash\{1\}$.

2) En déduire que pour tout point $\zeta \in \mathbb{T}\backslash\{1\}$, on a

$$\sum_0^\infty \frac{\zeta^n}{n} = -\operatorname{Log}(1-\zeta)\ .$$

3) Pour $x \in]0\,;2\pi[$, établir les formules

$$\sum_1^\infty \frac{\cos(nx)}{n} = -\log\left|2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right|\ ,$$

$$\sum_1^\infty \frac{\sin(nx)}{n} = \frac{\pi - x}{2}\ .$$

3.24. (Théorème d'Abel.)

Soit $S = \sum c_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R \in]0\,;+\infty[$. On suppose que la série $\sum c_n \zeta^n$ converge pour un certain point $\zeta \in \partial D(0,R)$.

1) En utilisant un des critères d'Abel (exercice 3.22), montrer que la série S converge uniformément dans tout « secteur » du type

$$\Delta(\zeta, C) = \{z \in D(0,R);\ |z-\zeta| \leqslant C(R-|z|)\}\ ,\ C>0\ .$$

Essayer de dessiner un tel secteur.

2) Montrer que tout « cornet de glace » du type

$$\{z \in D(0,R);\ |\operatorname{Arg}(z-\zeta)| \leqslant \theta_0\},$$

où $\theta_0 \in [0, \frac{\pi}{2}[$, est contenu dans un $\Delta(\zeta, C)$.

3) On note f la somme de la série S dans le disque $D(0,R)$. Montrer que $f(r\zeta)$ tend vers $\sum_0^\infty c_n\zeta^n$ quand r tend vers 1^-.

3.25. Soient $A = \sum a_n$ et $B = \sum b_n$ deux séries de nombres complexes. On note $C = \sum c_n$ la « série produit », définie par $c_n = \sum_0^n a_k b_{n-k}$. En utilisant le théorème d'Abel (exercice précédent), montrer que si les trois séries A, B, C sont convergentes, alors

$$\sum_0^\infty c_n = \left(\sum_0^\infty a_n\right) \times \left(\sum_0^\infty b_n\right)\ .$$

3.26. (Réciproques partielles au théorème d'Abel.)

Soit $S = \sum c_n z^n$ une série entière de rayon de convergence égal à 1. On suppose que $f(x) = \sum_0^\infty c_n x^n$ admet une limite l quand x tend vers 1^-.

1) Peut-on affirmer que la série $\sum c_n$ est convergente ?

2) Qu'en est-il si tous les c_n sont positifs ?

3) *a*) Montrer que pour tout $x < 1$ et pour tout entier n, on a

$$\left|\sum_0^n c_k - f(x)\right| \leqslant (1-x)\sum_0^n |kc_k| + \frac{1}{1-x}\sup_{k>n}|c_k|\ .$$

b) En déduire que si $c_n = o(1/n)$, alors la série $\sum c_n$ est convergente et a pour somme l (*théorème de Tauber*).

3.27. Montrer qu'on peut déduire le théorème de Cauchy de la formule de Cauchy.

3.28. Calculer $I = \displaystyle\int_{\partial D} \frac{\cos(\frac{\pi}{3}z)}{(2z+1)^3(4z+1)}\,dz$.

3.29. Calculer $I = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{(i+t)^2}$.

3.30. Montrer que pour tout $a \in \mathbb{C}$, la fonction $t \mapsto e^{-(t+a)^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, et qu'on a

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(t+a)^2}dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}dt\ .$$

3.31. En utilisant l'exercice précédent, déterminer la transformée de Fourier de la fonction $t \mapsto e^{-t^2}$.

3.32. En intégrant e^{-z^2} sur le bord des secteurs $\{Re^{i\theta};\ 0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{4}\}$, $R > 0$, montrer que les intégrales $\int_0^\infty \cos(t^2)\,dt$ et $\int_0^\infty \sin(t^2)\,dt$ existent en un sens à préciser, et qu'on a

$$\int_0^\infty \cos(t^2)\,dt = \sqrt{\frac{\pi}{8}} = \int_0^\infty \sin(t^2)\,dt\ .$$

3.33. En intégrant $\frac{e^{iz}}{z}$ sur le bord des demi-couronnes $\{\mathrm{Im}(z) \geqslant 0,\ \varepsilon \leqslant |z| \leqslant R\}$, $0 < \varepsilon < R$, calculer l'intégrale

$$I = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$$

après avoir justifié son existence.

3.34. Soit u une fonction holomorphe dans $\mathbb{C}^*$. Montrer qu'il existe une fonction entière f telle que pour tout $r > 0$, on ait

$$f(z) = \int_{\partial D(0,r)} \frac{u(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta$$

dans le disque $D(0,r)$.

3.35. Pour $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$, on définit $\Phi_z : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ par $\Phi_z(t) = \frac{1}{t-\bar{z}}$.

1) Montrer que toutes les fonctions Φ_z appartiennent à $L^2(\mathbb{R})$.

2) On note $\mathbf{U}$ le demi-plan supérieur $\{\mathrm{Im}(z) > 0\}$. Soit f une fonction holomorphe au voisinage de $\overline{\mathbf{U}}$. On suppose que $f(z)$ tend vers 0 quand $|z|$ tend vers l'infini, $\mathrm{Im}(z) > 0$, et on suppose aussi que $\mathbf{f} = f_{|\mathbb{R}}$ appartient à $L^2(\mathbb{R})$. Montrer que pour tout point $z \in \mathbf{U}$, on a la formule de reproduction

$$f(z) = \langle \mathbf{f}, \Phi_z \rangle\ ,$$

où $\langle\ ,\ \rangle$ est le produit scalaire usuel sur $L^2(\mathbb{R})$.

3.36. Soit φ une fonction holomorphe au voisinage d'un segment $\Gamma = [ia\,;ib]$ de l'axe imaginaire. Pour $z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma$, on pose $\Phi(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_\Gamma \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta$. Montrer que pour tout point $\zeta \in]ia\,;ib[$, on a

$$\varphi(\zeta) = \lim_{\substack{z \to \zeta \\ \mathrm{Re}(z) < 0}} \Phi(z) - \lim_{\substack{z \to \zeta \\ \mathrm{Re}(z) > 0}} \Phi(z)\,.$$

3.37. Montrer que si f est une fonction de classe C^1 au voisinage de $\overline{\mathbb{D}}$, alors, pour tout point $a \in \mathbb{D}$, on a

$$f(a) = -\frac{1}{\pi}\int_{\overline{\mathbb{D}}} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\,\frac{1-|z|^2}{1-\bar{z}a}\,\frac{dm(z)}{z-a} + \frac{1}{\pi}\int_{\overline{\mathbb{D}}} f(z)\,\frac{dm(z)}{(1-\bar{z}a)^2}\ .$$

3.38. Dans tout l'exercice, $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, ce qui signifie que la fonction $\theta \mapsto f(e^{i\theta})$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$; on note g la fonction $\theta \mapsto f(e^{i\theta})$.

1) Soit $\mathrm{F} : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ définie par

$$\mathrm{F}(z) = f\left(\frac{z}{|z|}\right).$$

Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$, et donner une expression de $\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial z}(re^{i\theta})$ et $\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial \overline{z}}(re^{i\theta})$ à l'aide de la fonction g.

2) *a*) Montrer que pour tout $z \in \overline{\mathbb{D}}\backslash\{0\}$, la fonction $w \mapsto \frac{1}{z-w}\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial \overline{w}}(w)$ – arbitrairement définie en z et en 0 – est intégrable sur $\mathbb{D}$.

b) En appliquant la formule de Cauchy-Pompeiu dans des couronnes du type $\{\varepsilon < |w| < 1\}$, montrer que pour tout $z \in \mathbb{D}\backslash\{0\}$, on a

$$\mathrm{F}(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\partial\mathbb{D}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta + \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{D}} \frac{1}{z-w}\,\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial \overline{w}}\, dm(w).$$

c) En utilisant l'exercice 3.84, montrer qu'il existe des constantes A, B telles que pour tout $a \in \mathbb{T}$, pour tout $\varepsilon \in]0\,;1[$ et pour tout $z \in \overline{\mathbb{D}} \cap \mathrm{D}(a, \varepsilon/2)$, on ait

$$\int_{\mathrm{D}(a,\varepsilon)} \frac{1}{|z-w|}\left|\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial \overline{w}}\right| dm(w) \leqslant \mathrm{A}\varepsilon$$

et

$$\left|\int_{\mathbb{D}\backslash\overline{\mathrm{D}}(a,\varepsilon)} \left(\frac{1}{z-w} - \frac{1}{a-w}\right)\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial \overline{w}}\, dm(w)\right| \leqslant \mathrm{B}\,\frac{|z-a|}{\varepsilon}.$$

d) En déduire que pour tout $a \in \mathbb{T}$, on a

$$\lim_{\substack{z\to a \\ |z|<1}} \frac{1}{2i\pi}\int_{\partial\mathbb{D}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta = f(a) - \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{D}} \frac{1}{a-w}\,\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial \overline{w}}\, dm(w).$$

3) Soit $a \in \mathbb{T}$. Montrer que pour tout $\mathrm{R} > 1$, on peut écrire

$$\lim_{\substack{z\to a \\ |z|>1}} \int_{\{1<|w|<\mathrm{R}\}} \frac{1}{z-w}\,\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial \overline{w}} dm(w) = \int_{\{1<|w|<\mathrm{R}\}} \frac{1}{a-w}\,\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial \overline{w}}\, dm(w).$$

En déduire l'existence de la limite

$$\lim_{\substack{z\to a \\ |z|>1}} \int_{\partial\mathbb{D}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta.$$

4) Montrer que pour tout point $a \in \mathbb{T}$, on a

$$f(a) = \lim_{\substack{z\to a \\ |z|<1}} \frac{1}{2i\pi}\int_{\partial\mathbb{D}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta - \lim_{\substack{z\to a \\ |z|>1}} \frac{1}{2i\pi}\int_{\partial\mathbb{D}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta.$$

3.39. Soit f une fonction holomorphe dans $\mathbb{D}$, $f(z) = \sum_0^\infty a_n z^n$.

1) Montrer qu'on définit une fonction holomorphe dans le demi-plan $\{\mathrm{Re}(z) < 1/2\}$ en posant

$$\mathrm{F}(z) = \frac{1}{1-z}\, f\left(\frac{z}{1-z}\right) .$$

2) Montrer que dans le disque $\mathrm{D}(0\,;1/2)$, on a

$$\mathrm{F}(z) = \sum_0^\infty \left(\sum_{k=0}^n \mathrm{C}_n^k\, a_k \right) z^n .$$

3.40. (Nombres de Fibonacci.)

0) Montrer que la fonction f définie par $f(z) = \frac{1}{1-z-z^2}$ est holomorphe au voisinage de 0.

1) En décomposant f en éléments simples, déterminer ses coefficients de Taylor a_n en 0.

2) En utilisant l'identité $(1 - z - z^2)f(z) = 1$ montrer que la suite (a_n) vérifie la relation de récurrence linéaire

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n .$$

En déduire que les a_n sont des entiers positifs. Les a_n sont appelés les **nombres de Fibonacci**.

3.41. (Nombres de Bernoulli.)

0) Montrer que la fonction $z \mapsto \frac{z}{e^z-1}$ se prolonge en une fonction holomorphe au voisinage de 0. On écrit son développement de Taylor en 0 sous la forme

$$\frac{z}{e^z-1} = \sum_0^\infty \frac{\mathrm{B}_n}{n!}\, z^n .$$

Les nombres B_n sont appelés les **nombres de Bernoulli**.

1) Calculer $\mathrm{B}_0, \mathrm{B}_1$, et montrer que pour tout $n \geqslant 2$, on a

$$\sum_0^{n-1} \mathrm{C}_n^k\, \mathrm{B}_k = 0 .$$

En déduire que les B_n sont rationnels.

2) Vérifier l'identité $\frac{1}{e^z-1} = -\frac{1}{2} + \frac{i}{2} \operatorname{cotan} \frac{iz}{2}$, puis montrer qu'on a $\mathrm{B}_{2p+1} = 0$ pour tout $p \geqslant 1$.

3) Montrer que la fonction $z \mapsto z \operatorname{cotan} z$ se prolonge en une fonction holomorphe au voisinage de 0, et écrire son développement de Taylor en 0 à l'aide des nombres de Bernoulli.

3.42. (Polynômes de Bernoulli.)

0) Montrer que pour tout point $w \in \mathbb{C}$, la fonction $z \mapsto \frac{ze^{wz}}{e^z-1}$ se prolonge en une fonction holomorphe au voisinage de 0. On écrit son développement de Taylor en 0 sous la forme

$$\frac{ze^{wz}}{e^z-1} = \sum_0^\infty \frac{\mathrm{P}_n(w)}{n!}\, z^n .$$

1) Montrer que les P_n sont des fonctions polynomiales à coefficients rationnels ; plus précisément montrer qu'on a

$$P_n(w) = \sum_0^n C_n^k B_k w^k$$

pour tout $n \geqslant 0$, où les B_k sont les nombres de Bernoulli, introduits à l'exercice précédent. Les polynômes P_n s'appellent les **polynômes de Bernoulli**.

2) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, établir les relations

$$P_n' = nP_{n-1}\,,$$
$$P_{n+1}(w+1) - P_n(w) = nw^{n-1}\,,$$
$$P_n(1-w) = (-1)^n P_n(w)\,.$$

3.43. (Points singuliers d'une série entière.)

Dans tout l'exercice, $S = \sum_{n\geqslant 0} c_n z^n$ est une série entière de rayon de convergence R fini et non nul. On note f la somme de cette série dans le disque $D(0,R)$. On dit qu'un point $\zeta \in \partial D(0,R)$ est un **point régulier** pour S si la fonction f admet un prolongement holomorphe au voisinage de ζ, autrement dit s'il existe un ouvert Ω contenant $D(0,R) \cup \{\zeta\}$ et une fonction $F \in \mathcal{H}(\Omega)$ telle que $F \equiv f$ dans $D(0,R)$. Un point de $\partial D(0,R)$ non régulier pour S est dit **singulier**. On note sing(S) l'ensemble des points singuliers pour S.

1) Déterminer sing(S) lorsque $S = \sum_{n\geqslant 0} z^n$ et lorsque $S = \sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n} z^n$. Y-a-t-il un lien entre la régularité d'un point $\zeta \in \partial D(0,R)$ et la convergence de la série $\sum c_n \zeta^n$?

2) Montrer que sing(S) est un fermé de $\partial D(0,R)$.

3) Montrer que sing(S) est toujours *non vide*.

3.44. On garde les notations de l'exercice précédent.

1) Pour $a \in D(0,R)$, on note $r(a)$ le rayon de convergence de la série de Taylor $S_a = \sum \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n$, et on définit les points réguliers et singuliers pour S_a exactement comme dans l'exercice précédent.

a) Montrer que pour tout $a \in D(0,R)$, on a $r(a) \geqslant R - |a|$.

b) Montrer que si $a \neq 0$ et si $r(a) = R - |a|$, alors tous les points du cercle $\partial D(a, r(a))$ sauf peut-être $\zeta = R\frac{a}{|a|}$ sont réguliers pour la série S_a. En déduire que pour $a \neq 0$, on a $r(a) = R - |a|$ si et seulement si $\zeta = R\frac{a}{|a|}$ est un point singulier pour la série S.

2) On suppose que tous les c_n sont positifs.

a) Montrer que pour tout $a \in D(0,R)$, on a $r(a) \geqslant r(|a|)$.

b) En considérant les points du cercle $\{|a| = R/2\}$, en déduire, à l'aide de 1)*b*), que le point $\zeta = R$ est un point singulier pour S (*théorème de Pringsheim*).

3.45. On garde les notations de l'exercice 3.43, et on suppose que R est égal à 1. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $s_n = \sum_0^n c_k$.

1) Montrer que pour tout $z \in \mathbb{D}$, on a $f(z) = (1-z)\sum_{n=0}^{\infty} s_n z^n$.

2) En déduire que si les c_k sont réels et si $\lim_{n\to\infty} s_n = +\infty$, alors 1 est un point singulier pour S.

3) Le résultat de 2) est-il encore valable si on suppose seulement qu'on a $\lim_{n\to\infty} |s_n| = +\infty$?

3.46. Soit S la série entière $\sum z^{n!}$, et soit f sa somme dans le disque unité $\mathbb{D}$.

1) Montrer que si $\zeta_0 \in \partial\mathbb{D}$ est de la forme $e^{2i\pi\alpha}$, où $\alpha \in \mathbb{Q}$, alors $\lim_{r\to 1-} |f(r\zeta_0)| = +\infty$.

2) Montrer que tous les points de $\partial\mathbb{D}$ sont singuliers pour S (voir l'exercice 3.43).

3.47. (Théorème des lacunes d'Hadamard.)

Dans tout l'exercice, $S = \sum c_n z^{p_n}$ est une série entière de rayon de convergence égal à 1. On suppose de plus que la suite (p_n) est **lacunaire**, ce qui signifie qu'il existe une constante $c > 1$ telle que $p_{n+1}/p_n \geqslant c$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Le but de l'exercice est de montrer que tous les points du cercle $\mathbb{T}$ sont singuliers pour S (voir l'exercice 3.43). Dans toute la suite, on note f la somme de la série S dans le disque unité $\mathbb{D}$.

1) Montrer qu'il existe un entier $M \geqslant 1$ tel que $Mp_{n+1} > (M+1)p_n$ pour tout $n \geqslant 0$.

2) Soit Q le polynôme $\frac{1}{2}(X^M + X^{M+1})$.

a) Montrer qu'on a $|Q(z)| < 1$ pour tout $z \in \overline{\mathbb{D}}\backslash\{1\}$.

b) On note F la fonction holomorphe définie dans $\mathbb{D}$ par $F(w) = f(Q(w))$, et $\sum_0^\infty b_m w^m$ son développement en série entière dans $\mathbb{D}$. En utilisant 1), montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a l'égalité de polynômes

$$\sum_0^n c_k Q^{p_k} = \sum_0^{(M+1)p_n} b_m X^m .$$

3) On suppose que le point $\zeta = 1$ est un point régulier pour S.

a) En utilisant 2)*a*), montrer que F se prolonge en une fonction holomorphe au voisinage de $\overline{\mathbb{D}}$.

b) En utilisant 2)*b*), en déduire une contradiction avec l'hypothèse faite sur le rayon de convergence de S.

4) Conclure.

3.48. Soit A une algèbre de Banach avec unité, et soit $a \in A$ vérifiant $\|a\| < 1$. Pour $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$, $f(z) = \sum_0^\infty c_n z^n$, on pose

$$f(a) = \sum_0^\infty c_n a^n .$$

1) Justifier la définition de $f(a)$, et montrer que l'application $f \mapsto f(a)$ est un homomorphisme de l'algèbre $\mathcal{H}(\mathbb{D})$ dans A.

2) *a*) Soit r vérifiant $\|a\| < r < 1$. En utilisant convenablement l'inégalité de Cauchy-Schwarz et la formule de Parseval, montrer que si $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$, alors

$$\|f(a)\| \leqslant \sqrt{\frac{r^2}{r^2 - \|a\|^2}}\ \|\mathbf{f}_r\|_{L^2(\mathbb{T})} ,$$

où on a posé $\mathbf{f}_r(e^{i\theta}) = f(re^{i\theta})$.

b) Montrer que l'application $f \mapsto f(a)$ est continue de $\mathcal{H}(\mathbb{D})$ dans A.

3.49. Soit f une fonction holomorphe dans un disque $D(0,R)$, $f(z)=\sum_0^\infty c_n z^n$. Montrer que pour tout $r < R$, on a

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 \frac{r^{2n+2}}{2n+2} = \frac{1}{2\pi} \int_{D(0,r)} |f|^2 \, dm \, .$$

3.50. Soit f une fonction holomorphe dans Ω. Montrer que pour tout point $z \in \Omega$ et pour tout entier $n \geqslant 0$, on a

$$|f^{(n)}(z)| \leqslant \frac{n!(n+1)^{1/2}}{\sqrt{\pi} r(z)^{n+1}} \|f\|_{L^2(\Omega)} \, ,$$

où $r(z) = d(z, \partial\Omega)$. On pourra utiliser l'exercice précédent.

3.51. Dans tout l'exercice, $p \in [1;\infty]$ est fixé.

1) En utilisant la formule de la moyenne pour les disques (corollaire 3.3.12) montrer que pour tout point $z \in \Omega$ et pour toute fonction $f \in \mathcal{H}(\Omega) \cap L^p(\Omega)$, on a

$$|f(z)| \leqslant \frac{1}{(\pi d(z, \partial\Omega)^2)^{1/p}} \|f\|_{L^p(\Omega)} \, .$$

2) On définit l'**espace de Bergman** $B^p(\Omega)$ par

$$B^p(\Omega) = \left\{ f \in \mathcal{H}(\Omega); \int_\Omega |f|^p dm < +\infty \right\} .$$

Montrer que $(B^p(\Omega), \| \ \|_p)$ est un espace de Banach, et que la convergence dans $B^p(\Omega)$ entraîne la convergence uniforme sur les compacts.

3.52. On dit qu'une fonction entière est **de type exponentiel** s'il existe une constante C telle que $f(z) = O(e^{C|z|})$ quand $|z|$ tend vers l'infini. La borne inférieure des nombres C vérifiant cette propriété s'appelle le **type** de la fonction f.

1) Montrer que les fonctions $z \mapsto e^z$ et $z \mapsto \sin z$ sont de type exponentiel 1.

2) Soit $C > 0$, et soit f une fonction entière de type exponentiel strictement inférieur à C. On note c_n les coefficients de Taylor de f.

a) Montrer qu'il existe $R > 0$ et une constante A tels que $|c_n| r^n \leqslant Ae^{Cr}$ pour tout $r > R$.

b) En déduire qu'on a $|c_n| = O(\frac{Ce}{n})^n$ quand n tend vers l'infini.

3) Soit f une fonction entière de type exponentiel C.

a) Montrer que la série entière $\sum n! c_n z^{n+1}$ a un rayon de convergence au moins égal à $1/C$.

b) Pour $|z| > C$, on pose

$$g(z) = \sum_0^\infty \frac{n! c_n}{z^{n+1}} \, .$$

Montrer que pour toute fonction entière h et pour tout $r > \mathrm{C}$, on a

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{\partial \mathrm{D}(0,r)} g(z)h(z)\,dz = \sum_0^\infty c_n h^{(n)}(0)\ .$$

c) Montrer que pour $|z| > \mathrm{C}$, on peut écrire

$$g(z) = \frac{1}{z}\int_0^\infty f\left(\frac{t}{z}\right) e^{-t}\,dt\ .$$

d) Déterminer la fonction g lorsque $f(z) = \sin(\pi z)$. Peut-on prolonger g en une fonction holomorphe dans un domaine plus grand ?

3.53. Montrer que la formule $f(z) = \sum_0^\infty \frac{n!}{n^n}\sin(nz)$ définit une fonction holomorphe dans un domaine à préciser.

3.54. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ une suite de nombres complexes, et soit $r > 1$. On suppose qu'on a $\sum_{-\infty}^{+\infty} |a_n| r^{|n|} < +\infty$. Montrer que les a_n sont les coefficients de Fourier d'une fonction $f \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$, et que la fonction f se prolonge en une fonction holomorphe dans la couronne $\{1/r < |z| < r\}$.

3.55. Montrer que les formules $f(z) = \int_0^\infty \frac{e^{-tz}}{1+t^2}\,dt$ et $g(z) = \int_0^\infty \frac{t\sin t}{t^2+z^2}\,dt$ définissent des fonctions holomorphes dans des domaines à préciser, et exprimer les dérivées de ces fonctions.

3.56. Soit $a > 0$ et soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ à support dans $[-a; a]$. Montrer que la formule

$$\mathrm{F}(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itz}\,\varphi(t)\,dt$$

définit une fonction entière, et que pour tout entier $n \geqslant 0$, on a $|\mathrm{F}(z)| = \mathrm{O}\left(|z|^{-n}\,e^{a\,|\mathrm{Im}(z)|}\right)$ quand $|z|$ tend vers l'infini.

3.57. (Théorème de Paley-Wiener.)

Soit F une fonction entière. On suppose qu'il existe un nombre $a > 0$ tel que pour tout entier $n \geqslant 0$, on a $|\mathrm{F}(z)| = \mathrm{O}\left(|z|^{-n}\,e^{a\,|\mathrm{Im}(z)|}\right)$ quand $|z|$ tend vers l'infini. Le but de l'exercice est de montrer qu'il existe une fonction $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ et à support dans $[-a; a]$, telle que

$$\mathrm{F}(z) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itz}\,\varphi(t)\,dt\ .$$

1) Quel est le seul candidat possible pour φ ? Montrer que ce candidat est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

2) En utilisant convenablement le théorème de Cauchy, montrer que pour tout $b \in \mathbb{R}$, on a

$$\varphi(t) \equiv \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{it\,(x+ib)}\,\mathrm{F}(x+ib)\,dx\ .$$

3) Déduire de 2) qu'on a $\varphi(t) = 0$ si $|t| > a$.
4) Conclure.

3.58. (Transformée de Laplace.)
Dans tout l'exercice, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est une fonction localement intégrable nulle sur $]-\infty\,;0\,[$.

1) *a*) Soit $s_0 \in \mathbb{C}$, et soit $x_0 = \mathrm{Re}(s_0)$. On suppose que l'intégrale

$$\int_0^\infty f(t)\, e^{-ts_0}\, dt$$

est absolument convergente. Montrer que si $s \in \mathbb{C}$ vérifie $\mathrm{Re}(s) > x_0$, alors l'intégrale $\int_0^\infty f(t)\, e^{-ts}\, dt$ est absolument convergente.

b) Montrer qu'il existe un unique nombre $x_a \in [-\infty; +\infty]$ tel que l'intégrale $\int_0^\infty f(t)\, e^{-ts}\, dt$ converge absolument pour $\mathrm{Re(s)} > x_a$ et ne converge pas absolument pour $\mathrm{Re(s)} < x_a$. On dit que x_a est l'**abscisse de convergence absolue de Laplace** de la fonction f.

c) Donner un exemple où $x_a = +\infty$.

2) *a*) Soit $s_0 \in \mathbb{C}$. On suppose que l'intégrale $\int_0^\infty f(t)\, e^{-ts_0}\, dt$ est convergente. En intégrant judicieusement par parties, montrer que si $s \in \mathbb{C}$ vérifie $\mathrm{Re}(s) > \mathrm{Re}(s_0)$, alors l'intégrale $\int_0^\infty f(t)\, e^{-ts}\, dt$ est convergente, la convergence étant de plus uniforme par rapport à s dans tout secteur angulaire du type $\mathrm{S}_\alpha = \{s;\ |\mathrm{Arg}(s - s_0)| \leqslant \alpha\}$, où $\alpha \in [0\,;\pi/2[$ est fixé.

b) Montrer qu'il existe un unique nombre $x_c \in [-\infty; +\infty]$ tel que l'intégrale $\int_0^\infty f(t)\, e^{-ts}\, dt$ converge pour $\mathrm{Re(s)} > x_c$ et diverge pour $\mathrm{Re(s)} < x_c$. On dit que x_c est l'**abscisse de convergence de Laplace** de la fonction f.

c) Donner un exemple où $x_c = +\infty$.

3) Montrer qu'on a toujours $x_c \leqslant x_a$. Y a-t-il égalité en général ?

4) On suppose $x_c < +\infty$. Montrer que la fonction $\mathcal{L}f$ définie par

$$\mathcal{L}f(s) = \int_0^\infty f(t)\, e^{-ts}\, dt$$

est holomorphe dans le demi-plan $\{\mathrm{Re}(s) > x_c\}$. La fonction $\mathcal{L}f$ s'appelle la **transformée de Laplace** de la fonction f.

5) *a*) Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Montrer que si l'intégrale $\int_0^\infty f(t)\, e^{-tx_0}\, dt$ converge, alors on a

$$\lim_{x \to x_0^+} \mathcal{L}f(x) = \int_0^\infty f(t)\, e^{-tx_0}\, dt\ .$$

b) En utilisant *a*), déterminer la valeur de l'intégrale $\mathrm{I} = \int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\, dt$.

6) On suppose $x_a < +\infty$. Montrer que si $\mathcal{L}f = 0$, alors $f = 0$. Que peut-on dire si on suppose seulement $x_c < +\infty$?

7) On suppose qu'on a $x_a < +\infty$ et qu'il existe un nombre réel $b > x_a$ tel que la fonction $y \mapsto \mathcal{L}f(b+iy)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$. Montrer que pour presque tout $t \in \mathbb{R}$, on peut écrire

$$f(t) = \frac{1}{2i\pi} \int_{b+i\mathbb{R}} \mathcal{L}f(z)\, e^{tz}\, dz\ .$$

3.59. On garde les notations de l'exercice précédent.

A. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ localement intégrable, nulle sur $]-\infty ; 0[$. On suppose qu'on a $x_a(f) < +\infty$. Montrer que pour tout $b > x_a$ fixé, $\mathcal{L}f(s)$ tend vers 0 quand $|s|$ tend vers $+\infty$ et $\mathrm{Re}(s) \geqslant b$. On pourra commencer par le cas où f est de classe $\mathcal{C}^1$ à support compact.

B. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$, et soit F une fonction holomorphe dans le demi-plan $\Pi = \{\mathrm{Re}(s) > x_0\}$. On fait les hypothèses suivantes :

(1) pour tout $b > x_0$ fixé, $\mathrm{F}(s)$ tend vers 0 quand $|s|$ tend vers $+\infty$ et $\mathrm{Re}(s) \geqslant b$;

(2) pour tout $b > x_0$, la fonction $y \mapsto \mathrm{F}(b+iy)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

On veut montrer qu'il existe une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continue, nulle sur $]-\infty ; 0[$, vérifiant $x_a(f) \leqslant x_0$, et telle que $\mathcal{L}f \equiv \mathrm{F}$ dans le demi-plan Π.

1) *a*) Soit $b > x_0$. Montrer que la formule

$$f_b(t) = \frac{1}{2i\pi} \int_{b+i\mathbb{R}} \mathrm{F}(z)\, e^{tz}\, dz$$

définit une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

b) En utilisant le théorème de Cauchy, montrer que la fonction f_b ne dépend pas de $b > x_0$. Dans la suite, on écrira donc f au lieu de f_b.

2) *a*) Soit $b > x_0$. On note $\Delta_{\mathrm{R}b}$ les demi-disques $\{b + \mathrm{R}e^{i\theta} ;\ -\pi/2 \leqslant \theta \leqslant \pi/2\}$, $\mathrm{R} > 0$. Pour $t < 0$, déterminer la limite de l'intégrale $\int_{\Delta_{\mathrm{R}b}} \mathrm{F}(z)\, e^{tz}\, dt$ quand R tend vers $+\infty$.

b) Montrer que la fonction f est nulle sur $]-\infty ; 0[$.

3) Montrer qu'on a $x_a(f) \leqslant x_0$ et que pour $x > b > x_0$, on peut écrire

$$\int_0^\infty f(t)\, e^{-tx}\, dt = \int_{b+i\mathbb{R}} \frac{\mathrm{F}(z)}{z-x}\, dz\ .$$

4) Conclure.

3.60. (Séries de Dirichlet.)

Dans ce qui suit, S est une **série de Dirichlet**, c'est à dire une série de fonctions de la forme

$$\mathrm{S}(z) = \sum a_n e^{-\lambda_n z}\ ,$$

où les a_n sont des nombres complexes, et (λ_n) est une suite strictement croissantes de nombres positifs tendant vers $+\infty$. Si $z \in \mathbb{C}$ et si la série $\mathrm{S}(z)$ converge, on note $f(z)$ la somme de cette série.

1) *a*) Soit $z_0 \in \mathbb{C}$. Montrer que si la série $\mathrm{S}(z_0)$ est absolument convergente, alors la série $\mathrm{S}(z)$ converge normalement dans le demi-plan $\{\mathrm{Re}(z) \geqslant \mathrm{Re}(z_0)\}$.

b) Montrer qu'il existe un unique nombre $x_a \in [-\infty ; +\infty]$ tel que la série $\mathrm{S}(z)$ converge absolument pour $\mathrm{Re}(z) > x_a$ et ne converge pas absolument pour $\mathrm{Re}(z) < x_a$. On dit que x_a est l'**abscisse de convergence absolue** de la série S.

2) *a*) Montrer que pour $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, et pour $w = x + iy \in \mathbb{C}$, avec $x \geqslant 0$, on a

$$\left| e^{-aw} - e^{-bw} \right| \leqslant \frac{|w|}{x} \left(e^{-ax} - e^{-bx} \right).$$

b) Soit $z_0 \in \mathbb{C}$. On suppose que la série $S(z_0)$ converge. Déduire de *a*) que la série $S(z)$ converge uniformément dans tout secteur angulaire du type $S_\alpha = \{z;\ |\operatorname{Arg}(z - z_0)| \leqslant \alpha\}$, $\alpha < \pi/2$. On pourra utiliser l'exercice 3.22.

c) Montrer qu'il existe un unique $x_c \in [-\infty ; +\infty]$ tel que la série $S(z)$ converge pour $\operatorname{Re}(z) > x_c$ et diverge pour $\operatorname{Re}(z) < x_c$. On dit que x_c est l'**abscisse de convergence** de la série S.

3) Montrer que f est holomorphe dans le demi-plan $\{\operatorname{Re}(z) > x_c\}$.

4) Montrer qu'on a $x_c \leqslant x_a \leqslant x_c + \mu$, où $\mu = \overline{\lim}_{n\to\infty} \frac{\log n}{\lambda_n}$.

5) On prend $\lambda_n = n$ pour tout n. Montrer qu'on a $x_a = x_c = \overline{\lim} \frac{\log |a_n|}{n}$. Quel résultat retrouve-t-on en appliquant 2)*b*) ?

6) Déterminer x_a et x_c dans les cas suivants.

a) $a_n = e^{-n^\alpha}$, $\lambda_n = n^\beta$ $(\alpha \geqslant 0\,,\ \beta > 0)$.

b) $a_n = 1$, $\lambda_n = \log n$.

c) $a_n = (-1)^n$, $\lambda_n = \log\log n$.

3.61. 1) Montrer que pour $s \in \mathbb{C}$ et $x \geqslant 1$, on a

$$\sum_{n \leqslant x} \frac{1}{n^s} = \frac{[x]}{x^s} + s \int_1^x \frac{[u]}{u^{s+1}}\, du\ ,$$

où $[x]$ désigne la partie entière de x.

2) En déduire que pour $\operatorname{Re}(s) > 1$, on a

$$\zeta(s) = \frac{s}{s-1} - s \int_1^\infty \frac{\{u\}}{u^{s+1}}\, du\ ,$$

où $\{u\}$ est la partie fractionnaire de u.

3) Montrer que la fonction $s \mapsto \zeta(s) - \frac{1}{1-s}$ se prolonge en une fonction holomorphe dans le demi-plan $\{\operatorname{Re}(z) > 0\}$.

3.62. En intégrant $e^{-x^2-y^2}$ en coordonnées polaires, calculer $\int_0^\infty e^{-t^2} dt$. En déduire la valeur de $\Gamma(\frac{1}{2})$.

3.63. Dans cet exercice, on note $\mathbf{B}_n$ la boule unité euclidienne $\mathbb{R}^n$, $\mathbf{S}^{n-1}$ la sphère unité, et σ la mesure de surface sur $\mathbf{S}^{n-1}$.

1) Calculer $I_n = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-x_1^2 - \cdots - x_n^2}\, dx_1 \ldots dx_n$. Vérifier d'autre part qu'on a $I_n = \sigma(\mathbf{S}^{n-1}) \int_0^\infty e^{-r^2} r^{n-1} dr$, et en déduire l'identité

$$\sigma(\mathbf{S}^{n-1}) = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}\ .$$

2) Exprimer $m(\mathbf{B}_n)$ à l'aide de $\sigma(\mathbf{S}^{n-1})$, et en déduire

$$m(\mathbf{B}_n) = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2+1)}\ .$$

3.64. 0) Montrer qu'on a $\Gamma(x) > 0$ pour tout $x > 0$.

1) Exprimer $\Gamma^{(n)}(x)$ sous forme intégrale pour $x > 0$ et $n \in \mathbb{N}$.

2) *a*) Montrer que pour tout $x > 0$, on a $\Gamma'(x)^2 \leqslant \Gamma(x)\Gamma''(x)$.

b) En déduire que la fonction $x \mapsto \log(\Gamma(x))$ est convexe sur $]0\,;+\infty[$; on dit que Γ est une fonction **logarithmiquement convexe**.

3) Redémontrer le résultat de 2)*b*) à l'aide de l'inégalité de Hölder.

3.65. (Une caractérisation de la fonction Γ. Le théorème d'Artin.)

1) Dans cette question, $u :]0\,;+\infty[\to \mathbb{R}^{+*}$ est une fonction vérifiant les propriétés suivantes :

(i) u est logarithmiquement convexe (cf. 3.64) ;

(ii) $u(1) = 1$;

(iii) $u(x+1) = xu(x)$ pour tout $x > 0$.

On pose $\varphi(x) = \log(u(x))$.

a) Montrer que si $x \in]0\,;1[$, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\log(n) \leqslant \frac{\varphi(n+1+x) - \varphi(n+1)}{x} \leqslant \log(n+1) \ .$$

b) Vérifier l'identité $\varphi(n+1+x) = \varphi(x) + \log[x(x+1)...(x+n)]$, et déduire de *a*) que pour $x \in]0\,;1[$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$0 \leqslant \varphi(x) - \log\left(\frac{n!\,n^x}{x(x+1)...(x+n)}\right) \leqslant x \log\left(1+\frac{1}{n}\right) \ .$$

c) Montrer que si $x \in]0\,;1[$, alors $\frac{n!n^x}{x(x+1)...(x+n)}$ tend vers $u(x)$ quand n tend vers l'infini.

2) Conclure que la restriction de Γ à $]0\,;+\infty[$ est la seule fonction vérifiant (i),(ii),(iii), et que pour tout $x > 0$, on a

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!\,n^x}{x(x+1)...(x+n)} \ .$$

3.66. Déduire de l'exercice 3.65 que pour tout $x > 0$, on a la **formule de duplication**

$$\Gamma(x) = \frac{2^{x-1}}{\sqrt{\pi}}\,\Gamma\left(\frac{x}{2}\right)\,\Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right) \ .$$

3.67. (Fonction béta.)

Pour $x, y > 0$, on pose

$$\mathrm{B}(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt \ .$$

1) Montrer que $\mathrm{B}(x,y)$ est bien défini, et qu'on a également

$$\mathrm{B}(x,y) = 2\int_0^{\pi/2} (\sin\theta)^{2x-1}(\cos\theta)^{2y-1}d\theta \ .$$

2) *a*) Calculer $B(1,y)$ pour tout $y>0$.

b) Montrer que pour tout $y>0$ fixé, l'application $x \mapsto B(x,y)$ est logarithmiquement convexe.

c) Montrer que pour $x,y>0$, on a $B(x+1,y)=\dfrac{x}{x+y}B(x,y)$.

3) Déduire de 2) et de l'exercice 3.65 que pour $x,y>0$, on a

$$B(x,y)=\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}\,.$$

4) Retrouver le résultat de 3) en calculant $\Gamma(x)\Gamma(y)$ en coordonnées polaires et en utilisant 1).

5) Calculer $B(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$, et retrouver la valeur de $\Gamma(\frac{1}{2})$.

3.68. (Formule de Stirling.)

1) Montrer que pour tout $x>0$, on a $\Gamma(x)=x^x e^{-x}\sqrt{x}\int_{\mathbf{R}} g(x,u)\,du$, où $g(x,u)=0$ si $\sqrt{x}\leqslant -u$ et $g(x,u)=\exp\left(x\log(1+\dfrac{u}{\sqrt{x}})-u\sqrt{x}\right)$ si $\sqrt{x}>-u$.

2) Pour $u\in\mathbb{R}$ fixé, déterminer $\lim_{x\to+\infty} g(x,u)$.

3) Pour $u>0$, déterminer $\sup\limits_{x\geqslant 1} g(x,u)$; pour $u<0$, déterminer $\sup\limits_{x>0} g(x,u)$.

4) Déduire de 1), 2) et 3) la **formule de Stirling** :

$$\Gamma(x)\sim x^x e^{-x}\sqrt{2\pi x}$$

quand x tend vers $+\infty$.

3.69. Trouver une suite croissante de compacts (K_i) telle que $\bigcup_i K_i=\Omega$, mais qui ne soit pas une suite exhaustive de compacts pour Ω.

3.70. Soit W un ouvert connexe de $\mathbb{R}^n$.

1) Montrer que pour tout compact $K\subset W$, il existe une constante C_K vérifiant la propriété suivante : pour tous points $p,q\in K$, il existe un chemin de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux joignant p à q dans W et de longueur majorée par C_K.

2) Montrer que si $f\in\mathcal{C}^1(W)$ est à dérivée bornée, alors la restriction de f à tout compact $K\subset W$ est C-lipschitzienne, où la constante C ne dépend que de K et de $\|df\|_\infty$.

3.71. Soit (K,d) un espace métrique compact, et soit $f:K\to\mathbb{R}$ une application localement lipschitzienne. Montrer que f est lipschitzienne.

3.72. Le but de l'exercice est de donner une preuve du théorème de Montel n'utilisant pas le théorème d'Ascoli. On fixe donc une suite $(f_n)\subset\mathcal{H}(\Omega)$ uniformément bornée sur tout compact, et on cherche à en extraire une sous-suite qui converge uniformément sur tout compact.

1) On suppose ici que Ω est un disque $D(0,R)$. On note $c_k(f)$ les coefficients de Taylor d'une fonction $f\in\mathcal{H}(\Omega)$.

a) Pour $k\in\mathbb{N}$, on pose $\mathbf{c}_k=\sup_n|c_k(f_n)|$. Montrer que $\mathbf{c}_k$ est fini pour tout k, et que le rayon de convergence de la série $\sum\mathbf{c}_k z^k$ est au moins égal à R.

b) Montrer que (f_n) admet une sous-suite (g_n) telle que toutes les suites $(c_k(g_n))_{n\geqslant 0}$ sont convergentes. On pose $c_k = \lim_{n\to\infty} c_k(g_n)$.

c) Montrer que la formule $g(z) = \sum_0^\infty c_k z^k$ définit une fonction holomorphe dans Ω et que la suite (g_n) converge vers g uniformément sur tout compact de Ω.

2) Traiter le cas d'un ouvert Ω quelconque.

3.73. Soit $p \in \mathbb{N}^*$, et posons $\mathcal{H}(\Omega)^{1/p} = \{f \in \mathcal{H}(\Omega);\ \exists g \in \mathcal{H}(\Omega)\ g^p = f\}$. Montrer que $\mathcal{H}(\Omega)^{1/p}$ est fermé dans $\mathcal{H}(\Omega)$.

3.74. Soit (f_n) une suite de fonctions holomorphes dans Ω. On suppose que (f_n) converge simplement vers une fonction f.

1) En utilisant le théorème de Baire, montrer qu'il existe un ouvert dense $\Omega' \subset \Omega$ tel que la suite (f_n) est uniformément bornée au voisinage de chaque point de Ω'.

2) Montrer que f est holomorphe sur Ω'.

3) Essayer de trouver un exemple où $\Omega' \neq \Omega$.

3.75. (Principe du maximum, 2.)

On suppose Ω connexe. Le but de l'exercice est de montrer que si f est une fonction holomorphe sur Ω et si $|f|$ admet un maximum local, alors f est constante.

1) Soit $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. On suppose qu'on a $|f(z)| \leqslant 1$ pour tout $z \in \Omega$, et que $|f|$ n'est pas identiquement égal à 1.

a) Montrer qu'il existe un ouvert non vide $V \subset \Omega$ tel que $f(z)^n$ tend vers 0 en tout point de V.

b) En déduire que $f(z)^n$ tend vers 0 uniformément sur tout compact de Ω.

c) Conclure qu'on a $|f(z)| < 1$ pour tout $z \in \Omega$.

2) Déduire de 1) que si $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ et si $|f|$ admet un maximum global, alors f est constante.

3) Conclure.

3.76. Montrer que $\mathcal{C}(\Omega)$ et $\mathcal{H}(\Omega)$ sont complets pour la distance définie en 3.5.2 **c**.

3.77. La topologie de $\mathcal{H}(\Omega)$ peut-elle être définie par une norme ?

3.78. Montrer que l'espace $\mathcal{H}(\mathbb{C})$ est séparable.

3.79. Pour $\lambda \in \mathbb{C}$, on note e_λ la fonction $z \mapsto e^{\lambda z}$.

1) Montrer que si L est une forme linéaire continue sur $\mathcal{H}(\mathbb{C})$, alors la fonction F définie par

$$F(\lambda) = \langle L, e_\lambda \rangle$$

est une fonction entière, et exprimer les dérivées de F en 0.

2) Soit V un ouvert non vide de $\mathbb{C}$. En utilisant 1), montrer que l'espace vectoriel engendré par la famille $(e_\lambda)_{\lambda\in V}$ est dense dans $\mathcal{H}(\mathbb{C})$.

3.80. (Théorème de Mac Lane.)

Le but de l'exercice est de montrer qu'il existe une fonction $\varphi \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ telle que la suite $(\varphi^{(n)})_{n\geqslant 0}$ est dense dans $\mathcal{H}(\mathbb{C})$.

1) On note $T : \mathcal{H}(\mathbb{C}) \to \mathcal{H}(\mathbb{C})$ l'opérateur de dérivation, défini par $Tf = f'$. D'autre part, on définit une application $S : \mathcal{H}(\mathbb{C}) \to \mathcal{H}(\mathbb{C})$ de la façon suivante : Sf est l'unique primitive de f valant 0 en 0. Montrer que les propriétés suivantes sont vérifiées :

(1) $T^n S^n f = f$ pour toute $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ et pour tout entier $n \geqslant 0$;

(2) il existe une partie dense $\mathcal{A} \subset \mathcal{H}(\mathbb{C})$ telle que $T^n f$ tend vers 0 dans $\mathcal{H}(\mathbb{C})$ pour toute $f \in \mathcal{A}$;

(3) il existe une partie dense $\mathcal{B} \subset \mathcal{H}(\mathbb{C})$ telle que $S^n f$ tend vers 0 dans $\mathcal{H}(\mathbb{C})$ pour toute $f \in \mathcal{B}$.

2) *a*) Montrer que si $u \in \mathcal{A}$ et si $v \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$, alors $T^n(S^n v + u)$ tend vers v dans $\mathcal{H}(\mathbb{C})$.

b) En déduire que si $\mathcal{V}$ est un ouvert non vide de $\mathcal{H}(\mathbb{C})$, alors l'ensemble

$$\{\varphi \in \mathcal{H}(\mathbb{C});\ \exists n \geqslant 0\ \ T^n \varphi \in \mathcal{V}\}$$

est un ouvert dense de $\mathcal{H}(\mathbb{C})$.

3) Conclure à l'aide du théorème de Baire et de l'exercice 3.78.

3.81. (Théorème de Birkhoff.)

Pour $a \in \mathbb{C}$, on note $\tau_a : \mathcal{H}(\mathbb{C}) \to \mathcal{H}(\mathbb{C})$ l'opérateur de translation par a, défini par

$$\tau_a f(z) = f(z + a)\,.$$

Le but de l'exercice est de montrer que pour tout $a \in \mathbb{C}^*$, il existe une fonction $\varphi \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ telle que la suite $(\tau_{na}\varphi)_{n \geqslant 0}$ est dense dans $\mathcal{H}(\mathbb{C})$.

1) Pour $\lambda \in \mathbb{C}$, on note e_λ la fonction $z \mapsto e^{\lambda z}$. Montrer que si $a, \lambda \in \mathbb{C}$ vérifient $\mathrm{Re}(\lambda a) < 0$, alors $\tau_{na} e_\lambda$ tend vers 0 dans $\mathcal{H}(\mathbb{C})$.

2) Conclure en utilisant 3.79 et en raisonnant comme dans l'exercice précédent.

3.82. Montrer que si $S \in \mathcal{D}'(\mathbb{C})$ est une distribution à support compact, alors l'équation $\frac{\partial T}{\partial \bar{z}} = S$ admet une solution dans $\mathcal{D}'(\mathbb{C})$.

3.83. Soit σ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{T}$. Déterminer la transformée de Cauchy de σ.

3.84. Montrer que pour tout ensemble mesurable $A \subset \mathbb{C}$ et pour tout point $a \in \mathbb{C}$, on a

$$\int_A \frac{dm(z)}{|z - a|} \leqslant 2\sqrt{2\pi m(A)}\,.$$

Pour $\varepsilon > 0$, on pourra considérer les ensembles $\{|z-a| > \varepsilon\}$ et $\{|z-a| \leqslant \varepsilon\}$.

3.85. Soit μ une mesure à support compact $K \subset \mathbb{C}$. En utilisant l'exercice précédent, montrer que la transformée de Cauchy de μ est intégrable sur $\mathbb{C}$ et qu'on a $\|\hat{\mu}\|_1 \leqslant C\|\mu\|$, où $\|\mu\| = |\mu|(\mathbb{C})$ et C est une constante dépendant uniquement de K.

3.86. Soit μ une mesure à support compact sur $\mathbb{C}$.

1) On suppose que μ est de la forme φm, où m est la mesure de Lebesgue et $\varphi \in L^\infty(\mathbb{C})$. Montrer que la transformée de Cauchy de μ est définie en tout point de $\mathbb{C}$ et que $\hat{\mu}$ est une fonction continue.

2) Montrer que le même résultat vaut si $\mu = \varphi m$, où $\varphi \in L^p$ pour un certain $p > 2$.

3.87. Soit μ une mesure à support compact sur $\mathbb{C}$. Pour $\varepsilon > 0$ et $z \in \mathbb{C}$, on pose

$$J_\varepsilon(z) = \int_{D(z,\varepsilon)} \frac{d|\mu|(\zeta)}{|\zeta - z|} .$$

1) Montrer que pour tous points $a, b \in \mathbb{C}$ et pour tout $\varepsilon > 0$, on a

$$\int_{\mathbb{C}} \frac{d|\mu|(\zeta)}{|\zeta - a|\,|\zeta - b|} \leqslant \frac{2}{|b - a|} \left(J_\varepsilon(a) + J_\varepsilon(b)\right) + \frac{\|\mu\|}{\varepsilon^2} ,$$

où $\|\mu\| = |\mu|(\mathbb{C})$.

2) Montrer que si $a, b \in \mathbb{C}$, alors $J_\varepsilon(b) \leqslant J_{\varepsilon+|b-a|}(a)$ pour tout $\varepsilon > 0$.

3) On suppose qu'on a $\lim_{\varepsilon \to 0} J_\varepsilon(z) = 0$ pour tout $z \in \mathbb{C}$. Montrer que la transformée de Cauchy de μ est définie en tout point de $\mathbb{C}$ et que $\hat{\mu}$ est une fonction continue.

3.88. On note μ la mesure $\mathbf{1}_{\mathbb{D}} m$.

0) Montrer que la transformée de Cauchy de μ est définie en tout point de $\mathbb{C}$ et que $\hat{\mu}$ est continue.

1) *a*) Calculer $\hat{\mu}(z)$ pour $|z| > 1$.

b) Montrer que pour $|z| < 1$, on peut écrire $\hat{\mu}(z) = \bar{z} + h(z)$, où $h \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$.

2) Déterminer $\hat{\mu}(z)$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.

3.89. Soit $g : \overline{\mathbb{D}} \to \mathbb{C}$ continue, de classe $\mathcal{C}^1$ dans $\mathbb{D}$. Pour $z \in \mathbb{D}$, on pose

$$G(z) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{D}} \frac{g(w)}{\bar{z} - \overline{w}}\, dm(w) .$$

1) Montrer que G est de classe $\mathcal{C}^1$ et qu'on a $\frac{\partial G}{\partial z} \equiv g$ dans $\mathbb{D}$.

2) On suppose que g s'étend en une fonction holomorphe au voisinage de $\overline{\mathbb{D}}$.

a) Montrer que pour tout $z \in \mathbb{D}$, on a

$$G(z) = -\frac{1}{2i\pi} \int_{\partial \mathbb{D}} g(w)\, \log|z - w|^2\, dw ,$$

et en déduire que G est holomorphe.

b) Pour $z \in \mathbb{D}$, établir la formule

$$\frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{D}} \frac{g(w)}{\bar{z} - \overline{w}}\, dm(w) = z \int_0^1 g(tz)\, dt .$$

3) La formule de 2) *b*) est-elle valable si on suppose seulement $g \in A(\mathbb{D})$?

3.90. Montrer que l'algèbre $A(\mathbb{D})$ est l'adhérence des fonctions polynomiales dans $\mathcal{C}(\overline{\mathbb{D}})$.

3.91. Montrer que la convergence dans $H^2(\mathbb{D})$ entraîne la convergence uniforme sur les compacts.

3.92. Soit (f_n) une suite bornée dans $H^2(\mathbb{D})$. Montrer que (f_n) converge faiblement vers 0 si et seulement si elle converge uniformément vers 0 sur tout compact.

3.93. Montrer que si $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$, $f(z) = \sum_0^\infty c_n z^n$, alors

$$\int_{\mathbb{D}} |f'(z)|^2 \, (1-|z|^2) \, dm(z) = \sum_0^\infty \frac{n}{n+1} \, |c_n|^2 \ .$$

En déduire que f appartient à $H^2(\mathbb{D})$ si et seulement si $\int_{\mathbb{D}} |f'(z)|^2 (1-|z|^2) \, dm(z) < +\infty$, et qu'on a alors

$$\frac{1}{2} \, \|f - f(0)\|_{H^2}^2 \leqslant \int_{\mathbb{D}} |f'(z)|^2 \, (1-|z|^2) \, dm(z) \leqslant \|f - f(0)\|_{H^2}^2 \ .$$

3.94. Montrer que si $f \in H^2(\mathbb{D})$, alors

$$\|f\|_{H^2}^2 = |f(0)|^2 + 2 \int_{\mathbb{D}} |f'(z)|^2 \, \log(1/|z|) \, dm(z) \ .$$

3.95. (Théorème de Beurling.)

Dans cet exercice, on note $\mathbf{z}$ la fonction $\mathbb{T} \ni \zeta \mapsto \zeta$, et S l'opérateur sur $H^2 = H^2(\mathbb{T})$ défini par $Sf = \mathbf{z}f$. Le but de l'exercice est de caractériser les sous-espaces fermés de H^2 invariants par S, c'est-à-dire les sous-espaces fermés $\mathcal{M} \subset H^2$ vérifiant $S\mathcal{M} \subset \mathcal{M}$.

1) Soit φ une fonction de $H^2(\mathbb{T})$ vérifiant $|\varphi(\zeta)| = 1$ presque partout. Montrer que $\mathcal{M} = \varphi H^2$ est un sous-espace fermé de H^2 invariant par S.

2) Soit $\mathcal{M} \subset H^2$ un sous-espace fermé invariant par S non réduit à $\{0\}$.

a) On pose $\mathcal{L} = \mathcal{M} \ominus \mathbf{z}\mathcal{M} := \mathcal{M} \cap (\mathbf{z}\mathcal{M})^\perp$. En observant qu'on a $\bigcap_{n \geqslant 0} \mathbf{z}^n H^2 = \{0\}$, montrer que $\mathcal{L}$ n'est pas réduit à $\{0\}$.

b) Montrer que si φ_1, φ_2 sont deux éléments de $\mathcal{L}$, alors la fonction $u = \varphi_1 \overline{\varphi_2}$ vérifie $\hat{u}(n) = 0$ pour tout entier $n > 0$. En déduire que les fonctions de $\mathcal{L}$ sont de module constant presque partout, et que l'espace $\mathcal{L}$ est de dimension 1.

c) Soit $\varphi \in \mathcal{L}$, $\varphi \neq 0$. Montrer que si une fonction $f \in \mathcal{M}$ est orthogonale à φH^2, alors f appartient à $\bigcap_{n \geqslant 0} \mathbf{z}^n \mathcal{M}$.

d) Conclure que $\mathcal{M}$ est de la forme φH^2, où $\varphi \in H^2$ et $|\varphi(\zeta)| = 1$ presque partout.

3.96. (Espace de Bergman $B^2(\mathbb{D})$.)

Dans cet exercice, on note $B^2(\mathbb{D})$ l'ensemble des fonctions f holomorphes dans le disque unité $\mathbb{D}$ et vérifiant $\int_{\mathbb{D}} |f|^2 dm < +\infty$. Pour $f \in B^2(\mathbb{D})$, on pose

$$\|f\| = \left(\int_{\mathbb{D}} |f|^2 \, dm \right)^{1/2}$$

1) Montrer que si $f \in \mathrm{B}^2(\mathbb{D})$, $f(z) = \sum_0^\infty c_n z^n$, alors

$$\|f\|^2 = \sum_0^\infty \frac{\pi}{n+1} |c_n|^2 .$$

2) Montrer que $\mathrm{B}^2(\mathbb{D})$ est un espace de Hilbert et que la suite $\left(\sqrt{\frac{n+1}{\pi}} z^n\right)_{n \geqslant 0}$ est une base hilbertienne de $\mathrm{B}^2(\mathbb{D})$.

3) Montrer que les évaluations $f \mapsto f(a)$ sont continues sur $\mathrm{B}^2(\mathbb{D})$.

4) En utilisant 2), déterminer le noyau reproduisant de l'espace $\mathrm{B}^2(\mathbb{D})$.

5) Retrouver l'expression du noyau reproduisant de $\mathrm{B}^2(\mathbb{D})$ en utilisant l'exercice 3.37.

3.97. (Espace $h^2(\mathbb{D})$.)

On note $h^2(\mathbb{D})$ l'ensemble des fonctions $h : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ admettant un développement de la forme

$$h(z) = \sum_1^\infty c_{-n} \overline{z}^n + c_0 + \sum_1^\infty c_n z^n ,$$

où $\sum_{\mathbb{Z}} |c_n|^2 < +\infty$. Pour $u \in h^2(\mathbb{D})$, on pose

$$||u||^2 = \sum_{-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 .$$

1) Montrer que $||\ \ ||$ est correctement définie, que $\left((h^2(\mathbb{D}), ||\ \ ||\right)$ est un espace de Hilbert et que les évaluations $u \mapsto u(a)$ sont continues sur $h^2(\mathbb{D})$.

2) Déterminer le noyau reproduisant de $h^2(\mathbb{D})$ en s'inspirant du cas de $\mathrm{H}^2(\mathbb{D})$.

3) On note P le noyau reproduisant de $h^2(\mathbb{D})$. Le but de cette question est de retrouver l'expression de $\mathrm{P}(a, b)$ par une autre méthode qu'en 2).

a) Observer que $h^2(\mathbb{D})$ s'identifie « canoniquement » à $\mathrm{L}^2(\mathbb{T})$. On notera $\mathbf{u}$ l'élément de $\mathrm{L}^2(\mathbb{T})$ associé à une fonction $u \in h^2(\mathbb{D})$.

b) Montrer que pour tout $a \in \mathbb{D}$, on a

$$\mathbf{P}_a = \frac{|k_a|^2}{||k_a||^2} ,$$

où k est le noyau de Cauchy de $\mathbb{D}$.

c) Conclure.

Chapitre 4
Fonctions holomorphes II

Dans tout le chapitre, Ω est un ouvert de $\mathbb{C}$.

4.1. Primitives et logarithmes

Dans cette section, on montre que toute fonction holomorphe dans un disque admet des primitives holomorphes, et qu'une fonction f holomorphe dans un disque et ne s'annulant pas admet un logarithme holomorphe (autrement dit, que si f est holomorphe dans un disque et ne s'annule pas, alors il existe une fonction holomorphe g telle que $e^g = f$). Ces deux résultats, conséquences très simples du lemme de Poincaré 2.1.3, seront généralisés au chapitre 5. Ils sont toutefois suffisamment importants pour être énoncés séparément.

Dans ce qui suit, on entend par *disque* un disque de $\mathbb{C}$ au sens ordinaire, ou bien $\mathbb{C}$ tout entier.

Proposition 4.1.1. *Toute fonction holomorphe dans un disque admet des primitives holomorphes.*

Preuve. Si f est holomorphe, alors la forme $f\,dz$ est fermée. D'après le lemme de Poincaré, elle est donc exacte sur le disque considéré, donc f admet une primitive holomorphe.

Autre preuve. Si f est holomorphe dans un disque $\mathrm{D} = \mathrm{D}(a, \mathrm{R})$, alors f se développe en série entière dans D, $f(z) = \sum_0^\infty c_n (z-a)^n$. Le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{c_n}{n+1}(z-a)^{n+1}$ est au moins égal à R, et la somme de cette série est une primitive holomorphe de f.

Corollaire 4.1.2. *Toute fonction holomorphe admet localement des primitives holomorphes.*

Lemme 4.1.3. *Soit $f : \Omega \to \mathbb{C}^*$ de classe $\mathcal{C}^1$. Pour une fonction $g \in \mathcal{C}^1(\Omega)$, considérons les propriétés suivantes :*

(1) *g est une primitive de $\frac{df}{f}$;*

(2) *$e^{g(z)} \equiv c f(z)$, pour une certaine constante c.*

Alors (2) *entraîne* (1), *et la réciproque est vraie si Ω est connexe.*

Preuve. La condition (2) signifie que la fonction $e^{-g}f$ est constante, et comme $d(e^{-g}f) = (df - fdg)e^{-g}$, la condition (1) est équivalente à $d(e^{-g}f) = 0$.

Corollaire 4.1.4. *Une fonction holomorphe $f : \Omega \to \mathbb{C}^*$ admet un logarithme holomorphe si et seulement si la forme $\frac{df}{f}$ est exacte ; autrement dit, si et seulement si la* **dérivée logarithmique** $\frac{f'}{f}$ *admet une primitive holomorphe.*

Preuve. Comme $\frac{df}{f} = \frac{f'}{f}\,dz$, il y a identité entre primitives de $\frac{df}{f}$ et primitives holomorphes de $\frac{f'}{f}$.

Si f admet un logarithme holomorphe, alors $\frac{df}{f}$ est exacte d'après le lemme précédent. Inversement, si $\frac{df}{f}$ admet une primitive g, alors g est holomorphe et la fonction fe^{-g} est constante dans chaque composante connexe de Ω d'après le lemme précédent. En modifiant g par une constante adéquate dans chacune de ces composantes, on obtient une fonction $g_0 \in \mathcal{H}(\Omega)$ telle que $fe^{-g_0} = 1$, c'est-à-dire un logarithme holomorphe de f.

Proposition 4.1.5. *Toute fonction holomorphe dans un disque et ne s'annulant pas admet un logarithme holomorphe.*

Preuve. Si f est holomorphe dans un disque et ne s'annule pas, alors $\frac{f'}{f}$ est holomorphe dans ce disque, donc y admet une primitive holomorphe d'après 4.1.1, d'où le résultat d'après 4.1.4.

Corollaire 4.1.6. *Une fonction holomorphe qui ne s'annule pas admet localement des logarithmes holomorphes.*

4.2. Théorème de Morera

On sait qu'une fonction $f \in C^1(\Omega)$ est holomorphe dans Ω si et seulement si la forme fdz est fermée. Le **théorème de Morera** montre que cette équivalence est encore valable pour une fonction seulement supposée continue.

Théorème 4.2.1. (Théorème de Morera.)
Si $f : \Omega \to \mathbb{C}$ est une fonction continue, alors f est holomorphe si et seulement si la forme fdz est fermée, autrement dit, si et seulement si on a $\int_{\partial R} fdz = 0$ pour tout rectangle fermé $R \subset \Omega$.

Preuve. D'après le lemme de Poincaré, si la forme fdz est fermée, alors elle est localement exacte, autrement dit la fonction f admet des

primitives holomorphes au voisinage de chaque point de Ω. Comme la dérivée d'une fonction holomorphe est encore holomorphe, on en déduit que f est holomorphe au voisinage de chaque point de Ω, et est donc holomorphe dans Ω.

Remarque 4.2.2. *Il revient encore au même de dire qu'on a* $\int_{\partial\Delta} f dz = 0$ *pour tout triangle fermé* $\Delta \subset \Omega$.

Preuve. Si $\omega = f dz$ est fermée, alors, en décomposant un triangle $\Delta \subset \Omega$ en triangles Δ_j au voisinage desquels ω est exacte, on obtient $\int_{\partial\Delta} \omega = \sum \int_{\Delta_j} \omega = 0$. Inversement, si R est un rectangle contenu dans Ω, l'une ou l'autre de ses diagonales le partage en deux triangles Δ_1, Δ_2, et on a $\int_{\partial R} \omega = \int_{\partial\Delta_1} \omega + \int_{\partial\Delta_2} \omega$. La nullité de l'intégrale de ω sur tous les triangles entraîne donc sa nullité sur tous les rectangles.

Corollaire 4.2.3. *Si* L *est une droite de* $\mathbb{C}$, *et si* $f : \Omega \to \mathbb{C}$ *est une fonction continue sur* Ω *et holomorphe dans* $\Omega \backslash L$, *alors* f *est holomorphe dans* Ω.

Preuve. Par translation et rotation (ce qui revient à considérer une fonction du type $z \mapsto f(az+b)$), on se ramène au cas où L est l'axe réel $\mathbb{R} = \{\mathrm{Im}(z) = 0\}$. Soit donc $f : \Omega \to \mathbb{C}$ continue sur Ω et holomorphe dans $\Omega \backslash \mathbb{R}$. D'après le théorème de Morera, il suffit de montrer que si $R = [a\,;b] \times [c\,;d]$ est un rectangle contenu dans Ω, alors $\int_{\partial R} f dz = 0$. Trois cas sont possibles.

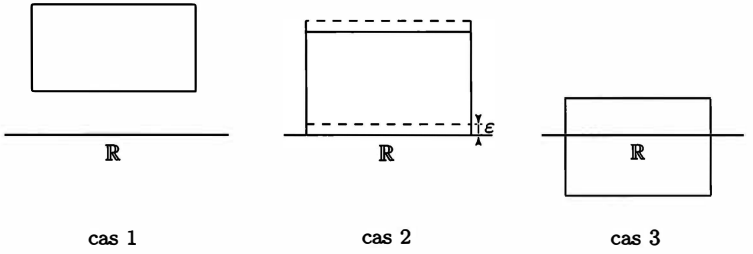


FIG. 24.

(a) Le rectangle R est contenu dans $\Omega \backslash \mathbb{R}$. Dans ce cas, on a directement le résultat par le théorème de Cauchy car f est holomorphe dans $\Omega \setminus \mathbb{R}$.

(b) R a un de ses côtés sur l'axe réel. Supposons par exemple que R soit contenu dans le demi-plan $\{\mathrm{Im}(z) \geqslant 0\}$. Dans ce cas, pour $\varepsilon > 0$ assez petit, le rectangle $R_\varepsilon = R + i\varepsilon$ est contenu dans $\Omega \setminus \mathbb{R}$, et on a donc $\int_{\partial R_\varepsilon} f dz = 0$ d'après le cas (a). Comme f est continue, on obtient $\int_{\partial R} f dz = 0$ en faisant tendre ε vers 0.

(c) Le rectangle R coupe l'axe réel. Dans ce cas, R se subdivise en deux rectangles R_1, R_2 ayant un côté commun sur l'axe réel, et on a $\int_{\partial R} f dz = \int_{\partial R_1} f dz + \int_{\partial R_2} f dz = 0$ d'après le cas (b).

Corollaire 4.2.4. *Soit $a \in \Omega$. Si $f : \Omega \to \mathbb{C}$ est une fonction continue sur Ω et holomorphe dans $\Omega \backslash \{a\}$, alors f est holomorphe dans Ω.*

Corollaire 4.2.5. (Principe de réflection de Schwarz.)
Supposons que Ω soit symétrique par rapport à l'axe réel. Soit f une fonction holomorphe dans l'ouvert $\Omega' = \Omega \cap \{\mathrm{Im} z > 0\}$ et continue sur $\overline{\Omega'}$. On suppose que f prend des valeurs réelles aux points de l'axe réel. Alors f s'étend en une fonction holomorphe dans Ω tout entier.

Preuve. Soit $\Omega'' = \Omega \cap \{\mathrm{Im} z < 0\}$, et soit g la fonction définie sur Ω'' par $g(z) = \overline{f}(\bar{z})$. La fonction g est continue sur $\overline{\Omega''}$, et on vérifie de suite qu'elle est holomorphe dans Ω'' en calculant $\frac{\partial g}{\partial \bar{z}}$. De plus, g et f coïncident sur l'axe réel par hypothèse sur f. La fonction $h : \Omega \to \mathbb{C}$ définie par

$$h(z) = \begin{cases} f(z) & \text{si} \quad z \in \Omega' \\ \\ g(z) & \text{si} \quad z \in \overline{\Omega''} \end{cases}$$

est donc continue sur Ω, et elle est holomorphe dans $\Omega \backslash \mathbb{R}$. D'après le corollaire 4.2.3, la fonction h est holomorphe dans Ω.

Remarques. 1) Le théorème de Morera permet de retrouver une partie du théorème de convergence de Weierstrass : en effet, si $(f_n) \subset \mathcal{H}(\Omega)$ converge uniformément sur les compacts vers une fonction f, alors f est continue et $\int_{\partial R} f dz = \lim_{n \to \infty} \int_{\partial R} f_n dz = 0$ pour tout rectangle $R \subset \Omega$, donc f est holomorphe dans Ω. En revanche, la convergence des dérivées ne se déduit pas du théorème de Morera.

2) De même, on peut redémontrer une partie du théorème d'holomorphie pour les intégrales à paramètres grâce au théorème de Morera : avec les notations du théorème 3.5.11, la fonction f est continue, et d'après le théorème de Fubini, on a $\int_{\partial R} f(z)\, dz = \int_T (\int_{\partial R} F(z,t)\, dz)\, d\mu(t) = 0$ pour tout rectangle $R \subset \Omega$, donc f est holomorphe dans Ω.

4.3. Théorème de Cauchy-Goursat

On est maintenant en mesure de démontrer que toute fonction $\mathbb{C}$-dérivable est en fait infiniment $\mathbb{C}$-dérivable.

Théorème 4.3.1. (Théorème de Cauchy-Goursat.)
Si $f : \Omega \to \mathbb{C}$ est $\mathbb{C}$-dérivable dans Ω, alors f est holomorphe dans Ω.

Preuve. Soit f une fonction $\mathbb{C}$-dérivable dans Ω. Comme f est différentiable dans Ω, elle est en particulier continue. D'après le théorème de Morera, il suffit donc de montrer qu'on a $\int_{\partial R} f dz = 0$ pour tout rectangle fermé $R \subset \Omega$. Fixons un tel rectangle R_0.

Supposons que l'intégrale $\int_{\partial R_0} f dz$ ne soit pas nulle et posons $M = |\int_{\partial R_0} f dz| > 0$. Posons également $d = \mathrm{diam}(R_0)$.

Soient $Q_1, \ldots, Q_4$ les 4 sous-rectangles de R_0 obtenus en traçant les médiatrices des côtés de R_0. Comme $\int_{\partial R_0} f dz = \sum_{i=1}^{4} \int_{\partial Q_i} f dz$, l'inégalité triangulaire montre qu'il existe au moins un indice i pour lequel $|\int_{\partial Q_i} f dz| \geqslant M/4$; on pose alors $R_1 = Q_i$.

En répétant ce raisonnement, on construit par récurrence une suite décroissante de rectangles fermés $R_0 \supset R_1 \supset R_2 \supset \ldots$ vérifiant $\mathrm{diam}(R_n) = d/2^n$ et $\left|\int_{\partial R_n} f dz\right| \geqslant M/4^n$ pour tout $n \geqslant 0$. On a alors

$$(*) \qquad \left|\int_{\partial R_n} f dz\right| \geqslant C\,(\mathrm{diam}(R_n))^2$$

pour tout $n \geqslant 0$, où $C = M/d^2$.

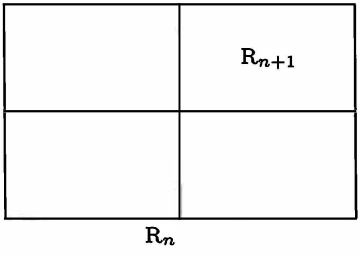


FIG. 25.

D'après le théorème des fermés emboîtés, l'intersection des R_n est réduite à un seul point a, et $a \in \Omega$ puisque $R_0 \subset \Omega$.

Fixons $\varepsilon > 0$. Comme f est $\mathbb{C}$-dérivable en a, on peut trouver un disque ouvert D centré en a tel que

$$(**) \qquad \forall z \in D \quad |f(z) - f(a) - f'(a)(z-a)| < \varepsilon\,|z-a| \ .$$

Choisissons un entier n tel que $R_n \subset D$; un tel entier existe car le diamètre de R_n tend vers 0. Comme la fonction $z \mapsto f(a) + f'(a)(z-a)$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$, on a $\int_{\partial R_n} (f(a) + f'(a)(z-a))\,dz = 0$, et donc

$$\int_{\partial R_n} f dz = \int_{\partial R_n} (f(z) - f(a) - f'(a)(z-a))\,dz\,.$$

En utilisant $(**)$, on obtient alors

$$\left|\int_{\partial R_n} f dz\right| < \varepsilon \int_{\partial R_n} |z-a|\,|dz| \leqslant 2\sqrt{2}\,\varepsilon\,(\mathrm{diam}(R_n))^2\,,$$

car $|z-a| \leqslant \operatorname{diam}(\mathrm{R}_n)$ sur $\partial \mathrm{R}_n$ et $l(\partial \mathrm{R}_n) = 2\sqrt{2}\operatorname{diam}(\mathrm{R}_n)$. Cela contredit $(*)$ si ε est choisi assez petit.

Corollaire 4.3.2. *Toute fonction $\mathbb{C}$-dérivable sur un ouvert de $\mathbb{C}$ est infiniment $\mathbb{C}$-dérivable et développable en série entière au voisinage de chaque point.*

Remarque 4.3.3. *La démonstration du théorème de Cauchy-Goursat est assez déroutante : on utilise un argument subtil pour se ramener au théorème de Morera, qui est lui-même un résultat non trivial. Il serait a priori plus naturel de tenter de prouver « à la main » qu'une fonction $\mathbb{C}$-dérivable est nécessairement de classe $\mathcal{C}^1$, mais il semble curieusement qu'on ne connaisse aucune démonstration directe simple de ce résultat. Voir à ce sujet le très intéressant Whyburn* [73].

Mentionnons pour terminer cette section une preuve légèrement différente du théorème de Cauchy-Goursat.

On commence par démontrer le lemme suivant.

Lemme 4.3.4. *Si g est une fonction continue sur Ω et $\mathbb{C}$-dérivable partout sauf en peut être un point $a \in \Omega$, alors $\int_{\partial \mathrm{R}} g\,dz = 0$ pour tout rectangle $\mathrm{R} \subset \Omega$.*

Preuve. Si $a \notin \mathrm{R}$, la preuve déjà donnée est valable sans aucune modification.

Si $a \in \partial \mathrm{R}$, on peut trouver des rectangles R' arbitrairement proches de R et tels que $a \notin \mathrm{R}'$; d'après le cas précédent, on a $\int_{\partial \mathrm{R}'} g\,dz = 0$ pour tous ces rectangles R', et comme g est continue, on obtient $\int_{\partial \mathrm{R}} g\,dz = 0$ par passage à la limite.

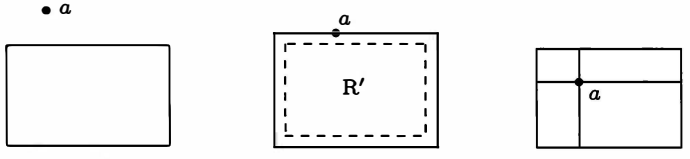


FIG. 26.

Si a est intérieur à R, alors, en traçant les parallèles aux côtés de R passant par a, on subdivise R en 4 rectangles $\mathrm{R}_1, \ldots, \mathrm{R}_4$ ayant chacun a comme sommet. On a alors $\int_{\partial \mathrm{R}} g\,dz = \sum_i \int_{\partial \mathrm{R}_i} g\,dz$, donc $\int_{\partial \mathrm{R}} g\,dz = 0$ d'après le cas précédent.

Soit maintenant f une fonction $\mathbb{C}$-dérivable sur Ω.

Soit R un rectangle contenu dans Ω. Si $z \in \mathring{\mathrm{R}}$ est fixé, la fonction $g_z : \Omega \to \mathbb{C}$ définie par $g_z(\zeta) = \frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta - z}$ si $\zeta \neq z$ et $g_z(z) = f'(z)$ est

$\mathbb{C}$-dérivable sur $\Omega\backslash\{z\}$ et continue sur Ω. D'après le lemme précédent, on a donc $\int_{\partial R} g_z(\zeta)\,d\zeta = 0$, et comme $\int_{\partial R} \frac{d\zeta}{\zeta - z} = 2i\pi$, on en déduit

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial R} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta$$

pour tout point $z \in \mathring{R}$. D'après 3.1.16, la fonction f est donc infiniment $\mathbb{C}$-dérivable dans l'intérieur de tout rectangle $R \subset \Omega$, ce qui termine la démonstration.

Un des « avantages » de cette deuxième démonstration est qu'elle n'utilise pas le théorème de Morera. On a simplement besoin de connaître la définition d'une intégrale curviligne du type $\int_\gamma u\,dz$ et de savoir que si R est un rectangle, alors $\int_{\partial R} \frac{d\zeta}{\zeta - z} = 2i\pi$ pour tout point z intérieur à R.

Ce dernier point découle de la formule de Cauchy, mais il est peut-être plus instructif d'effectuer directement le calcul de l'intégrale. Notons $\zeta_1, \ldots, \zeta_4$ les sommets du rectangle R (à cotés supposés parallèles aux axes de coordonnées), en commençant par le sommet inférieur gauche et en tournant dans le sens trigonométrique. Fixons également $z \in \mathring{R}$. Si $\zeta \in [\zeta_1;\zeta_2]\cup[\zeta_2;\zeta_3]\cup[\zeta_3;\zeta_4]$, alors $\zeta - z$ n'est pas réel négatif. Par conséquent la fonction Log est holomorphe dans un voisinage de $[\zeta_1;\zeta_2]\cup[\zeta_2;\zeta_3]\cup[\zeta_3;\zeta_4]$, et on peut écrire $\frac{d\zeta}{\zeta - z} = d(\mathrm{Log}(\zeta - z))$ dans ce voisinage. De même, $\zeta - z$ n'est jamais réel positif sur $[\zeta_4;\zeta_1]$, et donc $\frac{d\zeta}{\zeta - z} = d(\mathrm{Log}_0(\zeta - z))$ au voisinage de $[\zeta_4;\zeta_1]$, où Log_0 est la détermination holomorphe du logarithme obtenue sur $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}^+$ en choisissant l'argument dans $]0\,;2\pi[$. On a donc

$$\int_{\partial R} \frac{d\zeta}{\zeta - z} = (\mathrm{Log}(\zeta_4 - z) - \mathrm{Log}(\zeta_1 - z)) + (\mathrm{Log}_0(\zeta_1 - z) - \mathrm{Log}_0(\zeta_4 - z)).$$

Comme $\mathrm{Arg}(\zeta_4 - z) \in]0\,;\pi[$, on a $\mathrm{Log}(\zeta_4 - z) = \mathrm{Log}_0(\zeta_4 - z)$, d'où finalement

$$\int_{\partial R} \frac{d\zeta}{\zeta - z} = \mathrm{Log}_0(\zeta_1 - z) - \mathrm{Log}(\zeta_1 - z) = 2i\pi\,.$$

4.4. Zéros des fonctions holomorphes

4.4.1. Factorisation ; principe des zéros isolés

Si f est une fonction holomorphe dans Ω, on note $Z(f)$ l'ensemble des zéros de f dans Ω, c'est à dire l'ensemble $\{z \in \Omega;\ f(z) = 0\}$.

Théorème 4.4.1. *Supposons Ω connexe, et soit $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ non identiquement nulle.*

À chaque zéro $a \in \mathrm{Z}(f)$ correspond un unique entier positif m et une unique fonction $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ tels que

$$f(z) \equiv (z-a)^m g(z) \quad et \quad g(a) \neq 0 \,.$$

L'entier m s'appelle la **multiplicité**, *ou l'***ordre** *de a comme zéro de f.*

Preuve. Fixons $a \in \mathrm{Z}(f)$. Comme Ω est connexe et f n'est pas identiquement nulle, le principe du prolongement analytique montre qu'il existe un plus petit entier m tel que $f^{(m)}(a) \neq 0$.

Soit D un disque ouvert de centre a contenu dans Ω. Si $z \in \mathrm{D}$, alors, par définition de m, la formule de Taylor à l'ordre m entre 0 et z s'écrit

$$f(z) = (z-a)^m \int_0^1 \frac{(1-t)^{m-1}}{(m-1)!} f^{(m)}\big(a + t(z-a)\big)\, dt \,.$$

Comme $f^{(m)}$ est holomorphe, la fonction u définie par

$$u(z) = \int_0^1 \frac{(1-t)^{m-1}}{(m-1)!} f^{(m)}\big(a + t(z-a)\big)\, dt$$

est holomorphe dans D d'après le théorème d'holomorphie pour les intégrales à paramètres. De plus, on a $u(a) = \frac{f^{(m)}(a)}{m!}$ et $u(z) \equiv \frac{f(z)}{(z-a)^m}$ dans $\mathrm{D}\backslash\{a\}$. On définit donc une fonction holomorphe dans Ω en posant $g(a) = \frac{f^{(m)}(a)}{m!}$ et $g(z) = \frac{f(z)}{(z-a)^m}$ si $z \neq a$. On a $f(z) \equiv (z-a)^m g(z)$, et $g(a) \neq 0$ par le choix de m. Cela prouve la partie « existence ».

Pour l'unicité, il suffit d'observer que si $(z-a)^{m_1} g_1(z) \equiv (z-a)^{m_2} g_2(z)$ dans Ω, avec g_1, g_2 continues en a et $g_1(a), g_2(a) \neq 0$, alors $\frac{(z-a)^{m_1}}{(z-a)^{m_2}}$ admet une limite non nulle quand z tend vers a. Cela n'est possible que si $m_1 = m_2$, et donc $g_1 = g_2$.

Autre preuve de l'existence. Sur un certain disque $\mathrm{D} = \mathrm{D}(a, r)$, on peut écrire $f(z) = \sum_0^\infty c_n (z-a)^n$. En notant m le plus petit indice tel que $c_m \neq 0$, on a ainsi

$$f(z) = (z-a)^m \sum_0^\infty c_{n+m} (z-a)^n$$

dans le disque D. La série $\sum c_{n+m}(z-a)^n$ converge en tout point de $\mathrm{D} \setminus \{a\}$ vers $f(z)/(z-a)^m$, et elle converge bien sûr au point a. Sa somme h est une fonction holomorphe dans D, vérifiant $h(a) = c_m \neq 0$ et $h(z) = f(z)/(z-a)^m$ pour $z \in \mathrm{D}\setminus\{a\}$. En posant $g(a) = c_m$ et $g(z) = f(z)/(z-a)^m$ pour $z \neq a$, on définit donc une fonction g holomorphe dans Ω et vérifiant $f(z) \equiv (z-a)^m g(z)$.

Remarque 4.4.2. *La multiplicité d'un zéro $a \in \mathrm{Z}(f)$ est le plus petit entier m tel que $f^{(m)}(a) \neq 0$, autrement dit l'indice du premier coefficient non nul dans le développement en série entière de f au voisinage de a.*

Le résultat suivant est une généralisation du principe du prolongement analytique démontré au chapitre 3.

Corollaire 4.4.3. (Principe des zéros isolés.)
Si f est une fonction holomorphe dans un ouvert connexe, non identiquement nulle, et si a est un zéro de f, alors a possède un voisinage dans lequel f n'admet pas d'autre zéro. Autrement dit, les zéros de f sont isolés.

Preuve. Si $a \in \mathrm{Z}(f)$ et si g est la fonction donnée par le théorème précédent, alors, par continuité, on a $g(z) \neq 0$ sur un voisinage V du point a, et l'identité $f(z) = (z-a)^m g(z)$ montre que f ne s'annule pas sur $\mathrm{V}\backslash\{a\}$. Le point a est donc un point isolé de $\mathrm{Z}(f)$.

Corollaire 4.4.4. *(Ω connexe.) Si $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ n'est pas identiquement nulle, alors $\mathrm{Z}(f)$ n'a pas de point d'accumulation dans Ω. Autrement dit, $\mathrm{Z}(f)$ est un fermé discret de Ω.*

Preuve. Comme f est continue, $\mathrm{Z}(f)$ est un fermé de Ω. Les points d'accumulation de $\mathrm{Z}(f)$ dans Ω sont donc exactement les points non isolés de $\mathrm{Z}(f)$, et le principe des zéros isolés donne le résultat.

Corollaire 4.4.5. *(Ω connexe.) Si $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ n'est pas identiquement nulle, alors f n'a qu'un nombre fini de zéros sur tout compact de Ω.*

Preuve. Si f possédait une infinité de zéros sur un compact $\mathrm{K} \subset \Omega$, alors $\mathrm{Z}(f)$ aurait un point d'accumulation dans K, donc dans Ω.

Corollaire 4.4.6. *(Ω connexe.) Si $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ n'est pas identiquement nulle, alors $\mathrm{Z}(f)$ est au plus dénombrable.*

Preuve. Comme l'ouvert Ω est réunion dénombrable de compacts, cela découle du corollaire précédent.

4.4.2. Formule de Jensen

Si f est une fonction holomorphe dans un disque $\mathrm{D}(0,\mathrm{R})$ et ne s'y annule pas, alors f admet des logarithmes holomorphes d'après la proposition 4.1.5. Si g est un tel logarithme, alors $\mathrm{Re}(g) = \log|f|$. En appliquant la formule de la moyenne à g, on en déduit que pour tout $r < \mathrm{R}$, on a

$$\log|f(0)| = \int_0^{2\pi} \log\left|f(re^{i\theta})\right| \frac{d\theta}{2\pi} \cdot$$

Le résultat suivant généralise cette remarque.

Théorème 4.4.7. (Formule de Jensen.)

Soit f une fonction holomorphe au voisinage d'un disque fermé $\overline{\mathrm{D}}(0,r)$, telle que $f(0) \neq 0$. Notons $a_1, \ldots, a_n$ les zéros éventuels de f contenus dans $\overline{\mathrm{D}}(0,r)$, chaque zéro étant compté selon sa multiplicité. Avec ces notations, la fonction $\theta \mapsto \log|f(re^{i\theta})|$ est intégrable sur $[0\,;2\pi]$, et on a

$$\int_0^{2\pi} \log\left|f(re^{i\theta})\right| \frac{d\theta}{2\pi} = \log|f(0)| + \sum_{j=1}^{n} \log\left|\frac{r}{a_j}\right| .$$

La démonstration repose sur le lemme suivant.

Lemme 4.4.8. *Pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, la fonction $\theta \mapsto \log|t-e^{i\theta}|$ est intégrable sur $[0\,;2\pi]$. On a $\int_0^{2\pi} \log|t-e^{i\theta}|\,d\theta = 0$ si $t \leqslant 1$, et $\int_0^{2\pi} \log|t-e^{i\theta}|\,d\theta = 2\pi\log(t)$ si $t > 1$.*

Preuve. Par périodicité, on peut prendre $[-\pi;\pi]$ plutôt que $[0\,;2\pi]$ comme intervalle d'intégration.

Si $t \neq 1$, alors la fonction $\theta \mapsto \log|t-e^{i\theta}|$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc intégrable sur $[-\pi;\pi]$. Pour $t = 1$, la fonction $\theta \mapsto \log|1-e^{i\theta}|$ est continue sur $[-\pi;\pi]\backslash\{0\}$, et on a $\log|1-e^{i\theta}| \sim \log|\theta|$ au voisinage de 0. Comme $\log u$ est intégrable au voisinage de 0^+, on en déduit que la fonction $\theta \mapsto \log|1-e^{i\theta}|$ est intégrable sur $[-\pi;\pi]$. Ainsi,

$$\mathrm{I}(t) = \int_{-\pi}^{\pi} \log|t-e^{i\theta}|\,d\theta$$

est bien défini pour tout $t \geqslant 0$.

D'après le théorème de continuité pour les intégrales à paramètres, la fonction I est continue en tout point $t \neq 1$. D'autre part, les inégalités $\log|\sin\theta| \leqslant \log|t-e^{i\theta}| \leqslant \log(1+t)$ montrent que si $t \in [0\,;2]$, alors $\left|\log|t-e^{i\theta}|\right| \leqslant u(\theta) = |\log|\sin\theta|| + \log(3)$ pour tout $\theta \in [-\pi;\pi]$. La fonction u étant intégrable sur $[-\pi;\pi]$, on peut donc à nouveau appliquer le théorème de continuité pour les intégrales à paramètres et conclure que la fonction I est également continue au point 1. Pour démontrer le lemme, il suffit donc de prouver qu'on a $\mathrm{I}(t) = 2\pi\log(t)$ si $t > 1$, et $\mathrm{I}(t) = 0$ si $0 < t < 1$.

Notons $\mathbb{D}$ le disque unité $\mathrm{D}(0,1)$. Si $t > 1$, alors $t - z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}^-$ pour tout $z \in \overline{\mathbb{D}}$. La fonction $z \mapsto \mathrm{Log}(t-z)$ est donc holomorphe au voisinage de $\overline{\mathbb{D}}$. Comme $\log|t-z| = \mathrm{Re}(\mathrm{Log}(t-z))$, il découle de la formule de la moyenne qu'on a

$$\mathrm{I}(t) = 2\pi\,\mathrm{Re}(\mathrm{Log}(t-0)) = 2\pi\log t\ .$$

Si $t < 1$, on peut écrire $\log|t - e^{i\theta}| = \log|t - e^{-i\theta}| = \log|e^{i\theta}t - 1| = \log t + \log|\frac{1}{t} - e^{i\theta}|$. On a donc $I(t) = 2\pi \log t + I(1/t) = 0$ puisque $I(1/t) = 2\pi \log(1/t)$.

Corollaire 4.4.9. *Soit $r > 0$. Pour tout point $a \in \mathbb{C}$, la fonction $\theta \mapsto \log|a - re^{i\theta}|$ est intégrable sur $[0\,;2\pi]$. On a $\int_0^{2\pi} \log|a - re^{i\theta}|\,d\theta = 2\pi \log r$ si $|a| \leqslant r$, et $\int_0^{2\pi} \log|a - re^{i\theta}|\,d\theta = 2\pi \log|a|$ si $|a| > r$.*

Preuve. En écrivant $a = |a|\,e^{i\theta_0}$ et

$$\log|a - re^{i\theta}| = \log r + \log\left|\frac{|a|}{r} - e^{i(\theta-\theta_0)}\right|,$$

le lemme précédent donne $\int_0^{2\pi} \log|a - re^{i\theta}|\,d\theta = 2\pi \log r$ si $|a|/r \leqslant 1$, et $\int_0^{2\pi} \log|a - re^{i\theta}|d\theta = 2\pi \log r + 2\pi \log(|a|/r)$ si $|a|/r > 1$. Le résultat suit.

Preuve de la formule de Jensen.

Choisissons $\varepsilon > 0$ tel que f soit holomorphe dans le disque $D(0, r+\varepsilon)$ et n'y ait pas d'autres zéros que les a_i. On peut alors écrire $f(z) = g(z)\prod_1^n (z - a_j)$ dans $D(0, r+\varepsilon)$, où g est holomorphe et ne s'annule pas.

D'après la proposition 4.1.5, il existe une fonction φ holomorphe dans $D(0, r+\varepsilon)$ telle que $e^{\varphi} = g$. On a $\log|g(z)| \equiv \mathrm{Re}(\varphi(z))$ et donc, d'après la formule de la moyenne,

$$\log|g(0)| = \int_0^{2\pi} \log|g(re^{i\theta})|\,\frac{d\theta}{2\pi}\,.$$

Par définition de g, on a $\log|g(0)| = \log|f(0)| - \sum_j \log|a_j|$.

D'autre part, comme $\log|g(re^{i\theta})| \equiv \log|f(re^{i\theta})| - \sum_j \log|a_j - re^{i\theta}|$ et comme $\log|g|$ est une fonction continue (puisque g ne s'annule pas), le lemme 4.4.8 montre que la fonction $\theta \mapsto \log|f(re^{i\theta})|$ est intégrable sur $[0\,;2\pi]$ et qu'on a

$$\int_0^{2\pi} \log|g(re^{i\theta})|\,\frac{d\theta}{2\pi} = \int_0^{2\pi} \log|f(re^{i\theta})|\,d\theta - n\log r\,.$$

On obtient donc

$$\log|f(0)| - \sum_j \log|a_j| = \int_0^{2\pi} \log|f(re^{i\theta})|\,\frac{d\theta}{2\pi} - n\log r\,,$$

ce qui termine la démonstration.

4.4.3. Conséquences de la formule de Jensen

a. Intégrabilité du logarithme

Le résultat suivant est une conséquence très simple de la formule de Jensen.

Proposition 4.4.10. *Si f est holomorphe dans un disque $\mathrm{D}(0,\mathrm{R})$, $f \neq 0$, alors $\log|f|$ est intégrable sur tout cercle $\{|z| = r\}$, $0 < r < \mathrm{R}$, et $\int_0^{2\pi} \log|f(re^{i\theta})|d\theta$ est une fonction croissante de $r \in]0;\mathrm{R}[$. De plus, on a*

$$\log|f(0)| \leqslant \int_0^{2\pi} \log\left|f(re^{i\theta})\right| \frac{d\theta}{2\pi}$$

pour tout $r \in]0;\mathrm{R}[$.

Preuve. Notons que l'intégrabilité n'est pas évidente a priori, car la fonction $\log|f|$ peut prendre la valeur $-\infty$ en certains points et n'est pas bornée au voisinage d'un tel point.

Fixons f, et supposons d'abord $f(0) \neq 0$. En posant

$$\mathrm{Z}_r = \mathrm{Z}(f) \cap \overline{\mathrm{D}}(0,r) \quad \text{et} \quad \mathrm{S}(r) = \sum\nolimits_{a \in \mathrm{Z}(r)} \log\left|\frac{r}{a}\right|,$$

on a $\int_0^{2\pi} \log|f(re^{i\theta})|d\theta \equiv \log|f(0)| + \mathrm{S}(r)$. La somme $\mathrm{S}(r)$ est positive et fonction croissante de r car elle peut s'écrire $\sum_{a \in \mathrm{Z}(f)} \mathbf{1}_{(|a|;+\infty[}(r) \log\left|\frac{r}{a}\right|$ et est donc une somme de fonctions croissantes positives. On a donc bien le résultat souhaité dans ce cas.

Dans le cas général, on écrit $f(z) = z^m g(z)$, où g est holomorphe et $g(0) \neq 0$. On a

$$\log|f(re^{i\theta})| \equiv \log(r) + \log|g(re^{i\theta})|\,,$$

ce qui montre que $\log|f|$ est intégrable sur tout cercle $\{|z| = r\}$, $r < \mathrm{R}$, et que $\int_0^{2\pi} \log|f(re^{i\theta})|\,d\theta$ est la somme de deux fonctions croissantes de r.

Lorsque f se prolonge continûment au disque fermé $\overline{\mathrm{D}}(0,\mathrm{R})$, on peut se demander si $\log|f|$ est encore intégrable sur le cercle $\{|z| = \mathrm{R}\}$. On va voir que c'est effectivement le cas, mais on a d'abord besoin de préciser une notation.

Si φ est une fonction continue sur $\mathbb{T}$, alors la fonction $\theta \mapsto \log|\varphi(e^{i\theta})|$ est continue, à valeurs dans $[-\infty;+\infty[$. De plus, $\log|\varphi|$ est bornée supérieurement car $|\varphi|$ est bornée. La fonction $\log^+|\varphi| = \max(\log|\varphi|, 0)$ est donc intégrable sur $\mathbb{T}$, et on peut définir l'intégrale de $\log|\varphi|$ sur $\mathbb{T}$ en posant

$$\int_0^{2\pi} \log|\varphi(e^{i\theta})|\,d\theta = \int_0^{2\pi} \log^+|\varphi(e^{i\theta})|\,d\theta - \int_0^{2\pi} \log^-|\varphi(e^{i\theta})|\,d\theta\,,$$

où $\log^-|\varphi| = -\min(\log|\varphi|, 0)$. La deuxième intégrale a un sens car $\log^-|\varphi|$ est une fonction mesurable positive. L'intégrale $\int_0^{2\pi}\log|\varphi(e^{i\theta})|d\theta$ peut éventuellement être égale à $-\infty$. En fait, $\log|\varphi|$ est intégrable sur $\mathbb{T}$ au sens usuel si et seulement si $\int_0^{2\pi}\log|\varphi(e^{i\theta})|\,d\theta > -\infty$.

Notons que si M est une constante majorant la fonction $\log|\varphi|$, alors

$$\int_0^{2\pi} \log|\varphi(e^{i\theta})|\,d\theta = \int_0^{2\pi} \big(\log|\varphi(e^{i\theta})| - \mathrm{M}\big)\,d\theta + 2\pi\mathrm{M}\,,$$

l'intégrale du membre de droite ayant un sens comme intégrale d'une fonction mesurable négative. Cela montre en particulier que le lemme de Fatou s'applique sous la forme suivante : *si (φ_n) est une suite de fonctions continues sur $\mathbb{T}$, uniformément majorée, alors*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \int \log|\varphi_n| \leqslant \int \overline{\lim_{n\to\infty}} \log|\varphi_n|\ .$$

On peut maintenant énoncer le

Théorème 4.4.11. *Si $f \in \mathrm{A}(\mathbb{D})$, alors $\int_0^{2\pi}\log|f(re^{i\theta})|\,d\theta$ est une fonction croissante de $r \in [0;1]$. En particulier, on a*

$$\log|f(0)| \leqslant \int_0^{2\pi} \log|f(e^{i\theta})|\ \frac{d\theta}{2\pi}\cdot$$

Preuve. Rappelons que $\mathrm{A}(\mathbb{D})$ est l'ensemble des fonctions continues sur $\overline{\mathbb{D}}$ et holomorphe dans $\mathbb{D}$. Fixons $f \in \mathrm{A}(\mathbb{D})$. D'après 4.4.10, il suffit de montrer qu'on a $\int_0^{2\pi}\log|f(re^{i\theta})|\,\frac{d\theta}{2\pi} \leqslant \int_0^{2\pi}\log|f(e^{i\theta})|\,\frac{d\theta}{2\pi}$ pour tout $r<1$.

Quand r tend vers 1, $\log|f(re^{i\theta})|$ tend simplement vers $\log|f(e^{i\theta})|$ sur $[0;2\pi]$ car f est continue sur $\overline{\mathbb{D}}$. D'autre part, $\log|f(re^{i\theta})|$ est majoré indépendamment de $r \in [0;1[$ et de $\theta \in [0;2\pi]$ car $\log|f|$ est bornée supérieurement sur $\overline{\mathbb{D}}$. D'après le lemme de Fatou, on a donc

$$\overline{\lim_{r\to 1}} \int_0^{2\pi} \log|f(re^{i\theta})|\,d\theta \leqslant \int_0^{2\pi} \log|f(e^{i\theta})|\,d\theta\,,$$

autrement dit $\sup_{r<1}\int_0^{2\pi}\log|f(re^{i\theta})|\,\frac{d\theta}{2\pi} \leqslant \int_0^{2\pi}\log|f(e^{i\theta})|\,\frac{d\theta}{2\pi}$ puisque $\int_0^{2\pi}\log|f(re^{i\theta})|\,\frac{d\theta}{2\pi}$ est une fonction croissante de $r \in [0;1[$.

Corollaire 4.4.12. *Si $f \in \mathrm{A}(\mathbb{D})$, $f \neq 0$, alors $\log|f|$ est intégrable sur $\mathbb{T}$.*

Preuve. En notant m la multiplicité de 0 comme zéro éventuel de f, on peut écrire $f(z) = z^m g(z)$, où $g \in \mathrm{A}(\mathbb{D})$ et $g(0) \neq 0$. On a ainsi

$\log|f(e^{i\theta})| \equiv \log|g(e^{i\theta})|$, et donc

$$\int_0^{2\pi} \log|f(e^{i\theta})| \frac{d\theta}{2\pi} \geqslant \log|g(0)| > -\infty .$$

Corollaire 4.4.13. *Si $f \in \mathrm{A}(\mathbb{D})$, $f \neq 0$ alors l'ensemble $\{\zeta \in \mathbb{T}; f(\zeta) = 0\}$ est de mesure de Lebesgue nulle dans $\mathbb{T}$.*

Preuve. Si cet ensemble n'était pas de mesure nulle, on aurait

$$\int_0^{2\pi} \log|f(e^{i\theta})| \, d\theta = -\infty .$$

b. Croissance et distribution des zéros

La formule de Jensen permet de relier la « croissance » d'une fonction holomorphe à la distribution de ses zéros. L'idée générale est que si une fonction holomorphe non identiquement nulle n'est « pas très grande », alors l'ensemble de ses zéros n'est « pas très concentré ».

Voici un exemple caricatural.

Soit f une fonction entière (c'est-à-dire holomorphe sur $\mathbb{C}$), et supposons que f soit *bornée* sur $\mathbb{C}$. Si f n'est pas constante, on peut supposer, quitte à retrancher une constante à f, qu'on a $f(0) \neq 0$ et $f(a) = 0$ pour un certain point $a \in \mathbb{C}$. D'après la formule de Jensen, on a alors $\log|f(0)| + \log|r/a| \leqslant \int_0^{2\pi} \log|f(re^{i\theta})| \frac{d\theta}{2\pi}$ pour tout $r \geqslant |a|$. Comme f est bornée, le second membre de cette inégalité est majoré indépendamment de r, tandis que le premier membre tend vers $+\infty$ quand r tend vers $+\infty$: on obtient donc une contradiction. Ainsi, une fonction entière bornée est nécessairement *constante*. Ce résultat est le **théorème de Liouville**. On donnera plus loin la démonstration classique du théorème de Liouville, qui est beaucoup plus simple que celle indiquée ici.

On va maintenant donner un exemple moins « anecdotique ».

Définition 4.4.14. *On dit qu'une fonction f holomorphe dans le disque unité $\mathbb{D}$ appartient à la* **classe de Nevanlinna** *$\mathcal{N}$ si elle vérifie*

$$\sup_{r<1} \int_0^{2\pi} \log^+ \left|f(re^{i\theta})\right| d\theta < +\infty .$$

Exemple 4.4.15. *Toute fonction holomorphe bornée appartient à la classe $\mathcal{N}$.*

Preuve. Si f est bornée, alors $\log^+|f(re^{i\theta})|$ est borné indépendamment de r (et de θ).

Proposition 4.4.16. *Soit f une fonction holomorphe dans le disque unité $\mathbb{D}$, $f \neq 0$, et notons (a_n) la suite des zéros de f dans $\mathbb{D}$, chaque zéro étant compté selon sa multiplicité. Si f appartient à la classe $\mathcal{N}$, alors la suite (a_n) vérifie la* **condition de Blaschke** $\sum_n (1 - |a_n|) < +\infty$.

Preuve. Supposons que f appartienne à la classe $\mathcal{N}$. En écrivant $f(z) = z^m g(z)$, où g est holomorphe et $g(0) \neq 0$, on se ramène au cas où $f(0) \neq 0$.

Il n'y a rien a démontrer si f n'a qu'un nombre fini de zéros ; on peut donc supposer que (a_n) comporte une infinité de termes. Comme $\mathrm{Z}(f)$ n'a pas de point d'accumulation dans $\mathbb{D}$, on a alors $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 1$. Quitte à permuter les a_n, on peut donc également supposer que la suite $(|a_n|)$ est croissante. Par conséquent, si on pose $n(r) = \max\{n;\ |a_n| \leqslant r\}$, alors $n(r)$ est une fonction croissante de $r \in]0\,;1[$. De plus $n(r)$ tend vers $+\infty$ quand r tend vers 1.

D'après la formule de Jensen, on a

$$\sum_{n \leqslant n(s)} \log |s/a_n| = -\log |f(0)| + \int_{-\pi}^{\pi} \log |f(se^{i\theta})| \, \frac{d\theta}{2\pi}$$

pour tout $s \in]0\,;1[$. D'autre part, si $r \leqslant s < 1$, alors

$$\sum_{n \leqslant n(r)} \log |s/a_n| \leqslant \sum_{n \leqslant n(s)} \log |s/a_n|$$

car $n(s) \geqslant n(r)$ et $\log |s/a_n| \geqslant 0$ si $n \leqslant n(s)$. Par conséquent,

$$\sum_{n \leqslant n(r)} \log \left| \frac{s}{a_n} \right| \leqslant -\log |f(0)| + \int_0^{2\pi} \log \left| f(se^{i\theta}) \right| \, \frac{d\theta}{2\pi}$$

pour tous r, s vérifiant $r \leqslant s < 1$.

Comme $f \in \mathcal{N}$, le second membre est majoré par une constante indépendante de s. En faisant tendre s vers 1, on en déduit que $\sum_{n \leqslant n(r)} \log |1/a_n|$ est majoré indépendamment de r. Comme on a $\lim_{r\to 1} n(r) = +\infty$, cela entraîne que les sommes partielles de la série $\sum \log |1/a_n|$ sont majorées, ce qui prouve que cette série à termes positifs est convergente. Comme $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 1$, on a $\log |1/a_n| \sim 1 - |a_n|$, donc la série $\sum (1 - |a_n|)$ est également convergente puisque les deux séries sont à termes positifs.

Autre preuve dans le cas d'une fonction bornée. La démonstration qui suit n'utilise pas la formule de Jensen. Supposons f bornée, avec toujours $f(0) \neq 0$. Comme on a $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 1$, il suffit de montrer que la série à termes négatifs $\sum \log |a_n|$ est convergente, autrement dit qu'on a

$$\sum_0^\infty \log|a_n| > -\infty \ .$$

Pour $z \in \overline{\mathbb{D}}$ et $N \geqslant 0$, posons

$$B_N(z) = \prod_0^n \frac{a_n - z}{1 - \overline{a}_n z} \cdot$$

La fonction B_N est continue sur $\overline{\mathbb{D}}$, holomorphe dans $\mathbb{D}$, et on a $|B_N(\zeta)| \equiv 1$ sur $\mathbb{T}$ car chacun des facteurs $\frac{a_n - \zeta}{1 - \overline{a}_n \zeta}$ est de module 1 pour $\zeta = e^{it} \in \mathbb{T}$. D'autre part, la fonction f/B_N est bien définie et holomorphe dans $\mathbb{D}$ puisque (a_n) est la suite des zéros de f.

Fixons $N \geqslant 0$. Pour $r > \max\{|a_0|; ...; |a_N|\}$, on a, d'après le principe du maximum (voir 4.8) :

$$\frac{|f(0)|}{|B_N(0)|} \leqslant \sup\left\{\frac{|f(w)|}{|B_N(w)|};\ |w| = r\right\} \leqslant ||f||_\infty \times \frac{1}{\inf\{|B_N(w)|;\ |w| = r\}} \cdot$$

Comme B_N est uniformément continue sur $\overline{\mathbb{D}}$ et de module 1 sur $\mathbb{T}$, le membre de droite tend vers $||f||_\infty$ quand r tend vers 1. On en déduit

$$|f(0)| \leqslant ||f||_\infty |B_N(0)| = ||f||_\infty \times \prod_0^N |a_n|$$

pour tout entier $N \geqslant 0$, d'où, en posant $\delta = \frac{|f(0)|}{||f||_\infty}$:

$$\sum_0^\infty \log|a_n| \geqslant \log(\delta) > -\infty \ .$$

Cela termine la démonstration.

Remarque 4.4.17. *La condition de Blaschke est bien une propriété de « non-concentration dans le disque $\mathbb{D}$ » car elle signifie que la suite (a_n) se rapproche assez vite de la frontière de $\mathbb{D}$. On verra plus loin qu'elle caractérise entièrement les suites de zéros de la classe $\mathcal{N}$, et même les suites de zéros de fonctions holomorphes bornées dans $\mathbb{D}$.*

4.5. Séries de Laurent

Soit V une couronne ouverte dans le plan :

$$V = \{z \in \mathbb{C};\ r_1 < |z - a| < r_2\} \ ,$$

où $a \in \mathbb{C}$ et $0 \leqslant r_1 < r_2 \leqslant +\infty$.

Si f est une fonction holomorphe dans V et si $n \in \mathbb{Z}$, il découle du théorème de Cauchy que l'intégrale

$$\int_{\partial D(0,r)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}}\, d\zeta$$

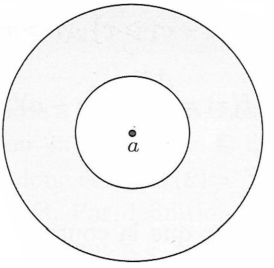


FIG. 27.

est indépendante de $r \in]r_1;r_2[$. En effet, si $r_1 < r < r' < r_2$, alors la fonction $\zeta \mapsto f(\zeta)/(\zeta-a)^{n+1}$ est holomorphe au voisinage de la couronne $\mathrm{K} = \{r \leqslant |z-a| \leqslant r'\}$, donc $\int_{\partial \mathrm{K}} f(\zeta)/(\zeta-a)^{n+1}\, d\zeta = 0$, autrement dit $\int_{\partial \mathrm{D}(0,r)} f(\zeta)/(\zeta-a)^{n+1}\, d\zeta = \int_{\partial \mathrm{D}(0,r')} f(\zeta)/(\zeta-a)^{n+1}\, d\zeta$.

Pour $n \in \mathbb{Z}$, on définit le n-ième **coefficient de Laurent de f au point** a par la formule

$$c_n = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial \mathrm{D}(0,r)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}\, d\zeta \,,$$

où r est n'importe quel nombre vérifiant $r_1 < r < r_2$. On a également

$$c_n = r^{-n} \int_0^{2\pi} f(a + re^{i\theta})\, e^{-in\theta}\, \frac{d\theta}{2\pi} \,,$$

de sorte que les $c_n r^n$ sont les coefficients de Fourier de la fonction 2π-périodique $\mathbf{f}_r$ définie par

$$\mathbf{f}_r(\theta) = f(re^{i\theta}) \,.$$

La série $\sum c_n(z-a)^n$ s'appelle la **série de Laurent** de f au point a.

Si f est holomorphe dans tout le disque $\mathrm{D}(a,r_2)$, alors les fonctions $z \mapsto f(z)/(z-a)^{n+1}$, $n < 0$ sont holomorphes dans ce disque, donc $c_n = 0$ pour tout $n < 0$ d'après le théorème de Cauchy. De plus, pour $n \geqslant 0$, c_n est le n-ième coefficient de Taylor de f, d'après la formule de Cauchy. Le résultat suivant généralise donc le théorème 3.4.1.

Théorème 4.5.1. *Soit f une fonction holomorphe dans une couronne*

$$\mathrm{V} = \{r_1 < |z-a| < r_2\} \,.$$

Si on note $\sum c_n(z-a)^n$ sa série de Laurent au point a, alors la série $\sum_{n\geqslant 0} c_n(z-a)^n$ converge normalement sur les compacts de $\mathrm{V}_2 = \{|z-a| < r_2\}$, la série $\sum_{n>0} c_{-n}(z-a)^{-n}$ converge normalement

sur tout ensemble du type $\{|z-a| \geqslant r\}$, $r > r_1$, *et on a*

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n (z-a)^n$$

pour tout $z \in \mathrm{V}$.

Preuve. On peut supposer que la couronne est centrée en 0. Soit f une fonction holomorphe dans la couronne $\mathrm{V} = \{r_1 < |z| < r_2\}$, et fixons ρ_1, ρ_2 tels que $0 \leqslant r_1 < \rho_1 < \rho_2 < r_2$.

Si $\rho_1 < |z| < \rho_2$, la formule de Cauchy appliquée à la couronne fermée $\{\rho_1 \leqslant |\zeta| \leqslant \rho_2\}$ donne

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial \mathrm{D}(0,\rho_2)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta - \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial \mathrm{D}(0,\rho_1)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta$$

D'après le corollaire 3.1.16, les deux intégrales définissent des fonctions f_1 et f_2 holomorphes respectivement dans $\mathbb{C}\backslash\partial\mathrm{D}(0,\rho_1)$ et $\mathbb{C}\backslash\partial\mathrm{D}(0,\rho_2)$.

Si $|z| < \rho_2$, on peut écrire

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta} \sum_{0}^{\infty} \left(\frac{z}{\zeta}\right)^n$$

pour tout $\zeta \in \partial\mathrm{D}(0,\rho_2)$, où la série converge normalement sur $\mathrm{K} \times \partial\mathrm{D}(0,\rho_2)$ pour tout compact $\mathrm{K} \subset \mathrm{D}(0,\rho_2)$. On a donc

$$f_2(z) = \sum_{0}^{\infty} \frac{z^n}{2i\pi} \int_{\partial \mathrm{D}(0,\rho_2)} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}}\, d\zeta = \sum_{0}^{\infty} c_n z^n$$

pour $|z| < \rho_2$, où la série converge normalement sur tout compact de $\mathrm{D}(0,\rho_2)$.

De même, si $|z| > \rho_1$, on écrit

$$\frac{1}{\zeta - z} = -\frac{1}{z} \sum_{0}^{\infty} \left(\frac{\zeta}{z}\right)^n$$

pour tout $\zeta \in \partial\mathrm{D}(0,\rho_1)$, et on en déduit

$$f_1(z) = -\sum_{0}^{\infty} \frac{1}{2i\pi z^{n+1}} \int_{\partial \mathrm{D}(0,\rho_1)} f(\zeta)\zeta^n\, d\zeta = -\sum_{1}^{\infty} c_{-n} z^{-n}\,,$$

où la série converge normalement sur tout ensemble du type $\{|z| \geqslant \rho\}$, $\rho > \rho_1$. On obtient ainsi

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n z^n$$

pour $\rho_1 < |z| < \rho_2$. Comme $\rho_1 > r_1$ et $\rho_2 < r_1$ sont arbitraires, cela termine la démonstration.

Autre preuve. On suppose à nouveau la couronne V centrée en 0. Pour tout $r \in]r_1; r_2[$, la fonction 2π-périodique $\mathbf{f}_r$ définie par $\mathbf{f}_r(\theta) = f(re^{i\theta})$ est de classe $\mathcal{C}^1$. On peut donc écrire $\mathbf{f}_r(\theta) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \hat{\mathbf{f}}_r(n) e^{in\theta}$, où la série converge normalement sur $\mathbb{R}$. Par définition des coefficients de Laurent de f, on a $\hat{\mathbf{f}}_r(n) = c_n r^n$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$, donc on obtient

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{-1} c_n z^n + \sum_{0}^{\infty} c_n z^n$$

pour tout point $z = re^{i\theta} \in \mathrm{V}$. Enfin, comme r^n est fonction croissante de r si $n \geqslant 0$ et fonction décroissante de r si $n < 0$ et comme $\sum_{-\infty}^{+\infty} |c_n| r^n = \sum_{-\infty}^{+\infty} |\hat{\mathbf{f}}_r(n)| < +\infty$ pour tout $r \in]r_1\,; r_2[$, la première série converge normalement sur tout ensemble du type $\{|z| \geqslant r\}$, $r > r_1$, et la deuxième converge normalement sur tout compact de $\{|z| < r_2\}$.

Corollaire 4.5.2. *Si f est holomorphe dans $\mathrm{V} = \{r_1 < |z-a| < r_2\}$, alors il existe des fonctions f_1 et f_2 holomorphes respectivement dans $\mathrm{V}_1 = \{|z-a| > r_1\}$ et $\mathrm{V}_2 = \{|z-a| < r_2\}$ telles que $f \equiv f_2 - f_1$ dans $\mathrm{V} = \mathrm{V}_1 \cap \mathrm{V}_2$.*

Preuve. Il suffit de poser

$$f_2(z) = \sum_{n \geqslant 0} c_n (z-a)^n \quad \text{et} \quad f_1(z) = -\sum_{n>0} c_{-n} (z-a)^{-n}\,.$$

Terminons cette section par une remarque importante.

Remarque 4.5.3. *Soit f une fonction définie dans une couronne $\mathrm{V} = \{r_1 < |z-a| < r_2\}$, et supposons qu'on puisse écrire $f(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} d_n (z-a)^n$, où les deux séries $\sum_{n<0} d_n (z-a)^n$ et $\sum_{n \geqslant 0} d_n (z-a)^n$ convergent en tout point de* V. *Alors la convergence des deux séries est uniforme sur tout compact de* V, *la fonction f est holomorphe et les d_n sont les coefficients de Laurent de f au point a.*

Preuve. D'après le lemme d'Abel sur les séries entières, la série $\sum_{n \geqslant 0} d_n (z-a)^n$ converge normalement sur tout compact de $\mathrm{D}(a, r_2)$ et la série $\sum_{n<0} d_n (z-a)^n$ converge normalement sur tout ensemble du type $\{|z-a| \geqslant r\}$, $r > r_1$. Les deux séries convergent donc uniformément sur tout compact de V, ce qui prouve que f est holomorphe. La dernière partie de la remarque s'obtient en écrivant les coefficients de Laurent de f et en intégrant terme à terme.

4.6. Singularités isolées ; fonctions méromorphes

4.6.1. Singularités isolées

Définition 4.6.1. *Si f est une fonction holomorphe dans un ouvert $V \subset \mathbb{C}$, on dit qu'un point $a \in \mathbb{C}$ est une* **singularité isolée** *pour f si a est un point isolé de ∂V ; autrement dit si $V \cup \{a\}$ est encore un ouvert de $\mathbb{C}$. On dit que a est une singularité* **éliminable** *pour f s'il est possible de prolonger f en une fonction holomorphe dans l'ouvert $V \cup \{a\}$.*

Remarques. 1) Si a est une singularité éliminable pour f, alors f admet un *unique* prolongement holomorphe dans $V \cup \{a\}$ car V est dense dans $V \cup \{a\}$.

2) Pour vérifier que a est une singularité éliminable pour f, il suffit de trouver un voisinage W de a et une fonction h holomorphe sur W qui coïncide avec f sur $W\backslash\{a\}$. En effet, la fonction g définie sur V par $g(a) = h(a)$ et $g(z) = f(z)$ si $z \neq a$ est alors holomorphe dans $V \cup \{a\}$, car elle est holomorphe sur V et également holomorphe au voisinage de a puisque $g \equiv h$ sur W.

Dans la suite, on appellera **voisinage épointé** d'un point $a \in \mathbb{C}$ tout ensemble de la forme $W\backslash\{a\}$, où W est un voisinage ouvert de a dans $\mathbb{C}$.

D'après le corollaire 4.2.4, si a est une singularité isolée pour une fonction holomorphe f et si la fonction f se prolonge par continuité au point a, alors a est une singularité éliminable pour f. Le théorème suivant est un peu plus général.

Théorème 4.6.2. *Si a est une singularité isolée pour une fonction holomorphe f et si f est bornée dans un voisinage épointé de a, alors a est une singularité éliminable pour f.*

Preuve. Fixons a et f, et choisissons $\delta > 0$ et $M < +\infty$ tels que $|f(z)| \leqslant M$ sur $D(a,\delta)\backslash\{a\}$. On suppose également que f est holomorphe au voisinage de $\overline{D}(a,\delta)\backslash\{a\}$.

Si $z \in D(a,\delta)\backslash\{a\}$ et si $\varepsilon < |z-a|$, alors $z \in D(a,\delta)\backslash\overline{D}(a,\varepsilon)$. On peut donc appliquer la formule de Cauchy à z et au compact $K = \overline{D}(a,\delta)\backslash D(a,\varepsilon)$, ce qui donne

$$(*) \qquad f(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\partial D(a,\delta)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta - \frac{1}{2i\pi}\int_{\partial D(a,\varepsilon)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta\,.$$

D'après l'inégalité triangulaire, on a $|\zeta - z| \geqslant |z-a| - \varepsilon$ sur $\partial D(a,\varepsilon)$. Par conséquent

$$\left|\int_{\partial \mathrm{D}(a,\varepsilon)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta\right| \leqslant \frac{\mathrm{M}}{|z-a|-\varepsilon} \int_{\partial \mathrm{D}(a,\varepsilon)} |d\zeta| = \frac{\mathrm{M}}{|z-a|-\varepsilon} \times 2\pi\varepsilon\ ,$$

et donc $\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\partial \mathrm{D}(a,\varepsilon)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = 0$. En passant à la limite dans $(*)$, on obtient ainsi :

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial \mathrm{D}(a,\delta)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta$$

pour tout $z \in \mathrm{D}(a,\delta) \setminus \{a\}$. D'après le corollaire 3.1.16, l'intégrale du membre de droite définit une fonction holomorphe dans le disque $\mathrm{D}(a,\delta)$. Comme cette fonction coïncide avec f sur $\mathrm{D}(a,\delta) \setminus \{a\}$, le point a est donc une singularité éliminable pour f.

Variante. Choisissons comme plus haut δ et M tels que $|f(z)| \leqslant \mathrm{M}$ sur $\mathrm{D}(a,\delta) \setminus \{a\}$. En notant c_n les coefficients de Laurent de f au point a, on a alors

$$|c_n| \leqslant \frac{\mathrm{M}}{r^{n+1}} \times 2\pi r = 2\pi \mathrm{M}\, r^{-n}$$

pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et pour tout $r \in]0\,;\delta[$. En faisant tendre r vers 0, on en déduit $c_n = 0$ pour tout $n < 0$. D'après le théorème 4.5.1, on a donc

$$f(z) = \sum_{0}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

pour tout $z \in \mathrm{D}(a,\delta) \setminus \{a\}$, la somme du second membre définissant une fonction h holomorphe dans le disque $\mathrm{D}(a,\delta)$. Cela termine la démonstration.

Autre preuve. Définissons $u : \mathrm{V} \cup \{a\} \to \mathbb{C}$ par $u(a) = 0$ et $u(z) = (z-a)f(z)$ si $z \neq a$. L'hypothèse faite sur f entraîne que u est continue au point a. Comme u est de plus holomorphe sur V, on en déduit, d'après le corollaire 4.2.4, que u est holomorphe dans $\mathrm{V} \cup \{a\}$. Puisque $u(a) = 0$, on peut donc écrire $u(z) = (z-a)g(z)$, où g est holomorphe dans $\mathrm{V} \cup \{a\}$. La fonction g est l'extension désirée.

Le théorème suivant décrit le comportement d'une fonction holomorphe au voisinage d'une singularité isolée.

Théorème 4.6.3. (Théorème de Casorati-Weierstrass.)

Soit $a \in \Omega$ et soit f une fonction holomorphe dans $\Omega \setminus \{a\}$. Notons $\sum c_n (z-a)^n$ la série de Laurent de f au point a. Trois cas seulement peuvent se présenter.

(a) *Le point a est une singularité éliminable pour f. Ceci a lieu si et seulement si $c_n = 0$ pour tout entier $n < 0$.*

(b) $\lim_{z\to a}|f(z)| = +\infty$. *Ceci a lieu si et seulement si il existe un entier* $m \geqslant 1$ *tel que* $c_{-m} \neq 0$ *et* $c_n = 0$ *pour* $n < -m$, *et on dit alors que* a *est un* **pôle** *(de multiplicité* m*) de la fonction* f.

(c) *L'image de tout voisinage épointé de* a *est dense dans* $\mathbb{C}$. *Ceci a lieu si et seulement si* $c_n \neq 0$ *pour une infinité d'entiers* $n < 0$, *et on dit alors que le point* a *est une* **singularité essentielle** *pour* f.

Preuve. Par translation, on peut supposer $a = 0$. Soit $r > 0$ tel que $\mathrm{D} = \mathrm{D}(0,r) \subset \Omega$, et posons $\mathrm{D}^* = \mathrm{D}\backslash\{0\}$.

Si 0 est une singularité éliminable pour f, alors le prolongement holomorphe de f à Ω se développe en série entière dans D. On peut donc écrire $f(z) = \sum_{n\geqslant 0} d_n z^n$ dans D^*, avec convergence uniforme sur les compacts de D^*. D'après la remarque 4.5.3, on a donc $c_n = 0$ si $n < 0$. Inversement, si $c_n = 0$ pour $n < 0$, alors la série de Laurent de f en 0 est une série entière $\sum_{n\geqslant 0} c_n z^n$, qui converge uniformément sur les compacts de D d'après le théorème 4.5.1 . La somme de cette série définit dans D une fonction holomorphe qui prolonge $f_{|\mathrm{D}^*}$. Le point $a = 0$ est donc une singularité éliminable pour f.

Supposons qu'on ait $\lim_{z\to 0}|f(z)| = +\infty$. Quitte à remplacer D par un disque plus petit, on peut alors également supposer que f ne s'annule pas dans D^*. La fonction $g : \mathrm{D}^* \to \mathbb{C}$ définie par $g(z) = 1/f(z)$ est donc holomorphe dans D^*, et a pour limite 0 en 0 ; d'après le théorème 4.6.2 (ou le corollaire 4.2.4), elle se prolonge donc en une fonction holomorphe sur D, encore notée g, telle que $g(0) = 0$. Soit $m \geqslant 1$ l'ordre de $a = 0$ comme zéro de g. On peut écrire $g(z) = z^m h(z)$, où h est holomorphe dans D et $h(0) \neq 0$. Quitte à prendre un disque D plus petit, on peut supposer que h ne s'annule pas dans D. La fonction $1/h$ est alors holomorphe dans D, donc développable en série entière dans D. En écrivant $1/h(z) = \sum_{n\geqslant 0} d_n z^n$, on obtient, pour $z \in \mathrm{D}^*$,

$$f(z) = \frac{1}{z^m} \times \frac{1}{h(z)} = \sum_{k\geqslant -m} d_{m+k} z^k \,.$$

D'après la remarque 4.5.3, on a donc $c_{-m} = d_0 \neq 0$, et $c_n = 0$ si $n < -m$.

Supposons maintenant qu'il existe un entier $m \geqslant 1$ tel que $c_{-m} \neq 0$ et $c_n = 0$ si $n < -m$. Dans D^*, on a alors

$$f(z) = \sum_{n\geqslant -m} c_n z^n = \frac{1}{z^m} \sum_{k\geqslant 0} c_{k-m} z^k = \frac{1}{z^m} h(z) \,.$$

La série définissant h converge en tout point de D^*, donc elle converge normalement sur tout compact de D d'après le lemme d'Abel. On peut

donc prolonger h en une fonction – encore notée h – holomorphe dans D et vérifiant $h(0) = c_{-m} \neq 0$. Par continuité de h en 0, on a donc bien $\lim_{z\to 0} |f(z)| = +\infty$.

Pour achever la démonstration, il suffit maintenant de montrer que si (c) n'est pas vérifié, alors on est dans l'un des cas (a) ou (b). Supposons donc qu'il existe un voisinage épointé de 0 dont l'image par f ne soit pas dense dans $\mathbb{C}$. Cela signifie qu'on peut trouver un nombre $\rho > 0$, un point $w \in \mathbb{C}$ et un nombre $\varepsilon > 0$ tels que $\mathrm{D}(0,\rho) \subset \Omega$ et

$$|f(z) - w| \geqslant \varepsilon$$

pour tout $z \in \mathrm{D}(0,\rho)\backslash\{0\}$. La fonction g définie par $g(z) = \frac{1}{f(z)-w}$ est alors holomorphe et *bornée* dans $\mathrm{D}(0,\rho)\backslash\{0\}$. D'après le théorème 4.6.2, elle se prolonge donc en une fonction holomorphe dans $\mathrm{D}(0,\rho)$, et en particulier, $g(z)$ admet une limite $l \in \mathbb{C}$ quand z tend vers 0. Si $l \neq 0$, alors $f(z)$ tend vers $w + \frac{1}{l}$ quand z tend vers 0, et on est dans le cas (a) ; si $l = 0$, alors $|f(z) - w|$ tend vers $+\infty$ quand z tend vers 0, et on est dans le cas (b).

Remarque 4.6.4. *Si a est un pôle de multiplicité m, la fraction rationnelle $\sum_1^m \frac{c_{-n}}{(X-a)^n}$ s'appelle la* **partie principale** *de f au point a.*

4.6.2. Fonctions méromorphes

Définition 4.6.5. *On appellera fonction* **méromorphe** *dans Ω toute fonction f holomorphe dans $\Omega\backslash\mathrm{S}$, où S est un fermé discret de Ω, telle que les singularités de f aux points de S soient toutes des pôles. On notera $\mathcal{M}(\Omega)$ l'ensemble des fonctions méromorphes dans Ω.*

Si Ω est connexe et si f est méromorphe dans Ω, $f \neq 0$, alors l'ensemble constitué par les zéros et les pôles de f n'a pas de points d'accumulation dans Ω : en effet, les pôles de f sont les points de l'ensemble S intervenant dans la définition, et d'autre part, comme S est dénombrable, l'ouvert $\Omega\backslash\mathrm{S}$ est connexe si Ω est connexe, donc la remarque concernant les zéros vient du principe des zéros isolés.

On en déduit que si Ω connexe, alors on peut définir de manière évidente l'*inverse* d'une fonction méromorphe non identiquement nulle $f \in \mathcal{M}(\Omega)$, ce qui permet de munir $\mathcal{M}(\Omega)$ d'une structure de corps. On verra au chapitre 9 que $\mathcal{M}(\Omega)$ s'identifie au corps des fractions de l'anneau intègre $\mathcal{H}(\Omega)$.

4.6.3. Exemples : prolongements méromorphes de Γ et ζ

Les fonctions Γ et ζ ont été définies dans les demi-plans $\{\mathrm{Re}(z) > 0\}$ et $\{\mathrm{Re}(s) > 1\}$ par les formules

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t}\, dt$$

et

$$\zeta(s) = \sum_1^\infty \frac{1}{n^s}\,.$$

On va montrer ici qu'on peut prolonger méromorphiquement ces fonctions à des domaines plus grands. D'après le principe du prolongement analytique, il y a nécessairement *unicité* des prolongements.

Théorème 4.6.6. *La fonction Γ se prolonge en une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$ dont les pôles, tous simples, sont les entiers négatifs ou nuls.*

Preuve. Pour z et t fixés, on a

$$t^{z-1}e^{-t} = \sum_0^\infty \frac{(-1)^n}{n!}\, t^{z+n-1} = t^{z-1} + \sum_1^\infty \frac{(-1)^n}{n!}\, t^{z+n-1}\,.$$

Si $\mathrm{Re}(z) > 0$, la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n!}\, t^{z+n-1}$ converge uniformément sur $[0\,;1]$ par rapport à t, et la fonction $t \mapsto t^{z-1}$ est intégrable sur $]0\,;1]$. On peut donc écrire $\Gamma(z) = \sum_0^\infty \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^1 t^{z+n-1} dt + \int_1^\infty t^{z-1} e^{-t} dt$, autrement dit

$$\Gamma(z) = \sum_0^\infty \frac{(-1)^n}{n!}\, \frac{1}{z+n} + \int_1^\infty t^{z-1} e^{-t}\, dt\,.$$

La série $\sum \frac{(-1)^n}{n!}\, \frac{1}{z+n}$ converge normalement sur tout compact de $\mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}^-$, et pour tout entier $k \geqslant 0$, la série $\sum_{n\neq k} \frac{(-1)^n}{n!}\, \frac{1}{z+n}$ converge normalement sur tout compact de $\mathbb{C}\setminus\{-k\}$. La somme apparaissant au membre de droite définit donc une fonction méromorphe dans $\mathbb{C}$ dont les pôles, tous simples, sont les entiers négatifs. D'autre part, l'intégrale apparaissant au second membre a un sens pour tout $z \in \mathbb{C}$, et elle définit une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$ d'après le théorème d'holomorphie pour les intégrales à paramètres. On obtient donc bien le prolongement souhaité.

Remarque 4.6.7. *Il découle de la démonstration précédente que pour tout entier $n \geqslant 0$, on a $\Gamma(z) \sim \frac{(-1)^n}{n!}\, \frac{1}{z+n}$ au voisinage de $z = -n$.*

Passons maintenant à la fonction ζ. On verra au chapitre 8 que la fonction ζ peut se prolonger méromorphiquement à $\mathbb{C}$ tout entier, avec un unique pôle au point 1. On se contente ici de démontrer le résultat suivant.

Proposition 4.6.8. *La fonction* $s \mapsto \zeta(s) - \dfrac{1}{s-1}$ *se prolonge holomorphiquement au demi-plan* $\{\mathrm{Re}(s) > 0\}$.

Preuve. Si $\mathrm{Re}(s) > 1$, alors $\frac{1}{s-1} = \int_1^\infty \frac{dt}{t^s} = \sum_1^\infty \int_n^{n+1} \frac{dt}{t^s}$. On a donc

$$\zeta(s) - \frac{1}{s-1} = \sum_1^\infty \int_n^{n+1} \left(\frac{1}{n^s} - \frac{1}{t^s}\right) dt = \sum_1^\infty \varphi_n(s) \,.$$

Les fonctions φ_n sont holomorphes sur $\mathbb{C}$, et d'après l'inégalité des accroissements finis, on a

$$|\varphi_n(s)| \leqslant \sup_{[n;n+1]} \left|\frac{1}{n^s} - \frac{1}{t^s}\right| \leqslant \frac{|s|}{|n^{1+s}|} = \frac{|s|}{n^{1+\mathrm{Re}(s)}}$$

pour tout $n \geqslant 1$ et pour tout $s \in \mathbb{C}$. Par conséquent, la série $\sum \varphi_n$ converge normalement sur tout compact de $\{\mathrm{Re}(s) > 0\}$ et définit donc une fonction holomorphe dans ce demi-plan.

Corollaire 4.6.9. *La fonction* ζ *se prolonge méromorphiquement au demi-plan* $\{\mathrm{Re}(s) > 0\}$, *avec pour seul pôle – simple – le point* $s = 1$. *De plus, on a* $\zeta(s) \sim \frac{1}{s-1}$ *au voisinage de* 1.

4.7. Théorème de Liouville

Rappelons qu'une fonction est dite **entière** si elle est holomorphe sur $\mathbb{C}$ tout entier. Le théorème suivant montre que les polynômes sont les seules fonctions entière à « croissance polynomiale ».

Théorème 4.7.1. *Si* f *est une fonction entière et si* $|f(z)| = \mathrm{O}(|z|^\alpha)$ *quand* $|z|$ *tend vers l'infini, où* α *est une constante positive, alors* f *est une fonction polynomiale de degré inférieur ou égal à* α.

Preuve. Si f est une fonction entière, $f(z) = \sum_{n\geqslant 0} c_n z^n$, alors, d'après les inégalités de Cauchy, on a

$$|c_n| \leqslant \frac{\mathrm{M(R)}}{\mathrm{R}^n}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $\mathrm{R} > 0$, où $\mathrm{M(R)} = \sup\{|f(z)|;\ |z| = \mathrm{R}\}$. Si de plus $|f(z)| = \mathrm{O}(|z|^\alpha)$ quand $|z|$ tend vers l'infini, on obtient

$$|c_n| = \mathrm{O}\Big(\frac{1}{\mathrm{R}^{n-\alpha}}\Big)$$

quand R tend vers l'infini, pour tout $n \in \mathbb{N}$. On en déduit $c_n = 0$ pour $n > \alpha$, ce qui achève la démonstration.

Corollaire 4.7.2. (Théorème de Liouville.) *Toute fonction entière bornée est constante.*

L'application la plus classique du théorème de Liouville est le *théorème de d'Alembert* :

Théorème 4.7.3. *Tout polynôme non constant à coefficients complexes admet au moins une racine complexe.*

Preuve. Soit P une fonction polynomiale non constante, et supposons que P n'admette pas de racine dans $\mathbb{C}$. La fonction $\frac{1}{\mathrm{P}}$ est alors une fonction entière, et on a $\lim_{|z|\to\infty} \frac{1}{\mathrm{P}(z)} = 0$ puisque P est non constante. En particulier, $\frac{1}{\mathrm{P}}$ est bornée sur $\mathbb{C}$ tout entier. D'après le théorème de Liouville, $\frac{1}{\mathrm{P}}$ est une fonction constante, nécessairement nulle, ce qui est absurde.

Corollaire 4.7.4. *Toute matrice* $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ *possède au moins une valeur propre.*

Le théorème de Liouville admet une version « vectorielle », qui joue un rôle important dans la théorie des algèbres de Banach. Avant de l'énoncer, remarquons d'abord que la notion d'holomorphie a un sens pour une fonction à valeurs dans un espace de Banach complexe X. La définition est identique : une fonction est dite holomorphe si elle est de classe $\mathcal{C}^1$ et $\mathbb{C}$-dérivable en tout point. On appellera **fonction entière à valeurs dans** X toute fonction holomorphe $f : \mathbb{C} \to \mathrm{X}$.

Théorème 4.7.5. (Théorème de Liouville vectoriel.)
Si X *est un espace de Banach complexe, alors toute fonction entière bornée à valeurs dans* X *est constante.*

Preuve. Soit $f : \mathbb{C} \to \mathrm{X}$ holomorphe bornée. Si x^* est une forme linéaire continue sur X, alors $x^* \circ f$ est une fonction entière bornée. D'après le théorème de Liouville scalaire, on a $\langle x^*, f(z)\rangle \equiv \langle x^*, f(0)\rangle$ pour toute forme linéaire continue $x^* \in \mathrm{X}^*$. Comme X^* sépare les points de X d'après le théorème de Hahn-Banach, on en déduit que $f(z)$ est identiquement égal à $f(0)$.

On va maintenant donner deux applications typiques du théorème de Liouville vectoriel.

La première est une généralisation infini-dimensionnelle du fait que toute matrice carrée à coefficients complexes admet au moins une valeur propre (corollaire 4.7.4). Introduisons d'abord une définition : si A est une $\mathbb{C}$-algèbre avec unité $\mathbf{1}$, le **spectre** d'un élément $a \in \mathrm{A}$, noté $\sigma(a)$, est l'ensemble des nombres complexes λ tels que $a - \lambda\mathbf{1}$ n'est pas inversible dans A.

Théorème 4.7.6. *Si* A *est une algèbre de Banach complexe avec unité, alors le spectre de tout élément de* A *est non vide.*

Pour la preuve, on a besoin du lemme suivant.

Lemme 4.7.7. *Notons* G(A) *l'ensemble des éléments inversibles de* A.

a) *Si* $x \in \mathrm{G(A)}$ *et si* $h \in \mathrm{A}$ *vérifie* $\|h\| < 1/\|x^{-1}\|$, *alors* $x+h \in \mathrm{G(A)}$ *et*

$$\|(x+h)^{-1}\| \leqslant \frac{\|x^{-1}\|}{1-\|x^{-1}\|\,\|h\|} \cdot$$

b) *L'application* $x \mapsto x^{-1}$ *est continue sur* G(A).

Preuve. **a)** Si $u \in \mathrm{A}$ vérifie $\|u\| < 1$, alors la série $\sum u^n$ est absolument convergente, donc convergente dans A, et en posant $v = \sum_0^\infty u^n$, on vérifie immédiatement qu'on a $(\mathbf{1}-u)v = \mathbf{1} = v(\mathbf{1}-u)$. Par conséquent, $\mathbf{1}-u$ est inversible et $(\mathbf{1}-u)^{-1} = \sum_0^\infty u^n$. On a alors

$$\|(\mathbf{1}-u)^{-1}\| \leqslant \sum_0^\infty \|u^n\| \leqslant \sum_0^\infty \|u\|^n = \frac{1}{1-\|u\|} \ ,$$

ce qui prouve **a)** dans le cas où $x = \mathbf{1}$. Dans le cas général, on écrit $x+h = x\,(\mathbf{1}+x^{-1}h)$ et on applique ce qui précède à $u = -x^{-1}h$.

b) Fixons $x_0 \in \mathrm{G(A)}$. Si $x_0+h \in \mathrm{G(A)}$, alors, en factorisant à gauche par $(x_0+h)^{-1}$ et à droite par x_0^{-1}, on obtient

$$(x_0+h)^{-1} - x_0^{-1} = -(x_0+h)^{-1}\,h\,x_0^{-1} \ .$$

Si de plus $\|h\| \leqslant 1/2\|x_0^{-1}\|$, alors **a)** donne $\|(x_0+h)^{-1} - x_0^{-1}\| \leqslant 2\|x_0^{-1}\|^2\|h\|$. Par conséquent, $(x_0+h)^{-1}$ tend vers x_0^{-1} quand h tend vers 0, ce qui démontre **b)**.

Preuve du théorème 4.7.6.

Fixons $a \in \mathrm{A}$, et supposons que $\sigma(a)$ soit vide. Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, on peut alors poser

$$f(\lambda) = (a-\lambda\mathbf{1})^{-1} \ .$$

Si $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, alors, en factorisant à gauche par $(a-\mu\mathbf{1})^{-1}$ et à droite par $(a-\lambda\mathbf{1})^{-1}$, on obtient

$$f(\mu) - f(\lambda) = (\mu-\lambda)\,(a-\mu\mathbf{1})^{-1}\,(a-\lambda\mathbf{1})^{-1} \ .$$

Comme l'application $x \mapsto x^{-1}$ est continue sur G(A), on en déduit

$$\lim_{\mu\to\lambda} \frac{f(\mu)-f(\lambda)}{\mu-\lambda} = (a-\lambda\mathbf{1})^{-2} \, ,$$

ce qui prouve que f est une fonction entière à valeurs dans A, avec $f'(\lambda) \equiv (a-\lambda\mathbf{1})^{-2}$.

Si $|\lambda| > \|a\|$, alors, d'après le lemme précédent appliqué à $x = \lambda\mathbf{1}$ et $h = -a$, on a

$$\|f(\lambda)\| \leqslant \frac{1/|\lambda|}{1 - \|a\|/|\lambda|} = \frac{1}{|\lambda| - \|a\|} .$$

Par conséquent, $f(\lambda)$ tend vers 0 quand $|\lambda|$ tend vers l'infini. D'après le théorème de Liouville, la fonction f est donc identiquement nulle, ce qui est absurde puisque $f(\lambda)$ est toujours inversible.

Comme deuxième application du théorème de Liouville vectoriel, voici un critère de commutativité pour une algèbre de Banach.

Proposition 4.7.8. *Soit* A *une algèbre de Banach complexe avec unité. On suppose qu'il existe une constante* C *telle que* $\forall a, b \in \mathrm{A}\ \|ba\| \leqslant \mathrm{C}\|ab\|$. *Alors* A *est commutative.*

La démonstration utilise le lemme suivant.

Lemme 4.7.9. *Pour tout* $a \in \mathrm{A}$ *fixé, l'application* $u : \lambda \mapsto e^{\lambda a}$ *est une fonction entière à valeurs dans* A, *avec* $u'(\lambda) \equiv ae^{\lambda a} \equiv e^{\lambda a}a$.

Preuve. Fixons $a \in \mathrm{A}$. Pour $\lambda, h \in \mathbb{C}$, on a

$$e^{(\lambda+h)a} - e^{\lambda a} = (e^{ha} - \mathbf{1})e^{\lambda a} = e^{\lambda a}(e^{ha} - \mathbf{1}) .$$

D'autre part, pour $h \neq 0$, la définition de l'exponentielle donne

$$\frac{e^{ha} - \mathbf{1}}{h} = \frac{1}{h}\sum_{n\geqslant 1} \frac{(ha)^n}{n!} = a\sum_{n\geqslant 0} \frac{(ha)^n}{(n+1)!} .$$

Comme la série $\sum \frac{(ha)^n}{(n+1)!}$ converge normalement sur tout compact de $\mathbb{C}$, sa somme g est une fonction continue ; et comme $g(0) = \mathbf{1}$, on en déduit

$$\lim_{h\to 0} \frac{e^{ha} - \mathbf{1}}{h} = a ,$$

d'où

$$\lim_{h\to 0} \frac{e^{(\lambda+h)a} - e^{\lambda a}}{h} = ae^{\lambda a} .$$

Par conséquent, la fonction u est $\mathbb{C}$-dérivable en tout point, avec $u'(\lambda) \equiv ae^{\lambda h} \equiv e^{\lambda h}a$. La fonction u' est continue, donc u est bien holomorphe sur $\mathbb{C}$.

Preuve de la proposition 4.7.8. Fixons $x, y \in \mathrm{A}$. D'après le lemme précédent, la fonction $f : \mathbb{C} \to \mathrm{A}$ définie par $f(\lambda) = e^{\lambda x}ye^{-\lambda x}$ est holomorphe, car c'est un produit de fonctions holomorphes. De plus, la fonction f est bornée car $\|e^{\lambda x}ye^{-\lambda x}\| \leqslant \mathrm{C}\|ye^{-\lambda x}e^{\lambda x}\| = \mathrm{C}\|y\|$. D'après

le théorème de Liouville, la fonction f est donc constante, et comme $f(0) = y$, on en déduit qu'on a

$$e^{\lambda x} y = y e^{\lambda x}$$

pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$. En dérivant cette relation par rapport à λ, on obtient $x e^{\lambda x} y \equiv y e^{\lambda x} x$, d'où $xy = yx$ en prenant $\lambda = 0$.

4.8. Principe du maximum

Si f est une fonction continue sur un disque fermé $\overline{\mathrm{D}}(z_0, \mathrm{R})$ et holomorphe dans le disque ouvert $\mathrm{D} = \mathrm{D}(z_0, \mathrm{R})$, alors la formule de la moyenne permet d'écrire $f(z_0) = \int_0^{2\pi} f(z_0 + \mathrm{R}e^{i\theta}) \frac{d\theta}{2\pi}$, et on en déduit

$$|f(z_0)| \leqslant \sup_{\zeta \in \partial \mathrm{D}} |f(\zeta)| \ .$$

Dans cette section, on va montrer que la même inégalité a lieu pour tout point $z \in \mathrm{D}$, et que ce *principe du maximum* est valable non seulement pour un disque, mais en fait pour un ouvert borné arbitraire.

Définition 4.8.1. *On dit qu'une fonction continue $u : \Omega \to \mathbb{C}$ vérifie la* **propriété de la moyenne** *dans Ω si pour tout disque fermé $\overline{\mathrm{D}}(z_0, r) \subset \Omega$, on a*

$$u(z_0) = \int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{i\theta}) \frac{d\theta}{2\pi} \cdot$$

On dit qu'une fonction continue $u : \Omega \to \mathbb{R}$ vérifie la **propriété de sous-moyenne** *si*

$$u(z_0) \leqslant \int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{i\theta}) \frac{d\theta}{2\pi}$$

pour tout disque $\overline{\mathrm{D}}(z_0, r) \subset \Omega$.

Exemples. 1) Si f est holomorphe dans Ω, alors f vérifie la propriété de la moyenne.

2) Si u vérifie la propriété de la moyenne, alors $\mathrm{Re}(u)$ et $\mathrm{Im}(u)$ également, et $|u|$ vérifie la propriété de sous-moyenne.

Proposition 4.8.2. *Supposons Ω connexe.*

Soit $u : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction continue vérifiant la propriété de sous-moyenne. Si u admet un maximum global sur Ω, alors u est constante.

Preuve. Supposons que u admette un maximum global, et posons $\mathrm{M} = \sup_\Omega u$. Comme u est continue, l'ensemble $\mathrm{A} = \{z \in \Omega;\ u(z) = \mathrm{M}\}$ est un fermé de Ω, et il est par hypothèse non vide. Par connexité, il suffit donc de montrer que A est également un ouvert de Ω.

Soit $z_0 \in A$, et soit $r_0 > 0$ tel que $D = D(z_0, r_0) \subset \Omega$. Comme u vérifie la propriété de sous-moyenne, on a $M = u(z_0) \leqslant \int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{i\theta}) \frac{d\theta}{2\pi}$ pour tout $r < r_0$, ou encore

$$\int_0^{2\pi} \big(M - u(z_0 + re^{i\theta})\big)\, d\theta \leqslant 0\,.$$

Par définition de M, la fonction intégrée est continue et toujours positive : elle est donc en fait identiquement nulle. Ainsi, on a $u(z_0 + re^{i\theta}) \equiv M$ pour tout $r < r_0$, autrement dit $u \equiv M$ dans D. Cela prouve que z_0 est intérieur à A, et la démonstration est terminée.

Corollaire 4.8.3. *(Ω connexe.) Si $f : \Omega \to \mathbb{C}$ est holomorphe et si $|f|$ admet un maximum local en un point $z_0 \in \Omega$, alors f est constante.*

Preuve. D'après la proposition précédente, la fonction $|f|$ est constante au voisinage de z_0. On a donc $\Delta(|f|^2) \equiv 0$ au voisinage de z_0, et comme $\Delta(|f|^2) = 4\frac{\partial^2(f\overline{f})}{\partial z \partial \bar{z}} = 4|f'|^2$, on en déduit que f elle-même est constante au voisinage de z_0. D'après le principe du prolongement analytique, f est donc constante sur Ω.

Corollaire 4.8.4. *(Ω connexe.) Si f est une fonction holomorphe non constante telle que $|f|$ admet un minimum local dans Ω, alors ce minimum est nécessairement nul. En particulier, f s'annule au moins une fois dans Ω.*

Preuve. Soit $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ telle que $|f|$ admette un minimum local en un point z_0, et supposons $f(z_0) \neq 0$. Alors f ne s'annule pas au voisinage de z_0. On peut donc appliquer le corollaire précédent à $1/f$ pour conclure que f est constante au voisinage de z_0. Comme Ω est connexe, la fonction f est donc constante.

Ce dernier résultat permet de retrouver le théorème de d'Alembert. En effet, si $P \in \mathbb{C}[X]$ est un polynôme non constant, alors $|P(z)|$ tend vers $+\infty$ avec $|z|$. Par un argument de compacité, on en déduit que $|P|$ admet un minimum global sur $\mathbb{C}$. Ce minimum est nul, donc P possède au moins une racine.

Corollaire 4.8.5. (Théorème de l'image ouverte.)
On suppose Ω connexe. Si $f : \Omega \to \mathbb{C}$ est une fonction holomorphe non constante, alors f est une application ouverte : pour tout ouvert $V \subset \Omega$, $f(V)$ est un ouvert de $\mathbb{C}$.

Preuve. Supposons Ω connexe et soit $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ non constante. Soit également V un ouvert de Ω, et soit $a \in V$. Il s'agit de montrer que $f(V)$ est un voisinage de $b = f(a)$.

Comme f n'est pas constante, on peut trouver, d'après le principe des zéros isolés, un disque ouvert D centré en a tel que $\overline{\mathrm{D}} \subset \mathrm{V}$ et $f(z)-b$ ne s'annule pas sur $\overline{\mathrm{D}}\backslash\{a\}$. Soit $\varepsilon > 0$ tel que $|f(\zeta) - b| \geqslant \varepsilon$ sur $\partial\mathrm{D}$ (un tel ε existe par compacité de $\partial\mathrm{D}$). On va montrer que le disque ouvert $\mathrm{D}(b, \varepsilon/2)$ est contenu dans $f(\overline{\mathrm{D}})$, ce qui achèvera la démonstration puisque $f(\overline{\mathrm{D}}) \subset f(\mathrm{V})$.

Fixons $w \in \mathrm{D}(b, \varepsilon/2)$, et considérons la fonction $f_w : \overline{\mathrm{D}} \to \mathbb{C}$ définie par $f_w(z) = f(z) - w$. La fonction f_w est continue, donc $|f_w|$ atteint sa borne inférieure sur $\overline{\mathrm{D}}$. D'autre part, on a $|f_w(\zeta)| \geqslant |f(\zeta)-b| - |b-w| > \varepsilon/2$ sur $\partial\mathrm{D}$, et $|f_w(a)| = |b - w| < \varepsilon/2$. On en déduit que la borne inférieure de $|f_w|$ ne peut pas être atteinte en un point de $\partial\mathrm{D}$. La fonction $|f_w|$ admet donc un minimum local dans D, et comme f n'est pas constante dans D (sinon elle le serait dans Ω), le corollaire précédent montre que $f_w(z) = f(z) - w$ s'annule au moins une fois dans D.

Théorème 4.8.6. (Principe du maximum.)

Supposons Ω borné. Soit $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $\overline{\Omega}$ et vérifiant la propriété de sous-moyenne dans Ω.

a) *Pour tout $z \in \Omega$, on a $u(z) \leqslant \sup\{u(\zeta);\ \zeta \in \partial\Omega\}$.*

b) *Si de plus Ω est connexe et si u n'est pas constante, alors $u(z) < \sup\{u(\zeta);\ \zeta \in \partial\Omega\}$ pour tout $z \in \Omega$.*

Preuve. En considérant chaque composante connexe de Ω, on se ramène au cas où Ω est connexe. On peut également supposer que u n'est pas constante sur Ω : en effet, si u est constante sur Ω, elle est également constante sur $\overline{\Omega}$ par continuité ; la partie **a** est alors évidente, et la partie **b** est vide dans ce cas.

Posons $\mathrm{M} = \sup_{\overline{\Omega}} u$. Comme $\overline{\Omega}$ est compact, M est atteint en au moins un point de $\overline{\Omega}$. Si M était atteint en un point de Ω, alors $u_{|\Omega}$ admettrait un maximum global sur Ω, ce qui contredirait la proposition 4.8.2. Ainsi, M ne peut être atteint qu'en un point de $\partial\Omega$, ce qui prouve **a** et **b** en même temps.

Corollaire 4.8.7. *(Ω borné.) Si $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{C}$ est continue sur $\overline{\Omega}$ et holomorphe dans Ω, alors $|f(z)| \leqslant \sup\{|f(\zeta)|;\ \zeta \in \partial\Omega\}$, avec inégalité stricte si Ω est connexe et si f n'est pas constante.*

Preuve. On applique le principe du maximum à $|f|$, en remarquant que f est constante si et seulement si $|f|$ est constant (voir la preuve du corollaire 4.8.3).

Remarque 4.8.8. *Il ressort des démonstrations précédentes que la proposition 4.8.2 et le principe du maximum sont valables si on suppose seulement que la fonction continue u vérifie* **localement** *la propriété de*

sous-moyenne, ce qui signifie que pour tout point $z_0 \in \Omega$, on peut trouver $r_0 > 0$ tel que $u(z_0) \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{i\theta})\,\frac{d\theta}{2\pi}$ si $r < r_0$.

4.9. Lemme de Schwarz

Le résultat suivant est une des applications les plus classiques du principe du maximum.

Théorème 4.9.1. (Lemme de Schwarz.)
Soit f une fonction holomorphe dans le disque $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C};\ |z| < 1\}$ vérifiant $f(0) = 0$ et $|f(z)| \leqslant 1$ dans $\mathbb{D}$.
a) *On a $|f(z)| \leqslant |z|$ pour tout point $z \in \mathbb{D}$, et $|f'(0)| \leqslant 1$.*
b) *Si $|f(a)| = |a|$ pour un certain $a \neq 0$, ou si $|f'(0)| = 1$, alors $f(z) \equiv \lambda z$ pour une certaine constante λ de module 1.*

Preuve. Puisque $f(0) = 0$, on peut écrire $f(z) = zg(z)$, où g est holomorphe dans $\mathbb{D}$.

Comme $|f(z)| \leqslant 1$ dans $\mathbb{D}$, on a $|g(z)| \leqslant \frac{1}{r}$ sur tout cercle $\{|z| = r\}$, $r < 1$; et grâce au principe du maximum, cette inégalité est encore vraie dans le disque $\{|z| \leqslant r\}$. Ainsi, on a $|g(z)| \leqslant \frac{1}{r}$ dès que $|z| \leqslant r < 1$. En fixant z et en faisant tendre r vers 1, on obtient $|g(z)| \leqslant 1$ dans $\mathbb{D}$. On en déduit $|f(z)| \leqslant |z|$, et $|f'(0)| = |g(0)| \leqslant 1$.

Si maintenant $|f(a)| = |a|$ pour un certain point $a \neq 0$, alors $|g(a)| = 1$. Comme $|g(z)| \leqslant 1$ dans $\mathbb{D}$, le principe du maximum entraîne que g est constante, $g \equiv \lambda$, autrement dit $f(z) \equiv \lambda z$; et en prenant $z = a$, on obtient $|\lambda| = 1$. De même, si $|f'(0)| = 1$, alors $|g(0)| = 1$, et on conclut comme précédemment.

Le lemme de Schwarz est un résultat extrêmement utile. On en aura besoin en particulier au chapitre 10 quand on déterminera les automorphismes du disque unité, et on s'en servira également dans la preuve du théorème de la représentation conforme. Voici un autre exemple d'utilisation.

Proposition 4.9.2. (Inégalité de Borel-Carathéodory.)
Si f est une fonction entière vérifiant $f(0) = 0$, alors, pour tout $\mathrm{R} > 0$, on a

$$\sup\{|f(z)|\,;\ |z| \leqslant \mathrm{R}\} \leqslant 2\sup\{\mathrm{Re}(f(z));\ |z| \leqslant 2\mathrm{R}\}\ .$$

Preuve. Fixons f et R. Soit également $\mathrm{M} > \sup\{\mathrm{Re}(f(z));|z| \leqslant 2\mathrm{R}\}$; comme $f(0) = 0$, on a $\mathrm{M} > 0$.

Si $w \in \mathbb{C}$ vérifie $\mathrm{Re}(w) < \mathrm{M}$, alors w est à gauche de la médiatrice de $[0\,;\,2\mathrm{M}]$, donc plus proche de 0 que de $2\mathrm{M}$; autrement dit $|w| < |2\mathrm{M} - w|$.

En particulier, on a $|f(2Ru)| < |2M - f(2Ru)|$ pour tout $u \in \mathbb{D}$. D'après le lemme de Schwarz appliqué à la fonction $u \mapsto \frac{f(2Ru)}{2M - f(2Ru)}$, on en déduit

$$|f(2Ru)| \leqslant |u|\,|2M - f(2Ru)|$$

pour tout $u \in \mathbb{D}$, donc $|f(z)| \leqslant |\frac{z}{2R}|\,|2M - f(z)|$ pour tout $z \in D(0, 2R)$.

Si maintenant $z \in \overline{D}(0, R)$, alors $|z/2R| \leqslant 1/2$, donc

$$|f(z)| \leqslant \frac{1}{2}|2M - f(z)| \leqslant M + \frac{1}{2}|f(z)|\,.$$

Ainsi, on a $|f(z)| \leqslant 2M$ pour tout $z \in D(0, R)$. Comme le nombre $M > \sup\{\mathrm{Re}(f(z)); |z| \leqslant 2R\}$ est arbitraire, cela termine la démonstration.

Corollaire 4.9.3. *Si f est une fonction entière et si la fonction $\mathrm{Re}(f)$ est bornée supérieurement ou inférieurement, alors f est constante.*

Preuve. Cela découle du théorème de Liouville et de la proposition précédente appliquée à f ou $-f$.

Remarque 4.9.4. *En fait, ce dernier résultat peut se démontrer directement en appliquant le théorème de Liouville à e^f ou e^{-f}*

4.10. Produits infinis

Si (a_n) est une suite de nombres complexes, on dit que **le produit $\prod a_n$ est convergent** si la suite des « produits partiels » $(\prod_0^n a_j)$ est convergente. On note alors $\prod_0^\infty a_n$ la limite de cette suite. On définit de même la convergence (simple) d'un produit de fonctions, et on dit que le produit est **uniformément convergent** si la suite des produits partiels est uniformément convergente.

Ces définitions ne sont pas tout à fait conformes à l'usage : la définition usuelle suppose que les a_n sont tous non nuls, et on exige de plus que la limite des produits partiels soit non nulle ; cela correspond à la convergence de la « série » $\prod a_n$ dans le groupe topologique $(\mathbb{C}^*, \times)$.

Proposition 4.10.1. *Soit (f_n) une suite de fonctions complexes définies sur un ensemble X. On suppose que la série $\sum(1 - f_n)$ est normalement convergente sur X.*

a) *Le produit $\prod f_n$ est uniformément convergent.*

b) *Si les f_n ne s'annulent pas, alors $\prod_0^\infty f_n$ ne s'annule pas.*

c) *Si $\|f_n - 1\|_\infty < 1$ pour tout n, alors la série $\sum \mathrm{Log}\, f_n$ est normalement convergente et on a*

$$\prod_0^\infty f_n = e^S\,,$$

où $S = \sum_0^\infty \operatorname{Log} f_n$.

La démonstration est basée sur le lemme suivant.

Lemme 4.10.2. *Pour tout* $h \in \mathbb{C}$ *vérifiant* $|h| < 1$, *on a*

$$|\operatorname{Log}(1+h)| \leqslant \frac{|h|}{1-|h|} .$$

Preuve. Il suffit d'écrire $\operatorname{Log}(1+h) = \int_0^1 \frac{h}{1+th}\, dt$ et de majorer $\left|\frac{h}{1+th}\right|$.

Preuve de la proposition. Par hypothèse, $f_n(x)$ tend vers 1 uniformément sur X, donc on peut trouver un entier N et une constante $c < 1$ tels que $\|f_n - 1\|_\infty \leqslant c$ pour tout $n \geqslant N$. Pour $n \geqslant N$, la fonction $\operatorname{Log} f_n$ est alors bien définie, et on a $|\operatorname{Log} f_n| \leqslant \frac{c}{1-c}|f_n - 1|$ d'après le lemme précédent. Par conséquent, la série $\sum_{n\geqslant N} \operatorname{Log}(f_n)$ est normalement convergente.

En posant $F_n = \prod_0^n f_j$, on a $F_n = F_N \exp(\sum_{N<j\leqslant n} \operatorname{Log} f_j)$ pour tout $n > N$. Comme la fonction exponentielle est uniformément continue sur les parties bornées de $\mathbb{C}$ et comme F_N est bornée sur X (car les f_j le sont), on en déduit que la suite (F_n) est uniformément convergente et qu'on a $\prod_0^\infty f_n = F_N \exp(\sum_{j>N} \operatorname{Log} f_j)$. Cela prouve **a** et **b**.

Si de plus $\|f_n - 1\|_\infty < 1$ pour tout n, alors on peut prendre $N = 0$, et on obtient **c**.

Définition 4.10.3. *Sous l'hypothèse de la proposition précédente, on dit que le produit* $\prod f_n$ *est* **normalement convergent sur** X.

Théorème 4.10.4. *Soit* (f_n) *une suite de fonctions holomorphes dans* Ω, *et supposons que le produit* $\prod f_n$ *soit normalement convergent sur tout compact de* Ω.

a) *La fonction* $f = \prod_0^\infty f_n$ *est holomorphe sur* Ω.

b) *On a* $Z(f) = \bigcup_n Z(f_n)$, *et la multiplicité d'un zéro* $a \in Z(f)$ *est la somme des multiplicités de a comme zéro des* f_n.

c) *Si les* f_n *ne s'annulent pas sur* Ω, *alors* f *ne s'annule pas et sa dérivée logarithmique* $\frac{f'}{f}$ *est donnée par la formule*

$$\frac{f'}{f} = \sum_{n\geqslant 0} \frac{f_n'}{f_n} ,$$

où la série converge uniformément sur les compacts de Ω.

Preuve. L'ouvert Ω étant réunion d'ouverts relativement compacts dans Ω, on peut se ramener au cas où la série $\sum(1-f_n)$ est normalement convergente sur Ω.

D'après la proposition 4.10.1, f est bien définie et holomorphe sur Ω.

Comme la suite (f_n) converge uniformément vers 1, on peut trouver un entier n_0 tel que f_n ne s'annule pas sur Ω pour $n > n_0$. D'après 4.10.1, la fonction $g = \prod_{n>n_0} f_n$ ne s'annule pas, et comme $f = g\prod_0^{n_0} f_j$, on en déduit **b.**

Par hypothèse sur (f_n), on peut trouver un entier N tel que $\|f_n - 1\|_\infty < 1$ pour $n >$ N. D'après la proposition 4.10.1, la série $\sum_{n>N} \mathrm{Log}\, f_n$ est normalement convergente, et on peut écrire

$$f = \mathrm{F_N} e^{\mathrm{S}},$$

où $\mathrm{F_N} = \prod_{j=0}^{N} f_j$ et $\mathrm{S} = \sum_{N+1}^{\infty} \mathrm{Log}\, f_n$. D'après le théorème de convergence de Weierstrass, la fonction S est holomorphe sur Ω et $\mathrm{S}' = \sum_{n>N} (\mathrm{Log}\, f_n)' = \sum_{n>N} f_n'/f_n$, où la série converge uniformément sur les compacts de Ω. Si les f_n ne s'annulent pas pour $n \leqslant$ N, on obtient donc

$$\frac{f'}{f} = \frac{\mathrm{F_N'}}{\mathrm{F_N}} + \mathrm{S}' = \sum_{n\leqslant N} \frac{f_n'}{f_n} + \mathrm{S}' = \sum_{n\geqslant 0} \frac{f_n'}{f_n},$$

ce qui prouve **c.**

Comme application de 4.10.4, on peut obtenir très facilement un cas particulier du **théorème de Weierstrass**, dont on établira la version générale au chapitre 9.

Corollaire 4.10.5. *Si (a_n) est une suite de nombres complexes non nuls telle que la série $\sum \frac{1}{a_n}$ est absolument convergente, alors il existe une fonction entière dont les zéros sont exactement les termes de la suite (a_n).*

Preuve. Il suffit de poser $f(z) = \prod_0^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right)$.

4.10.1. Exemples

a. Développement de $\sin \pi z$ en produit infini

On va montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a

$$\sin \pi z = \pi z \prod_1^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right).$$

La démonstration repose sur le lemme suivant.

Lemme 4.10.6. *Pour tout $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}$, on a*

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(z-n)^2} = \left(\frac{\pi}{\sin \pi z}\right)^2 \quad \text{et} \quad \pi \operatorname{cotan} \pi z = \frac{1}{z} + 2z \sum_1^{\infty} \frac{1}{z^2 - n^2}.$$

Preuve. La série $\sum \frac{1}{(z-n)^2}$ converge normalement sur tout compact de $\mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}$, donc la fonction f définie par $f(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(z-n)^2}$ est holomorphe sur $\mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}$. De plus, f est visiblement 1-périodique.

Comme la série $\sum_{n\neq 0} \frac{1}{(z-n)^2}$ converge normalement sur tout compact de $\mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}^*$, la fonction $z \mapsto f(z) - 1/z^2$ se prolonge par continuité en 0, et a donc une singularité éliminable en 0. De plus, la fonction $z \mapsto (\pi/\sin\pi z)^2 - 1/z^2$ a elle-aussi une singularité éliminable en 0, car

$$\sin(\pi z) = \pi z + \mathrm{O}(|z|^3)$$

au voisinage de 0, et donc

$$\frac{\pi^2}{\sin^2 \pi z} = \frac{1}{z^2}\,\frac{1}{1+\mathrm{O}(|z|^2)} = \frac{1}{z^2} + \mathrm{O}(1)\ .$$

Par conséquent, la fonction $z \mapsto f(z) - (\pi/\sin(\pi z))^2$ a également une singularité éliminable en 0, et il en va de même en tout point $n \in \mathbb{Z}$ par périodicité. Ainsi, il existe une fonction F holomorphe dans $\mathbb{C}$ tout entier vérifiant

$$\mathrm{F}(z) = f(z) - \Big(\frac{\pi}{\sin \pi z}\Big)^2$$

pour $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}$.

La fonction F étant continue, elle est bornée sur le compact $\{0 \leqslant \mathrm{Re}(z) \leqslant 1, |\mathrm{Im}(z)| \leqslant 1\}$. De plus, si $z = x+iy$ $(x\,, y \in \mathbb{R})$ avec $|y|>1$ et $0 \leqslant x \leqslant 1$, alors $|\sin \pi z| \geqslant |\mathrm{sh}\, \pi y| > \mathrm{sh}\, \pi$ car $|\sin \pi z|^2 = \sin^2 \pi x + \mathrm{sh}^2 \pi y$; et $|f(z)| \leqslant \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{1+(x-n)^2} \leqslant \sum_{n\leqslant 0} \frac{1}{1+n^2} + \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{1+(n-1)^2}$. On en déduit que F est bornée sur l'ensemble $\{0 \leqslant \mathrm{Re}(z) \leqslant 1\,,\ |\mathrm{Im}(z)| > 1\}$, donc au total sur la bande $\{0 \leqslant \mathrm{Re}(z) \leqslant 1\}$. Enfin, par continuité, la fonction F est 1-périodique car sa restriction à $\mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}$ est 1-périodique, donc F est en fait bornée sur $\mathbb{C}$ tout entier. D'après le théorème de Liouville, la fonction F est donc constante.

Pour $y > 0$, on a $|f(iy)| \leqslant \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{y^2+n^2}$ et $|\sin(\pi iy)| = \mathrm{sh}\, \pi y$. On en déduit $\lim_{y\to+\infty} f(iy) = 0$ et $\lim_{y\to+\infty} |\sin(\pi iy)| = +\infty$, ce qui prouve que $\mathrm{F}(iy)$ tend vers 0 quand y tend vers $+\infty$. Comme F est constante, on a donc $\mathrm{F} \equiv 0$, ce qui termine la démonstration de la première formule.

Pour établir la deuxième formule, posons

$$g(z) = \frac{1}{z} + 2z \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{z^2-n^2} - \pi \cot\!\mathrm{an}\, \pi z\ .$$

La fonction g est holomorphe dans $\mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}$ car la série converge normalement sur les compacts de $\mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}$.

En écrivant $\frac{2z}{z^2-n^2} = \frac{1}{z-n} + \frac{1}{z+n}$, en dérivant terme à terme et en utilisant la première formule, on obtient $g' = 0$. Comme g est de plus impaire, on en déduit $g = 0$.

Démontrons maintenant la formule annoncée plus haut.

Le produit $\prod \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)$ est normalement convergent sur les compacts de $\mathbb{C}$. D'après 4.10.4, la fonction définie par

$$f(z) = \pi z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)$$

est donc holomorphe sur $\mathbb{C}$. De plus, les zéros de f sont les entiers, et pour $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}$, on a

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{1}{z} - 2z \sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^2 - z^2} \cdot$$

Par conséquent, la fonction u définie par

$$u(z) = \frac{f(z)}{\sin \pi z}$$

est holomorphe sur $\mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}$, et on a

$$\frac{u'(z)}{u(z)} = \frac{1}{z} - 2z \sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^2 - z^2} - \pi \operatorname{cotan} \pi z \ .$$

D'après le lemme 4.10.6, u' est donc identiquement nulle ; autrement dit, la fonction u est constante sur $\mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}$. Comme de plus $\lim_{z \to 0} u(z) = 1$, on a en fait $u \equiv 1$. Ainsi, on a $f(z) \equiv \sin \pi z$ sur $\mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}$, donc sur $\mathbb{C}$ par continuité.

b. Développement de $1/\zeta$

Théorème 4.10.7. *Soit (p_n) la suite des nombres premiers rangés par ordre croissant. Si $\mathrm{Re}(s) > 1$, alors $\zeta(s) \neq 0$ et*

$$\frac{1}{\zeta(s)} = \prod_{n \geqslant 0} \left(1 - \frac{1}{p_n^s}\right) \cdot$$

Preuve. Comme $p_n \geqslant n$ pour tout n, le produit du second membre est normalement convergent sur les compacts de $\{\mathrm{Re}(s) > 1\}$. Fixons s, et pour $N \in \mathbb{N}$, posons $F_N(s) = \prod_{j=0}^{N}(1 - 1/p_j^s)$. Par définition de ζ, on a

$$\zeta(s) F_0(s) = \zeta(s) \left(1 - \frac{1}{2^s}\right) = \sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^s} - \sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{(2n)^s} \ ,$$

autrement dit $\zeta(s)\mathrm{F}_0(s) = \sum_{k\in \mathrm{A}_0} 1/k^s$, où A_0 est l'ensemble des entiers non divisibles par $p_0 = 2$. En procédant par récurrence, on vérifie que pour tout entier $\mathrm{N} \geqslant 0$, on a

$$\zeta(s)\mathrm{F}_\mathrm{N}(s) = \sum_{k\in \mathrm{A}_\mathrm{N}} \frac{1}{k^s} ,$$

où A_N est l'ensemble des entiers qui ne sont divisibles par aucun des nombres premiers $p_0, \dots, p_\mathrm{N}$.

Hormis $k = 1$, tous les éléments de A_N sont strictement supérieurs à p_N. On a donc

$$|\zeta(s)\mathrm{F}_\mathrm{N}(s) - 1| \leqslant \sum_{k>p_\mathrm{N}} \frac{1}{|k^s|} = \sum_{k>p_\mathrm{N}} \frac{1}{|k|^{\mathrm{Re}(s)}}$$

pour tout $\mathrm{N} \geqslant 0$, et par conséquent $\lim_{\mathrm{N}\to\infty} \zeta(s)\mathrm{F}_\mathrm{N}(s) = 1$.

Corollaire 4.10.8. *La série* $\sum \dfrac{1}{p_n}$ *est divergente.*

Preuve. Si cette série était convergente, alors le produit $\prod(1 - \frac{1}{p_n^s})$ serait normalement convergent sur $[1;+\infty[$. Comme aucun des termes ne s'annule, le produit définirait donc une fonction continue sur $[1;+\infty[$ et ne s'annulant pas en 1. On en déduirait que $1/\zeta(s)$ admet une limite non nulle en 1^+, ce qui est impossible car $\lim_{s\to 1+} \zeta(s) = +\infty$. Ce dernier point est une conséquence du théorème convergence monotone ($\lim_{s\to 1+} \zeta(s) = \sum_1^\infty \frac{1}{n} = +\infty$), ou du corollaire 4.6.9.

c. Développement de $1/\Gamma$

Théorème 4.10.9. *Pour tout* $z \in \mathbb{C}$ *vérifiant* $\mathrm{Re}(z) > 0$, *on a*

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!\, n^z}{z(z+1)\dots(z+n)} .$$

Preuve. On sait que pour tout $t \geqslant 0$, on a $e^{-t} = \lim_{n\to\infty}(1 - \frac{t}{n})^n$. De plus, si $n \geqslant 1$ et $t \in [0\,;n[$, alors $(1 - \frac{t}{n})^n = \exp\big(n \log(1 - \frac{t}{n})\big) \leqslant e^{-t}$ car $\log(1-u) \leqslant -u$ pour tout $u \leqslant 1$. D'après le théorème de convergence dominée, on peut donc écrire $\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{I}_n(z)$, où $\mathrm{I}_n(z) = \int_0^n t^{z-1}(1 - \frac{t}{n})^n dt$.

En posant $u = t/n$, on obtient $\mathrm{I}_n(z) = n^z \int_0^1 u^{z-1}(1-u)^n du = n^z \mathrm{J}_n(z)$. La formule définissant $\mathrm{J}_n(z)$ a un sens pour tout $n \geqslant 0$, et une intégration par parties donne $\mathrm{J}_n(z) = \frac{n}{z}\mathrm{J}_{n-1}(z+1)$ si $n \geqslant 1$. On a donc $\mathrm{J}_n(z) = \frac{n!}{z\dots(z+n-1)}\mathrm{J}_0(z+n) = \frac{n!}{z(z+1)\dots(z+n)}$ pour tout $n \geqslant 1$, ce qui achève la démonstration.

Corollaire 4.10.10. *Si* $\mathrm{Re}(z) > 0$, *alors* $\Gamma(z) \neq 0$ *et*

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = z e^{\gamma z} \prod_0^\infty \left(1 + \frac{z}{k}\right) e^{-z/k} ,$$

où γ *est la constante d'Euler,* $\gamma = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_1^n \frac{1}{k} - \log n\right)$.

Preuve. On a $\frac{z(z+1)\ldots(z+n)}{n! n^z} = z \prod_{k=1}^n (1+\frac{z}{k})\, e^{-z\log n}$ pour tout $n \geqslant 1$, donc

$$\frac{z(z+1)\ldots(z+n)}{n!\, n^z} = z e^{\gamma_n z} \prod_1^n \left(1 + \frac{z}{k}\right) e^{-z/k} ,$$

où γ_n tend vers γ quand n tend vers l'infini.

Corollaire 4.10.11. *La fonction* $1/\Gamma$ *se prolonge en une fonction entière dont les zéros, tous simples, sont les entiers négatifs ou nuls.*

Preuve. Posons $f_k(z) = (1 + \frac{z}{k}) e^{-z/k}$, $k \geqslant 1$. Il suffit de montrer que le produit $\prod f_k$ est normalement convergent sur les compacts de $\mathbb{C}$.

En développant e^u en série entière, on constate qu'on peut écrire $(1+u)e^{-u} = 1 + u^2 h(u)$, où h est une fonction continue sur $\mathbb{C}$. Par conséquent, $f_k(z) - 1 = \frac{z^2}{k^2} h(\frac{z}{k})$, donc $|f_k(z) - 1| \leqslant \mathrm{C_R}/k^2$ sur tout disque $\overline{\mathrm{D}} = \overline{\mathrm{D}}(0, \mathrm{R})$, où $\mathrm{C_R} = \mathrm{R}^2 \sup_{\overline{\mathrm{D}}} |h|$. Cela termine la démonstration.

Remarque 4.10.12. *On retrouve ainsi le fait que* Γ *se prolonge méromorphiquement à* $\mathbb{C}$, *avec une précision supplémentaire : le prolongement ne s'annule jamais.*

d. Formule des compléments

En utilisant les développements du sinus et de la fonction $1/\Gamma$ en produits infinis, on obtient très facilement la **formule des compléments**.

Proposition 4.10.13. *Si* $z \in \mathbb{C}$ *vérifie* $0 < \mathrm{Re}(z) < 1$, *alors*

$$\Gamma(z)\,\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z} .$$

Preuve. On a $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \lim_{n\to\infty} v_n(z)$, où

$$v_n(z) = \frac{n!\, n^z}{z(z+1)\ldots(z+n)} \times \frac{n!\, n^{1-z}}{(n+1-z)(n-z)\ldots(1-z)} .$$

En isolant z dans le premier facteur et $(n+1-z)$ dans le second, on obtient $v_n(z) = \frac{n}{z(n+1-z)} \prod_{k=1}^n \frac{1}{1-z^2/k^2}$ pour tout $n \geqslant 1$, d'où

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{1}{z} \prod_1^\infty \frac{1}{1 - z^2/k^2} = \frac{\pi}{\sin \pi z} .$$

Remarque 4.10.14. *Avec $z = 1/2$, on obtient $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$, d'où*

$$\int_0^\infty e^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2} .$$

Preuve. La première égalité est immédiate, et la deuxième s'en déduit par changement de variable dans l'intégrale définissant $\Gamma(1/2)$.

Remarque 4.10.15. *D'après le principe du prolongement analytique, la formule des compléments est valable pour $s \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}$, en notant encore Γ le prolongement méromorphe de Γ à $\mathbb{C}$.*

4.10.2. Produits de Blaschke ; zéros des fonctions de $H^\infty(\mathbb{D})$

Définition 4.10.16. *On note $H^\infty(\mathbb{D})$ l'algèbre des fonctions holomorphes bornées dans le disque unité $\mathbb{D}$.*

On a vu à la section 4.4.3.b que si $f \in H^\infty(\mathbb{D})$, alors la suite de ses zéros doit vérifier la condition de Blaschke $\sum_{n\geqslant 0}(1 - |a_n|) < +\infty$. On va maintenant démontrer qu'inversement, toute suite $(a_n) \subset \mathbb{D}$ vérifiant cette propriété est la suite des zéros d'une fonction de $H^\infty(\mathbb{D})$.

Soit donc $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de points de $\mathbb{D}$ telle que

$$\sum_{n\geqslant 0}(1 - |a_n|) < +\infty .$$

Pour $n \geqslant 0$ et $z \neq 1/\overline{a}_n$, posons

$$b_n(z) = \frac{|a_n|}{a_n} \frac{a_n - z}{1 - \overline{a}_n z} ,$$

avec la convention $\frac{|0|}{0} = 1$.

Théorème 4.10.17. *Le produit $\prod b_n$ est normalement convergent sur les compacts de $\mathbb{D}$. Si on pose $B = \prod_{n\geqslant 0} b_n$, alors B est holomorphe dans $\mathbb{D}$, et les zéros de B sont exactement les points de la suite (a_n). De plus, $B \in H^\infty(\mathbb{D})$ et $\|B\|_\infty \leqslant 1$. On dit que B est le* **produit de Blaschke** *associé à la suite (a_n).*

La démonstration utilise le lemme suivant, dont la preuve est laissée en exercice.

Lemme 4.10.18. *Si u, v sont deux nombres complexes tels que $\overline{u}v \neq 1$, alors*

$$1 - \left|\frac{u - v}{1 - \overline{u}v}\right|^2 = \frac{(1 - |u|^2)(1 - |v|^2)}{|1 - \overline{u}v|^2} .$$

En particulier, si u et v sont tous les deux dans $\mathbb{D}$, alors $\left|\frac{u - v}{1 - \overline{u}v}\right| < 1$.

Preuve du théorème 4.10.17. En réduisant au même dénominateur, on obtient

$$1-b_n(z)=\frac{1-|a_n|}{1-\overline{a}_n z}\left(1+\frac{|a_n|}{a_n}z\right),$$

et on en déduit

$$|1-b_n(z)| \leqslant 2\,\frac{1-|a_n|}{1-|z|}$$

pour tout $z \in \mathbb{D}$. Comme $1/(1-|z|)$ est borné sur tout compact de $\mathbb{D}$, la série $\sum(1-b_n)$ est donc normalement convergente sur les compacts de $\mathbb{D}$; autrement dit, le produit $\prod b_n$ est normalement convergent sur les compacts de $\mathbb{D}$. D'après le théorème 4.10.4, la fonction B est holomorphe dans $\mathbb{D}$ et ses zéros sont exactement les points de la suite (a_n). Enfin, on a $|b_n(z)| < 1$ dans $\mathbb{D}$ pour tout $n \geqslant 0$ d'après le lemme 4.10.18, et donc $|\mathrm{B}| \leqslant 1$.

Remarque 4.10.19. *Pour montrer qu'on a $|b_n(z)| < 1$ dans $\mathbb{D}$, on peut également remarquer que b_n est holomorphe au voisinage de $\overline{\mathbb{D}}$, avec $|b_n(z)| \equiv 1$ sur $\mathbb{T} = \partial\mathbb{D}$ (vérification immédiate), et appliquer le principe du maximum.*

En combinant le théorème précédent et la proposition 4.4.16, on peut finalement énoncer le

Théorème 4.10.20. *Une suite $(a_n) \subset \mathbb{D}$ est la suite des zéros d'une fonction $f \in \mathrm{H}^\infty(\mathbb{D})$ si et seulement si (a_n) vérifie la* **condition de Blaschke** $\sum_n(1-|a_n|) < +\infty$.

Exercices

4.1. Dans l'énoncé du théorème de Morera, peut-on remplacer les rectangles par des disques ?

4.2. Essayer de montrer directement que si une fonction continue $f : \Omega \to \mathbb{C}$ vérifie $\int_{\partial \mathrm{R}} f dz = 0$ pour tout rectangle $\mathrm{R} \subset \Omega$, alors $\int_{\partial \Delta} f dz = 0$ pour tout triangle $\Delta \subset \Omega$.

4.3. Soit $\alpha \in]0;\pi[$; on note S_α le secteur $\{|\operatorname{Arg}(z)| < \alpha\}$. Montrer que si f est une fonction continue sur $\mathrm{S}_\alpha \cap \overline{\mathbb{D}}$, holomorphe dans $\mathrm{S}_\alpha \cap \mathbb{D}$, et ne prend que des valeurs réelles sur $\mathrm{S}_\alpha \cap \partial\mathbb{D}$, alors f se prolonge en une fonction holomorphe sur S_α.

4.4. Soit f une fonction holomorphe dans $\mathbb{D}^+ = \mathbb{D} \cap \{\mathrm{Im}(z) > 0\}$, continue sur $\overline{\mathbb{D}^+}$, et nulle sur $]-1;1[$. Montrer que f est identiquement nulle.

4.5. Soient $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ et soient $m_1, \ldots, m_n \in \mathbb{N}^*$. Donner la forme générale des fonctions entières dont les zéros sont $a_1, \ldots, a_n$ avec multiplicités respectives $m_1, \ldots, m_n$.

4.6. Déterminer les fonctions entières vérifiant $p^{-1/2} \leqslant |f(1/p)| \leqslant \pi p^{-1/2}$ pour tout nombre premier p.

4.7. On suppose Ω connexe. Montrer que si (f_n) est une suite bornée dans $\mathcal{H}(\Omega)$ et si l'ensemble $A = \{z \in \Omega;\ \lim_{n\to\infty} f_n(z) = 0\}$ possède un point d'accumulation dans Ω, alors (f_n) converge uniformément vers 0 sur les compacts de Ω.

4.8. Soit f une fonction holomorphe bornée dans la bande $\{|\mathrm{Im}(z)| < 1\}$. On suppose qu'on a $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Montrer qu'on a $\lim_{x\to+\infty} f(x+iy) = 0$ pour tout $y \in]-1;1[$.

4.9. Soit $r > 1$ et soit f une fonction holomorphe dans la couronne $\{1/r < |z| < r\}$ vérifiant $|f(\zeta)| \equiv 1$ sur $\mathbb{T}$. Montrer qu'on a $\overline{f}(z) \equiv f(1/\bar{z})$.

4.10. Que peut-on dire d'une fonction $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continue à support compact dont la transformée de Fourier est également à support compact ? On pourra introduire la fonction Φ définie par $\Phi(z) = \int_{\mathbb{R}} e^{itz}\varphi(t)dt$.

4.11. Soient $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continues à supports compacts. On suppose qu'on a $f * g = 0$. Montrer que f ou g est nulle.

4.12. Montrer que la formule

$$\mathrm{F}(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itz} e^{-t^2}\, dt$$

définit une fonction entière. Calculer ensuite $\mathrm{F}(ix)$ pour $x \in \mathbb{R}$, et en déduire la valeur de $\mathrm{F}(z)$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.

4.13. Pour $\lambda \in \mathbb{C}$, on note e_λ la fonction $z \mapsto e^{\lambda z}$. Montrer que si Λ est une partie de $\mathbb{C}$ possédant un point d'accumulation, alors l'espace vectoriel engendré par la famille $(e_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ est dense dans $\mathcal{H}(\mathbb{C})$.

4.14.

1) Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, et soit $f : \mathrm{I} \to \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$. Montrer que si $x_0 \in \mathrm{I}$ vérifie $f(x_0) = 0$ et $f^{(n)}(x_0) \neq 0$ pour un certain entier $n \geqslant 1$, alors x_0 est un zéro isolé de f.

2) Soit $[a;b]$ un intervalle compact de $\mathbb{R}$, et soit $f : [a;b] \to \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$. On suppose que f s'annule une infinité de fois. Montrer qu'il existe un point $x_0 \in [a;b]$ tel que $f^{(n)}(x_0) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4.15. Donner un exemple de fonction $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, $f \neq 0$, telle que $f^{(n)}(0) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4.16. (Zéros des fonctions $\mathcal{C}^\infty$: théorème de Whitney.)

1) Soit (φ_k) une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^n$, à supports compacts. Montrer que si les $\lambda_k > 0$ sont choisis suffisamment petits, alors la formule $f(x) = \sum_0^\infty \lambda_k \varphi_k(x)$ définit une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$.

2) Montrer que tout ouvert de $\mathbb{R}^n$ est réunion dénombrable de boules ouvertes.

3) Soit F un fermé de $\mathbb{R}^n$. Montrer qu'il existe une fonction $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ telle que $F = f^{-1}(0)$.

4.17. (Théorème de Borel.)

1) Soit φ une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, à support contenu dans $[-1;1]$. Soient également n, i deux entiers positifs tels que $n \geqslant 2i$, et soit $\varepsilon \in]0;1]$. On pose $\psi(x) = \frac{x^n}{n!}\,\varphi(x/\varepsilon)$. Montrer qu'il existe une constante C_i, dépendant de i mais indépendante de n et ε, telle que $\|\psi^{(i)}\|_\infty \leqslant C_i\,\varepsilon^{n/2}$.

2) Soit (a_n) une suite de nombres complexes. Montrer qu'il existe une fonction $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ telle que $f^{(n)}(0) = a_n$ pour tout $n \geqslant 0$.

4.18. Calculer l'intégrale $\int_0^{2\pi} \log|1 - e^{it}|\,dt$ en utilisant l'exercice 3.23.

4.19. Montrer que la formule de Jensen peut s'écrire

$$\log|f(0)| + \int_0^r \frac{n(s)}{s}\,ds = \int_0^{2\pi} \log\left|f(re^{i\theta})\right| \frac{d\theta}{2\pi}\,,$$

où $n(s)$ est le nombre de zéros de f dans le disque $\overline{\mathrm{D}}(0,s)$.

4.20. Soit F une fonction entière de type exponentiel – voir l'exercice 3.52 – et pour $r > 0$, notons $n(r)$ le nombre de zéros de F dans le disque $\overline{\mathrm{D}}(0,r)$. Montrer qu'on a $n(r) = O(r)$ quand r tend vers $+\infty$. Plus précisément, montrer que si $F(z) = O(e^{C|z|})$, alors

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\ \frac{n(r)}{r} \leqslant Ce\,.$$

4.21. Le but de l'exercice est de montrer sans utiliser la formule de Jensen que si $f \in A(\mathbb{D})$, alors

$$\log|f(0)| \leqslant \int_0^{2\pi} \log\left|f(e^{i\theta})\right| \frac{d\theta}{2\pi}\,.$$

1) On note $\mathcal{C}_{\mathbb{R}}(\mathbb{T})$ l'espace des fonctions continues sur $\mathbb{T}$ à valeurs réelles, et $\mathbf{A}$ l'ensemble des restrictions à $\mathbb{T}$ des fonctions de $A(\mathbb{D})$. Montrer que $\mathrm{Re}(\mathbf{A}) := \{\mathrm{Re}(f);\ f \in \mathbf{A}\}$ est dense dans $\mathcal{C}_{\mathbb{R}}(\mathbb{T})$.

2) Soit $f \in A(\mathbb{D})$, et soit $\varepsilon > 0$.

a) Montrer qu'il existe une fonction $g \in A(\mathbb{D})$ dont la partie réelle u vérifie

$$u(\zeta) - \varepsilon \leqslant \log(|f(\zeta)| + \varepsilon) \leqslant u(\zeta) + \epsilon$$

pour tout $\zeta \in \mathbb{T}$.

b) Montrer qu'on a $|f(z)e^{-g(z)}| \leqslant e^\epsilon$ pour tout $z \in \mathbb{D}$, puis établir l'inégalité

$$\log|f(0)| \leqslant 2\varepsilon + \int_{\mathbb{T}} \log(|f(e^{i\theta})| + \varepsilon)\,\frac{d\theta}{2\pi}\,.$$

3) Conclure.

4.22. Déterminer les développements de Laurent des fonctions suivantes dans les domaines indiqués.

1) $\frac{1}{z^2-1}$ dans $\mathbb{D}$; dans $\{0 < |z-1| < 2\}$; dans $\{0 < |z+1| < 2\}$.

2) $\frac{1}{1-z^2} + \frac{1}{3-z}$ dans $\{1 < |z| < 3\}$; dans $\{|z| > 3\}$; dans $\mathbb{D}$.

3) $\frac{1}{1-z}\, e^{1/z}$ dans $\{|z| > 1\}$ et dans $\{0 < |z| < 1\}$.

4.23. Décrire les limites obtenues à l'exercice 3.38 lorsque la fonction f est la restriction d'une fonction holomorphe au voisinage de $\mathbb{T}$.

4.24. Le but de l'exercice est de décrire les formes linéaires continues sur $\mathcal{H}(\mathbb{D})$.

1) Soit φ une fonction holomorphe au voisinage de $\mathbb{C} \setminus \mathbb{D}$ et vérifiant $\lim_{|z|\to\infty} \varphi(z) = 0$. On peut ainsi écrire

$$\varphi(z) = \sum_0^\infty \frac{c_n}{z^{n+1}}$$

dans une certaine couronne $\{|z| > r\}$, où $r < 1$. Pour $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$, $f(z) = \sum_0^\infty a_n z^n$, on pose

$$\langle \mathrm{L}_\varphi , f \rangle = \sum_0^\infty c_n a_n \ .$$

Montrer que cette définition a un sens et que L_φ est une forme linéaire continue sur $\mathcal{H}(\mathbb{D})$.

2) Dans cette question, on montre que toute forme linéaire continue sur $\mathcal{H}(\Omega)$ est du type L_φ.

a) Soit L une forme linéaire continue sur $\mathcal{H}(\mathbb{D})$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $c_n = \mathrm{L}(z^n)$, où z^n est la fonction $z \mapsto z^n$. Montrer qu'on a

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\ |c_n|^{1/n} < 1 \ .$$

b) Conclure.

3) Soit $\mathrm{L} = \mathrm{L}_\varphi$ une forme linéaire continue sur $\mathcal{H}(\mathbb{D})$.

a) Montrer que pour tout $a \in \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$, on a

$$\varphi(a) = \left\langle \mathrm{L}, \frac{1}{z-a} \right\rangle \ .$$

b) Montrer que si $r < 1$ est choisi de sorte que φ soit holomorphe au voisinage de $\{|z| \geqslant r\}$, alors

$$\langle \mathrm{L} , f \rangle = 2i\pi \int_{\partial \mathrm{D}(0,r)} \varphi(z) f(z)\, dz$$

pour toute fonction $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$.

4.25. (Fonctions de Bessel.)

Pour $z \in \mathbb{C}$, on note F_z la fonction holomorphe définie sur $\mathbb{C}^*$ par

$$\mathrm{F}_z(w) = \exp\left[\frac{z}{2}\left(w - \frac{1}{w}\right)\right] \ .$$

1) On note $\mathrm{J}_n(z)$ le n-ième coefficient de Laurent de F_z en 0. Montrer que la fonction J_n ainsi définie est une fonction entière, et exprimer ses coefficients de Taylor en 0. La fonction J_n s'appelle la **fonction de Bessel** d'indice n.

2) Pour $n \in \mathbb{N}$, vérifier les relations suivantes :

$$J_{-n}(z)=(-1)^n J_n(z)\ ;\ \frac{d}{dz}\left(\frac{J_n(z)}{z^n}\right)=-\frac{J_{n+1}(z)}{z^n}\ ;\ \frac{d}{dz}\left(z^n J_n(z)\right)=z^n J_{n-1}(z)\,.$$

3) En utilisant le développement en série de Fourier de la fonction $\theta \mapsto e^{iz\sin\theta}$, montrer que pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a

$$J_n(z)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos\left(z\sin\theta-n\theta\right)d\theta\,.$$

4) Montrer que J_n est solution d'une équation différentielle du second ordre que l'on explicitera.

4.26. Déterminer les singularités isolées des fonctions suivantes et préciser leur nature.

1) $f(z)=\frac{z}{\sin z}$.

2) $g(z)=\frac{1}{z^2-1}\cos\left(\frac{\pi z}{z+1}\right)$.

3) $h(z)=z\left(e^{1/z}-1\right)$.

4.27. Soit f une fonction holomorphe possédant une singularité isolée en 0.

1) Montrer que si $f(z)=o(1/|z|)$ au voisinage de 0, alors la singularité est éliminable.

2) Montrer que si $f(z)=o(|z|^N)$, $N \in \mathbb{N}$, alors la singularité est éliminable et f a un zéro d'ordre au moins $N+1$ en 0.

3) Montrer que si $f(z)=o(1/|z|^{N+1})$, $N \in \mathbb{N}$, alors la singularité est éliminable ou est un pôle d'ordre au plus N.

4.28. Soit f une fonction entière non constante. Montrer que $f(\mathbb{C})$ est dense dans $\mathbb{C}$.

4.29. Déterminer toutes les fonctions entières f vérifiant $\lim_{|z|\to\infty}|f(z)|=+\infty$.

4.30. Soit f une fonction holomorphe dans un ouvert de $\mathbb{C}$.

1) Montrer que si $a \in \mathbb{C}$ est une singularité essentielle de f et si g est une fonction entière non constante, alors a et une singularité essentielle de $g \circ f$.

2) Montrer que si a est un pôle de f et si g est une fonction entière non polynomiale, alors a est une singularité essentielle de $g \circ f$.

4.31. On note $|\ |$ la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$. Soit φ une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^n$, à support compact. On suppose que φ est radiale, ce qui signifie que $\varphi(x)$ ne dépend que de $|x|$.

1) Montrer que la formule $f(z)=\int_{\mathbb{R}^n}\varphi(x)|x|^z dm(x)$ définit une fonction holomorphe dans le demi-plan $\{\mathrm{Re}(z)>-n\}$.

2) En intégrant judicieusement par parties, montrer que f se prolonge en une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$ dont les pôles sont les entiers inférieurs à $-n$.

4.32. (Décomposition en éléments simples.)

Soit f une fonction rationnelle vérifiant $\lim_{|z|\to\infty} f(z)=0$. On note S l'ensemble des pôles de f, et R_a la partie principale de f en un point $a \in S$.

En utilisant convenablement le théorème de Liouville, établir la formule de décomposition en éléments simples :

$$f(z) = \sum_{a \in S} R_a(z) \, .$$

4.33. Soient f et g deux fonctions entières vérifiant $|f(z)| \leqslant |g(z)|$ pour tout $z \in \mathbb{C}$. Montrer que f et g sont proportionnelles.

4.34. Soit f une fonction entière. Pour $\alpha \in \mathbb{R}^+$, on pose $f_\alpha(z) = f(\alpha z)$.

1) On suppose que les fonctions f_α, $\alpha \in \mathbb{R}^+$ ne sont pas linéairement indépendantes. Montrer qu'on peut trouver trois constantes C, α, β telles que $0 \leqslant \alpha < \beta$ et

$$\forall t \geqslant 0 \quad M(\beta t) \leqslant C\, M(\alpha t) \ ,$$

où on a posé $M(r) = \sup\{|f(z)|;\ |z| = r\}$.

2) Montrer que si f n'est pas polynomiale, alors les fonctions f_α sont linéairement indépendantes.

3) Démontrer « à la main » le résultat de 2) dans le cas où tous les coefficients de Taylor de f en 0 sont non nuls.

4.35. (Injectivité de la transformation de Fourier.)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction intégrable dont la transformée de Fourier est identiquement nulle. Le but de l'exercice est de montrer que f est nulle (presque partout) sans utiliser la formule d'inversion de Fourier.

1) Soit $a \in \mathbb{R}$ fixé. On note $\mathbf{U}$ le demi-plan $\{\mathrm{Im}(z) > 0\}$, et pour $z \in \overline{\mathbf{U}}$, on pose

$$F(z) = \int_{-\infty}^{a} f(t)\, e^{-iz(t-a)} dt \, .$$

a) Montrer que F est continue bornée sur $\overline{\mathbf{U}}$ et holomorphe sur $\mathbf{U}$.

b) Déterminer $\lim_{y \to +\infty} F(iy)$.

c) Observer qu'on a $F(x) = -\int_a^{+\infty} f(t)\, e^{-ix(t-a)} dt$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, et en déduire que F se prolonge en une fonction entière bornée.

2) Déduire de 1) qu'on a $\int_{-\infty}^{a} f(t)\, dt = 0$ pour tout $a \in \mathbb{R}$, et conclure.

4.36. (Une caractérisation de la fonction Γ.)

1) Montrer que la fonction Γ est bornée dans la bande $\{1 \leqslant \mathrm{Re}(z) < 2\}$.

2) Soit f une fonction holomorphe dans le demi-plan $\{\mathrm{Re}(z) > 0\}$. On suppose que f vérifie les propriétés suivantes :

(1) $f(1) = 1$;

(2) $f(z+1) = z f(z)$ pour tout z ;

(3) f est bornée dans la bande $\{1 \leqslant \mathrm{Re}(z) < 2\}$.

On pose $\varphi = f - \Gamma$.

a) Montrer que φ vérifie (2), et en déduire que φ se prolonge en une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$, dont les pôles éventuels sont entiers négatifs. Montrer enfin que φ se prolonge en une fonction entière, notée Φ.

b) Montrer que Φ vérifie (2) sur $\mathbb{C}$ tout entier, puis montrer que Φ est bornée dans la bande $\{0 \leqslant \mathrm{Re}(z) \leqslant 1\}$.

c) Déduire de *b*) que la fonction $z \mapsto \Phi(z)\Phi(1-z)$ est constante, puis montrer que Φ est identiquement nulle.

3) Conclure que la fonction Γ est la seule fonction holomorphe sur $\{\mathrm{Re}(z)>0\}$ vérifiant les propriétés (1), (2), (3).

4.37. En utilisant l'exercice précédent, montrer que pour tout entier $k \geqslant 2$, on a

$$\prod_{i=0}^{k-1} \Gamma\left(z+\frac{i}{k}\right) \equiv (2\pi)^{\frac{1}{2}(k-1)}\, k^{\frac{1}{2}-kz}\, \Gamma(kz)\ .$$

4.38. (Théorème de Gelfand-Mazur.)

Soit A une algèbre de Banach complexe avec unité $\mathbf{1}$. Montrer que si A est un corps, alors $\mathrm{A} = \mathbb{C}\mathbf{1}$.

4.39. (Formule du rayon spectral.)

Soit A une algèbre de Banach complexe avec unité $\mathbf{1}$. Pour $a \in \mathrm{A}$, on note $\sigma(a)$ le spectre de a et $\rho(a)$ le **rayon spectral** de a :

$$\rho(a) = \sup\{|\lambda|\ ;\ \lambda \in \sigma(a)\}\ .$$

1) Montrer que si $a \in \mathrm{A}$, alors $\sigma(a)$ est compact et $\rho(a) \leqslant \|a\|$.

2) Soit $a \in \mathrm{A}$. Montrer que si $\lambda \in \sigma(a)$, alors $\lambda^n \in \sigma(a^n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$; en déduire qu'on a $\rho(a) \leqslant \|a^n\|^{1/n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

3) Soit $a \in \mathrm{A}$. On note Ω_a l'ouvert $\mathbb{C}\backslash\sigma(a)$, et pour $\lambda \in \Omega_a$, on pose $f(\lambda) = (\lambda\mathbf{1} - a)^{-1}$.

a) Montrer que la fonction f est holomorphe sur Ω_a.

b) Montrer que pour $|\lambda| > \|a\|$, on peut écrire

$$f(\lambda) = \sum_0^\infty \frac{a^n}{\lambda^{n+1}}\ ,$$

où la série converge normalement sur les compacts de $\{|\lambda| > \|a\|\}$. En déduire que pour tout $r > \|a\|$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut représenter a^n par la formule intégrale (vectorielle)

$$(*) \qquad a^n = \int_{\partial \mathrm{D}(0,r)} \lambda^n f(\lambda)\, d\lambda\ .$$

c) Montrer que la formule $(*)$ est en fait valable pour tout $r > \rho(a)$.

d) En déduire que pour tout $r > \rho(a)$, on a $\overline{\lim}_{n\to\infty} \|a^n\|^{1/n} \leqslant r$.

4) Conclure que pour tout $a \in \mathrm{A}$, on a

$$\rho(a) = \lim_{n\to\infty} \|a^n\|^{1/n} = \inf_{n\geqslant 1} \|a^n\|^{1/n}\ .$$

4.40. Soit X un espace de Banach complexe, et soit $f : \Omega \to \mathrm{X}$. On suppose que la fonction f est **faiblement holomorphe** , ce qui signifie que pour toute

forme linéaire continue $x^* \in X^*$, la fonction (scalaire) $x^* \circ f$ est holomorphe. Le but de l'exercice est de montrer que f est holomorphe.

1) Soit $z_0 \in \Omega$, et soit $r > 0$ tel que $\overline{D}(z_0, 2r) \subset \Omega$. On pose

$$B = \left\{ \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0};\ z \in D(z_0, r), z \neq z_0 \right\} .$$

a) En appliquant convenablement la formule de Cauchy, montrer que pour toute forme linéaire continue $x^* \in X^*$, il existe une constante C_{x^*} telle que $|\langle x^*, x\rangle| \leqslant C_{x^*}$ pour tout $x \in B$.

b) Montrer que B est une partie bornée de X.

2) Montrer que la fonction f est continue.

3) D'après 2), l'intégrale vectorielle $\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta$ a un sens pour tout chemin γ de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux dans Ω et pour tout point $z \in \mathbb{C} \setminus \mathrm{Im}(\gamma)$. Montrer que f vérifie la « formule de Cauchy vectorielle » : pour tout compact à bord régulier $K \subset \Omega$ et pour tout point $z \in \mathring{K}$, on a

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial K} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta .$$

4) Conclure.

4.41. Soit $n \in \mathbb{N}^*$; on note $\Gamma_n \subset \mathbb{T}$ l'ensemble des racines $(n+1)$-ièmes de l'unité.

1) Pour $k \in \mathbb{N}$, calculer $\sum_{\zeta \in \Gamma_n} \zeta^k$.

2) Montrer que pour tout polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré inférieur ou égal à n, on a

$$|P(0)| \leqslant \sup\{|P(\zeta)|;\ \zeta \in \Gamma_n\} .$$

4.42. On note U le demi-plan $\{\mathrm{Re}(z) > 0\}$. Trouver une fonction $f : \overline{U} \to \mathbb{C}$ continue sur $\overline{U}$, holomorphe dans U, bornée sur ∂U, mais non bornée sur $\overline{U}$.

4.43. On suppose Ω non borné. Soit $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{C}$ continue sur $\overline{\Omega}$, holomorphe dans Ω, et vérifiant $\lim_{|z| \to \infty} f(z) = 0$. Montrer que f est bornée et qu'on a $\sup_{\overline{\Omega}} |f| = \sup_{\partial\Omega} |f|$

4.44. On suppose Ω non borné. Soit $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{C}$ continue sur $\overline{\Omega}$, holomorphe dans Ω, et bornée sur $\overline{\Omega}$.

1) On suppose que Ω ne rencontre pas le disque unité $\mathbb{D}$. En appliquant l'exercice précédent aux fonctions $z \mapsto f(z)^n / z$, montrer qu'on a $\sup_{\overline{\Omega}} |f| = \sup_{\partial\Omega} |f|$.

2) Montrer que si Ω n'est pas dense dans $\mathbb{C}$, alors $\sup_{\overline{\Omega}} |f| = \sup_{\partial\Omega} |f|$.

3) Que peut-on dire si Ω est dense dans $\mathbb{C}$?

4.45. (Principe de Phragmén-Lindelöf.)

On note U le demi-plan $\{\mathrm{Re}(z) > 0\}$. Soit $f : \overline{U} \to \mathbb{C}$ continue sur $\overline{U}$ et holomorphe dans U. On suppose que f est bornée sur ∂U, et on suppose de plus qu'il existe un nombre $\alpha \in [0\,;1[$ et une constante C tels que $|f(z)| \leqslant Ce^{|z|^\alpha}$ pour tout $z \in \Omega$.

1) Soit β vérifiant $\alpha < \beta < 1$. Pour $\varepsilon > 0$, on définit $f_\varepsilon : \overline{\mathrm{U}} \to \mathbb{C}$ par $f_\varepsilon(z) = e^{-\varepsilon(z+1)^\beta} f(z)$. Justifier la définition de f_ε, et montrer qu'on a $\lim_{|z|\to\infty} f_\varepsilon(z) = 0$.

2) En utilisant 1) et l'exercice 4.43, montrer que f est bornée sur $\overline{\Omega}$, et qu'on a $\sup_{\overline{\Omega}} |f| = \sup_{\partial\Omega} |f|$.

4.46. Soit $a \in \mathbb{D}$. Pour $z \neq 1/\overline{a}$, on pose $\varphi_a(z) = \dfrac{a - z}{1 - \overline{a}z}$.

0) Calculer $\varphi_a(0)$ et $\varphi_a(a)$.

1) Montrer qu'on a $|\varphi_a(\zeta)| \equiv 1$ sur $\partial\mathbb{D}$. Que peut-on en déduire sur $|\varphi_a(z)|$ pour $z \in \mathbb{D}$?

2) Montrer que la restriction de φ_a à $\mathbb{D}$ est une bijection holomorphe de $\mathbb{D}$ sur $\mathbb{D}$, et déterminer sa réciproque.

4.47. (Inégalité de Bernstein.)

Pour tout polynôme $\mathrm{R} \in \mathbb{C}[\mathrm{X}]$, on pose $\|\mathrm{R}\|_\infty = \sup\{|\mathrm{R}(z)|;\ |z| = 1\}$.

1) Soit $\mathrm{P} \in \mathbb{C}[\mathrm{X}]$ vérifiant $\|\mathrm{P}\|_\infty = 1$; on note n le degré de P.

a) En considérant le polynôme $\mathrm{P}^* = \mathrm{X}^n \mathrm{P}(1/\mathrm{X})$ et en appliquant le principe du maximum, montrer que si $|z| \geqslant 1$, alors $|\mathrm{P}(z)| \leqslant |z|^n$.

b) En déduire que si $|\lambda| > 1$, alors $\mathrm{Q} = \mathrm{P} - \lambda \mathrm{X}^n$ a toutes ses racines dans le disque unité $\mathbb{D}$.

2) Montrer que si $\mathrm{Q} \in \mathbb{C}[\mathrm{X}]$, alors les racines de Q' sont dans l'enveloppe convexe de celles de Q.

3) Déduire de 1) et 2) que pour tout polynôme $\mathrm{P} \in \mathbb{C}[\mathrm{X}]$ de degré n, on a

$$\|\mathrm{P}'\|_\infty \leqslant n \|\mathrm{P}\|_\infty .$$

4) L'inégalité précédente est-elle optimale ?

4.48. (Théorème des trois droites ; théorème des trois cercles.)

1) Soit $\Omega = \{z \in \mathbb{C};\ 0 < \mathrm{Re}(z) < 1\}$ et soit $g : \overline{\Omega} \to \mathbb{C}$ continue, bornée, holomorphe dans Ω. Pour $x \in [0\,;1]$, on pose $\mathrm{M}_x = \sup_{t\in\mathbb{R}} |g(x + it)|$. En appliquant l'exercice 4.44 à une fonction bien choisie, montrer que pour tout $x \in [0\,;1]$, on a

$$\mathrm{M}_x \leqslant \mathrm{M}_0^{1-x} \mathrm{M}_1^x .$$

2) Soient $0 \leqslant r_1 < r_2$, et posons $\mathrm{V} = \{z \in \mathbb{C};\ r_1 < |z| < r_2\}$. Soit $f : \overline{\mathrm{V}} \to \mathbb{C}$ continue, holomorphe dans V, et pour $r \in [r_1\,;r_2]$, posons $\mathrm{M}(r) = \sup\{|f(z)|;\ |z| = r\}$. En utilisant 1), montrer que si $r \in [r_1\,;r_2]$ et si $\theta \in [0\,;1]$ est tel que $\log r = (1-\theta)\log r_1 + \theta \log r_2$, autrement dit $\theta = \frac{\log(r/r_1)}{\log(r_2/r_1)}$, alors

$$\mathrm{M}(r) \leqslant \mathrm{M}(r_1)^\theta \mathrm{M}(r_2)^{1-\theta} .$$

3) Exprimer les résultats de 1) et 2) en termes de fonctions convexes.

4.49. (Une preuve de l'inégalité de Hölder.)

1) Soit $(\mathrm{X}, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré, et soient f, g deux fonctions mesurables strictement positives sur X.

a) On note V le rectangle $\{z = x+iy;\ 0 < x < 1,\ |y| < 1\}$, et pour $z \in \overline{\mathrm{V}}$, on pose

$$\Phi(z) = \frac{\int f^{1-z} g^z \, d\mu}{\left(\int f \, d\mu\right)^{1-z} \left(\int g \, d\mu\right)^z} .$$

Montrer que Φ est continue sur $\overline{\mathrm{V}}$, holomorphe sur V, et qu'on a

$$|\Phi(z)| \leqslant |\Phi(x)|$$

pour tout point $z = x + iy \in \overline{\mathrm{V}}$.

b) En appliquant le principe du maximum, montrer que pour tout $x \in [0\,;1]$, on a

$$\int f^{1-x} g^x \, d\mu \leqslant \left(\int f \, d\mu\right)^x \left(\int g \, d\mu\right)^{1-x}$$

2) Démontrer l'inégalité de Hölder.

4.50. Soient $f, f_1, \ldots, f_n \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ vérifiant $|f(z)| = \sum_1^n |f_i(z)|$ pour tout $z \in \mathbb{D}$. Le but de l'exercice est de montrer que les f_i sont proportionnelles à f.

1) Montrer qu'il existe des fonctions $c_1, \ldots, c_n \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ vérifiant $c_i f = f_i$ pour tout i et $\sum_i |c_i(z)| \equiv 1$.

2) Soient $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ des nombres complexes de module 1 tels que $\varepsilon_i c_i(0) = |c_i(0)|$ pour tout i. Montrer qu'on a $\sum_1^n \varepsilon_i c_i(z) \equiv 1$.

3) Soient $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ des nombres complexes vérifiant $|\sum_1^n \alpha_i| = \sum_1^n |\alpha_i|$. Montrer que les α_i sont positivement proportionnels.

4) Montrer que les fonctions c_i sont constantes et conclure.

4.51. Soit f une fonction holomorphe dans le disque unité $\mathbb{D}$. Pour $r < 1$, on pose

$$\mathrm{M}(r) = \sup\{|f(z)|;\ |z| = r\},$$

$$\mathrm{I}_1(r) = \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})| \, \frac{d\theta}{2\pi},$$

$$\mathrm{I}_2(r) = \left(\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta}|^2 \, \frac{d\theta}{2\pi}\right)^{1/2}$$

1) Montrer qu'on a $\mathrm{I}_1(r) \leqslant \mathrm{I}_2(r) \leqslant \mathrm{M}(r)$ pour tout $r < 1$.

2) Montrer que si $r < s < 1$, alors $\mathrm{M}(r) \leqslant \frac{s}{s-r} \mathrm{I}_1(r)$.

4.52. Les notations sont les mêmes qu'à l'exercice précédent.

1) Montrer que $\mathrm{M}(r)$ et $\mathrm{I}_2(r)$ sont des fonctions croissantes de r.

2) *a*) Soit $r < 1$. En appliquant le principe du maximum à la fonction $z \mapsto \int \varphi(\theta) f(ze^{i\theta}) \, d\theta$ pour une fonction $\varphi : [0\,;2\pi] \to \mathbb{C}$ convenablement choisie, montrer qu'on a $\mathrm{I}_1(r) \leqslant \mathrm{I}_1(s)$ pour tout $s > r$.

b) Conclure que $\mathrm{I}_1(r)$ est également une fonction croissante de r.

4.53. (Inégalité de von Neumann.)

Si E est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, on dit qu'une application $R : \mathbb{C}^n \to E$ est **polynomiale** s'il existe $e_1, \dots, e_N \in E$ et des polynômes $R_1, \dots, R_N \in \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$ tels que

$$R(z_1, \dots, z_n) \equiv \sum_i R_i(z_1, \dots, z_n)\, e_i \ .$$

Si E est de dimension finie, il revient au même de dire que les coordonnées de $R(z_1, \dots, z_n)$ dans une base quelconque de E sont des fonctions polynomiales de $(z_1, \dots, z_n)$.

1) Montrer que si $R : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ est polynomiale alors

$$|R(\lambda_1, \dots, \lambda_n)| \leqslant \sup_{(\partial\mathbb{D})^n} |R(\zeta_1, \dots, \zeta_n)|$$

pour tout $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \overline{\mathbb{D}}^n$. En déduire, à l'aide du théorème de Hahn-Banach, que si $(E, \| \ \|)$ est un espace vectoriel normé complexe et si $R : \mathbb{C}^n \to E$ est polynomiale, alors

$$\sup_{\overline{\mathbb{D}}^n} \|R(\lambda_1, \dots, \lambda_n)\| = \sup_{(\partial\mathbb{D})^n} \|R(\zeta_1, \dots, \zeta_n)\| \ .$$

2) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$; on note $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres de la matrice $\sqrt{M^*M}$, où $M^* = {}^t\overline{M}$. En utilisant la décomposition polaire, montrer qu'il existe une application $Q : \mathbb{C}^n \to \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ vérifiant les propriétés suivantes :

$$\begin{cases} Q \text{ est polynomiale} \\ Q(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = M \\ Q(z_1, \dots, z_n) \text{ est unitaire si } |z_1| = \cdots = |z_n| = 1 \end{cases}$$

3) On note $\| \ \|$ la norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ subordonnée à la norme hermitienne usuelle sur $\mathbb{C}^n$. Montrer que si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ vérifie $\|M\| \leqslant 1$, alors, pour tout polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$, on a

$$\|P(M)\| \leqslant \sup\{|P(z)| \ ; \ z \in \overline{\mathbb{D}}\} \ .$$

4.54. On note $\mathbf{A}(\mathbb{T})$ l'adhérence des fonctions polynomiales dans $\mathcal{C}(\mathbb{T})$. Montrer que l'application $f \mapsto \mathbf{f} = f_{|\partial\mathbb{D}}$ est un isomorphisme d'algèbres isométrique de $A(\mathbb{D})$ sur $\mathbf{A}(\mathbb{T})$. On pourra utiliser l'exercice 3.90.

4.55. Montrer qu'on a $\mathbf{A}(\mathbb{T}) = \{f \in \mathcal{C}(\mathbb{T}) ; \ \hat{f}(n) = 0 \text{ si } n < 0\}$.

4.56. (Théorème de maximalité de Wermer.)

Soit $\mathbf{A}(\mathbb{T})$ la sous-algèbre de $\mathcal{C}(\mathbb{T})$ définie à l'exercice 4.54. Le but de l'exercice est de démontrer que si $\mathbf{B}$ est une sous-algèbre fermée de $\mathcal{C}(\mathbb{T})$ contenant $\mathbf{A}(\mathbb{T})$, alors ou bien $\mathbf{B} = \mathbf{A}(\mathbb{T})$, ou bien $\mathbf{B} = \mathcal{C}(\mathbb{T})$.

On fixe une telle algèbre $\mathbf{B}$, et on suppose $\mathbf{B} \neq \mathbf{A}(\mathbb{T})$.

1) Montrer qu'il existe une fonction $f \in \mathbf{B}$ vérifiant $\hat{f}(-1) = 1$.

2) On note $\mathbf{z}$ la fonction $\mathbb{T} \ni \zeta \mapsto \zeta$. Montrer qu'il existe des fonctions polynomiales P, Q telles que

$$\left\|\mathbf{z}f - 1 - \mathbf{z}\mathrm{P} - \overline{\mathbf{z}\mathrm{Q}}\right\|_\infty \leqslant \frac{1}{2}\,.$$

3) *a*) Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a

$$\left\|1 + t\left(\mathbf{z}\mathrm{Q} - \overline{\mathbf{z}\mathrm{Q}}\right)\right\|_\infty \leqslant 1 + t^2 \left\|\mathbf{z}\mathrm{Q} - \overline{\mathbf{z}\mathrm{Q}}\right\|_\infty^2\,.$$

b) On pose $\mathrm{F} = f - \mathrm{P} - \mathrm{Q}$. Déduire de *a*) que pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a

$$\left\|1 + t - t\mathbf{z}\mathrm{F}\right\|_\infty \leqslant 1 + t^2 \left\|\mathbf{z}\mathrm{Q} - \overline{\mathbf{z}\mathrm{Q}}\right\|_\infty^2 + \frac{t}{2}\,.$$

4) Montrer que si $t > 0$ est assez petit, alors $\|1 + t - t\mathbf{z}\mathrm{F}\|_\infty < 1 + t$. En déduire que $\mathbf{z}$ est inversible dans $\mathbf{B}$.

5) Montrer qu'on a $\mathbf{B} = \mathcal{C}(\mathbb{T})$.

4.57. On veut donner une autre démonstration du théorème de maximalité de Wermer démontré dans l'exercice précédent. Soit donc $\mathbf{B}$ une sous-algèbre fermée de $\mathcal{C}(\mathbb{T})$ contenant $\mathbf{A}(\mathbb{T})$, et supposons $\mathbf{B} \neq \mathcal{C}(\mathbb{T})$.

1) Montrer qu'il existe un caractère de $\mathbf{B}$ tel que $\Theta(\mathbf{z}) = 0$.

2) On note $\mathcal{M}(\mathbb{T})$ l'espace des mesures boréliennes complexes sur $\mathbb{T}$, identifié au dual de $\mathcal{C}(\mathbb{T})$. Déduire de 1) qu'il existe une mesure $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{T})$ vérifiant les propriétés suivantes :

$$\begin{cases} \mu(\mathbb{T}) = 1 = \|\mu\| \ ; \\ \displaystyle\int \mathbf{z}^n f\, d\mu = 0 \ \text{ pour toute } f \in \mathbf{B} \text{ et pour tout entier } n \geqslant 0\,. \end{cases}$$

3) *a*) Montrer que μ est une mesure positive, et en déduire qu'on a $\int \mathbf{z}^n\, d\mu = 0$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$.

b) Identifier la mesure μ.

4) Montrer qu'on a $\mathbf{B} = \mathbf{A}(\mathbb{T})$.

4.58. Au vu des exercices 4.54 et 4.56, que peut-on dire d'une sous-algèbre fermée de $\mathcal{C}(\overline{\mathbb{D}})$ contenant toutes les fonctions polynomiales ?

4.59. Soit A une sous-algèbre de $\mathcal{C}(\overline{\mathbb{D}})$ contenant toutes les fonctions polynomiales. On suppose que toutes les fonctions de A vérifient le principe du maximum. Montrer que toutes les fonctions de A sont holomorphes dans $\mathbb{D}$.

4.60. Montrer que le principe du maximum pour les fonctions holomorphes peut se déduire du théorème de l'image ouverte.

4.61. On suppose Ω connexe. Que peut-on dire d'une fonction holomorphe $f : \Omega \to \Omega$ vérifiant $f \circ f = f$?

4.62. Soient f, g deux fonctions entières telles que $f\overline{g}$ soit à valeurs réelles. Montrer que f et g sont proportionnelles.

4.63. Soit f une fonction entière non constante.

1) Montrer que pour tout $r > 0$, l'ouvert $\Omega_r = \{z;\ |f(z)| < r\}$ est non vide, et qu'on a de plus $\partial\Omega_r = \{z;\ |f(z)| = r\}$.

2) On suppose que Ω_r est borné pour tout $r < 1$. Montrer que si g est une fonction holomorphe bornée dans Ω_1 et si tous les zéros de f dans Ω_1 sont également zéros de g avec une multiplicité au moins égale, alors $|g(z)| \leqslant \|g\|_\infty |f(z)|$ pour tout $z \in \Omega_1$.

4.64. (Forme invariante du lemme de Schwarz.)

En utilisant le lemme de Schwarz et l'exercice 4.46, montrer que si f est une fonction holomorphe sur $\mathbb{D}$ vérifiant $f(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$, alors

$$\left|\frac{f(b) - f(a)}{1 - \overline{f(b)} f(a)}\right| \leqslant \left|\frac{b - a}{1 - \bar{b}a}\right|$$

pour tous $a, b \in \mathbb{D}$, et

$$\frac{|f'(z)|}{1 - |f(z)|^2} \leqslant \frac{1}{1 - |z|^2}$$

pour tout $z \in \mathbb{D}$.

4.65. En utilisant l'exercice précédent, montrer que si $f \in \mathrm{H}^\infty(\mathbb{D})$, alors

$$|f'(z)| \leqslant \frac{\|f\|_\infty}{1 - |z|^2}$$

pour tout $z \in \mathbb{D}$.

4.66. Soit $f \in \mathrm{A}(\mathbb{D})$ vérifiant $f(\overline{\mathbb{D}}) \subset \overline{\mathbb{D}}$. On suppose que f s'annule en $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{D}$ avec multiplicités $m_1, \ldots, m_n$. Montrer qu'on a

$$|f(0)| \leqslant |a_1|^{m_1} \ldots |a_n|^{m_n} .$$

On pourra utiliser l'exercice 4.46.

4.67. On garde les notations de l'exercice 4.46. Pour $a, b \in \mathbb{D}$, on pose

$$\delta(a, b) = |\varphi_b(a)| = \left|\frac{b - a}{1 - \bar{b}a}\right| .$$

1) *a*) Montrer par un calcul direct que si a, b, c sont trois points de $\mathbb{D}$, alors $\delta(\varphi_c(a), \varphi_c(b)) = \delta(a, b)$.

b) En utilisant l'identité

$$1 - \left|\frac{b - a}{1 - \bar{b}a}\right|^2 = \frac{(1 - |b|^2)\,(1 - |a|^2)}{\left|1 - \bar{b}a\right|^2} ,$$

montrer que si $a, b \in \mathbb{D}$, alors

$$\delta(a, b) \leqslant \frac{|a| + |b|}{1 + |a||b|} \leqslant |a| + |b| .$$

c) Déduire de *a*) et *b*) que δ est une distance sur $\mathbb{D}$ et que les φ_c sont des isométries pour δ. On dit que δ est la **distance pseudo-hyperbolique** sur le disque $\mathbb{D}$.

2) Montrer que la distance δ définit la topologie usuelle de $\mathbb{D}$ et que $\mathbb{D}$ est complet pour δ.

4.68. On garde les notations de l'exercice précédent.

1) D'après l'exercice 4.64, toute fonction holomorphe $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ est 1-lipschitzienne pour la distance pseudo-hyperbolique δ. Que peut-on dire de plus si $f(\mathbb{D})$ est une partie relativement compacte de $\mathbb{D}$?

2) Montrer que si $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ est holomorphe et si $f(\mathbb{D})$ est relativement compact dans $\mathbb{D}$, alors f admet un unique point fixe et la suite des itérées de f converge vers ce point fixe uniformément sur tout compact.

4.69. Soit F une fonction entière de type exponentiel (voir l'exercice 3.52). On suppose qu'on a $F(0) = 1$, et que F ne s'annule jamais. En introduisant une fonction entière G telle que $e^G = F$ et en utilisant la proposition 4.9.2, montrer que F est de la forme $F(z) = e^{\alpha z}$, pour une certaine constante $\alpha \in \mathbb{C}$.

4.70. (Théorème de Kahane-Gleason-Zelazko.)

Soit A une algèbre de Banach complexe, commutative, avec unité **1**, et soit Θ une forme linéaire sur A. On suppose que pour tout $a \in A$ inversible dans A, on a $\Theta(a) \neq 0$. Le but de l'exercice est de montrer que Θ est un caractère de A.

1) Montrer que pour tout $a \in A$, $\Theta(a)$ appartient au spectre de a. En déduire que Θ est continue, avec $\|\Theta\| \leqslant 1$.

2) Soit $a \in A$ fixé. Pour $z \in \mathbb{C}$, on pose $F(z) = \Theta(e^{za})$. En utilisant l'exercice précédent, montrer qu'on a $F(z) \equiv e^{\alpha z}$, pour une certaine constante α.

3) Déduire de 2) qu'on a $\Theta(a^2) = \Theta(a)^2$ pour tout $a \in A$.

4) Conclure.

4.71. Montrer que pour tout $z \in \mathbb{D}$, on a $\displaystyle\prod_0^\infty (1 + z^{2^k}) = \frac{1}{1-z}$.

4.72. Soit (a_n) une suite de nombres complexes non nuls. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

(1) le produit $\prod a_n$ est convergent et $\prod_0^\infty a_n \neq 0$;

(2) la série $\sum \operatorname{Log} a_n$ est convergente.

4.73. Montrer que la fonction définie dans la preuve du corollaire 4.10.5 est de type exponentiel (voir l'exercice 3.52).

4.74. Calculer $\displaystyle\sum_1^\infty \frac{1}{n^2}$ en utilisant le lemme 4.10.6.

4.75. 1) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe un unique polynôme P_n tel que $\cos(2nz) = P_n(\cos z)$ pour tout $z \in \mathbb{C}$. Quel est le degré de P_n ?

2) Déduire de 1) que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a

$$\cos(2nz) = \prod_{k=0}^{n-1} \left(1 - \frac{\sin^2 z}{\sin^2\left((2k+1)\pi/4n\right)}\right).$$

3) Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a

$$\cos z = \prod_{k=0}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{((2k+1)\pi/2)^2}\right) .$$

4.76. 1) En utilisant le lemme 4.10.6, montrer qu'au voisinage de 0, on peut écrire

$$\operatorname{cotan} z = \frac{1}{z} - 2\sum_{0}^{\infty} \frac{\zeta(2p+2)}{\pi^{2p+2}} z^{2p+1} .$$

2) En déduire que $\frac{\zeta(2n)}{\pi^{2n}}$ est rationnel pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et donner une relation entre $\zeta(2n)$ et le nombre de Bernoulli B_{2n} (voir l'exercice 3.41).

4.77. 1) En utilisant le développement de ζ en produit infini, montrer que pour $\operatorname{Re}(s) > 1$, $s = \sigma + it$, on peut écrire

$$\log|\zeta(s)| = \operatorname{Re}\left(\sum_{1}^{\infty} \frac{c_n}{n^s}\right) = \sum_{1}^{\infty} \frac{c_n}{n^\sigma} \cos(t \log n) ,$$

où les c_n sont *positifs*.

2) En utilisant 1), montrer que pour $\sigma > 1$ et $t \in \mathbb{R}$, on a

$$|(\sigma-1)\zeta(\sigma)|^3 \left|\frac{\zeta(\sigma+it)}{\sigma-1}\right|^4 |\zeta(\sigma+2it)| \geqslant 1 .$$

3) Déduire de 2) que le prolongement méromorphe de ζ ne s'annule pas sur la droite $\{\operatorname{Re}(s) = 1\}$.

4.78. (Prolongement méromorphe de ζ à $\mathbb{C}$.)

On rappelle (voir l'exercice 3.41) que les nombres de Bernoulli B_n sont définis par l'identité

$$\frac{z}{e^z - 1} = \sum_{0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n ,$$

valable au voisinage de 0 ; on rappelle également qu'on a $B_{2p+1} = 0$ pour tout $p \geqslant 1$.

1) *a*) Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{B_n}{n!} z^n$?

b) Montrer que la série $\sum \frac{B_{2n}}{(2n)!} \frac{1}{z+2n-1}$ converge normalement sur tout compact de $\mathbb{C}\backslash\{1; -1; -3; \ldots\}$, et que pour $z \in \mathbb{C}$ vérifiant $\operatorname{Re}(z) > 2$, on peut écrire

$$\int_0^1 \frac{t^{z-1}}{e^t - 1}\, dt = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{2z} + \sum_{1}^{\infty} \frac{B_{2n}}{(2n)!} \frac{1}{z+2n-1} .$$

2) Montrer que pour $s > 1$, on a

$$\zeta(s)\,\Gamma(s) = \int_0^\infty \frac{t^{s-1}}{e^t - 1}\, dt .$$

3) Déduire de 1) et 2) que la fonction ζ se prolonge méromorphiquement à $\mathbb{C}$.

4.79. Soit $B = \prod_{n\geqslant 0} b_n$ un produit de Blaschke associé à une suite $(a_n) \subset \mathbb{D}$.

1) Soit $N \geqslant 0$, et soit $B_N = \prod_0^N b_n$. Montrer que $|B_N(r\zeta)|$ tend vers 1 uniformément sur $\mathbb{T}$ quand r tend vers 1, et en déduire l'inégalité

$$\left|\frac{B}{B_N}(0)\right| \leqslant \|B\|_\infty .$$

2) Montrer qu'on a $\|B\|_\infty = 1$.

4.80. Soit $B = \prod_{n\geqslant 0} b_n$ un produit de Blaschke associé à une suite $(a_n) \subset \mathbb{D}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $B_n = \prod_0^n b_k$.

1) Pour $q > p \geqslant 0$, calculer le produit scalaire $\langle B_q, B_p\rangle_{H^2(\mathbb{D})}$ en fonction des a_k.

2) Montrer que la suite (B_n) converge dans $H^2(\mathbb{D})$.

3) Déduire de 2) que la « valeur au bord » de B vérifie $|\mathbf{B}(\zeta)| = 1$ presque partout.

Chapitre 5

Homotopie

Sauf mention contraire, on supposera dans ce chapitre que tous les chemins sont définis sur le même intervalle $J = [a\,;b]$. D'autre part, Ω est toujours un ouvert de $\mathbb{C}$.

5.1. Introduction

Soit R le rectangle $[0\,;1] \times J \subset \mathbb{R}^2$ et soit $H : R \to \Omega$ une application de classe $\mathcal{C}^2$, c'est-à-dire prolongeable en une application de classe $\mathcal{C}^2$ au voisinage de R. Pour $s \in [0\,;1]$, notons $\Gamma_s : J \to \Omega$ le chemin défini par $\Gamma_s(t) = H(s,t)$, et soient $c_a\,, c_b : [0\,;1] \to \Omega$ les chemins définis par $c_a(s) = H(s\,,a)$ et $c_b(s) = H(s\,,b)$. Enfin, notons ∂H le lacet $H \circ \partial R$.

Si ω est une 1-forme de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω, alors on a d'une part

$$\int_{\partial H} \omega = \int_{c_a} \omega + \int_{\Gamma_1} \omega - \int_{c_b} \omega - \int_{\Gamma_0} \omega\,,$$

et d'autre part

$$\int_{\partial H} \omega = \int (\partial R)^* H^* \omega = \int_{\partial R} H^* \omega\,.$$

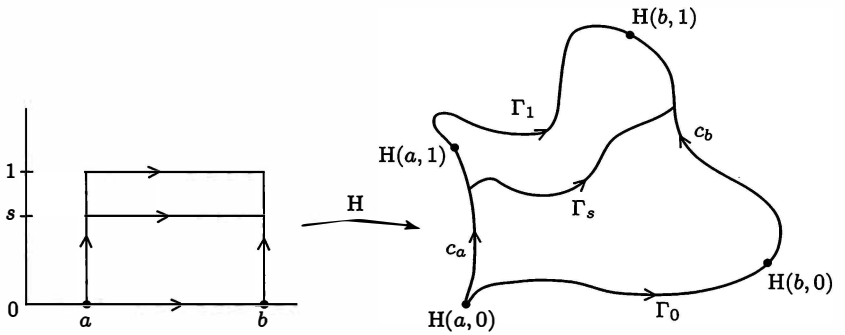


FIG. 28.

Si de plus ω est fermée, alors $H^*\omega$ l'est également puisque $d(H^*\omega) = H^*(d\omega) = 0$. On a alors

$$\int_{\partial H} \omega = 0\,,$$

autrement dit

$$\int_{\Gamma_1} \omega - \int_{\Gamma_0} \omega = \int_{c_b} \omega - \int_{c_a} \omega \, .$$

Le membre de droite est nul si par exemple $c_a = c_b$, ce qui signifie que tous les chemins Γ_s sont des lacets, ou si c_a et c_b sont des chemins constants, ce qui signifie que les extrémités de Γ_s restent fixes lorsque s varie entre 0 et 1. On a donc obtenu le résultat suivant.

Proposition 5.1.1. *Soient γ_0 et γ_1 deux chemins de classe $\mathcal{C}^2$ dans Ω.*

a) *Supposons que γ_0, γ_1 soient des lacets et qu'il existe une application $\mathrm{H} : [0;1] \times \mathrm{J} \to \Omega$ de classe $\mathcal{C}^2$ vérifiant les propriétés suivantes, où on a posé $\Gamma_s(t) = \mathrm{H}(s,t)$:*

(i) *tous les chemins Γ_s, $s \in [0;1]$ sont des lacets ;*

(ii) $\Gamma_0 = \gamma_0$ *et* $\Gamma_1 = \gamma_1$.

Sous ces hypothèses, on a $\int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_0} \omega$ pour toute 1-forme fermée ω de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω.

b) *Le même résultat vaut si γ_0, γ_1 sont deux chemins ayant le même point initial p et le même point terminal q et s'il existe $\mathrm{H} : [0;1] \times \mathrm{J} \to \Omega$ de classe $\mathcal{C}^2$ vérifiant :*

(i′) *Tous les Γ_s ont pour point initial p et pour point terminal q ;*

(ii) $\Gamma_0 = \gamma_0$ *et* $\Gamma_1 = \gamma_1$.

Ainsi, l'intégrale d'une 1-forme fermée $\omega \in \mathcal{A}^1_1(\Omega)$ sur un chemin de classe $\mathcal{C}^2$ ne change pas si on « déforme régulièrement » ce chemin en restant dans Ω. Cette propriété d'**invariance par homotopie** constitue le thème principal du chapitre.

5.2. Intégrale curviligne : cas des chemins continus

On sait intégrer une 1-forme différentielle sur un chemin de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, mais pas le long d'un chemin seulement supposé continu. On va voir maintenant qu'il est possible de définir l'intégrale d'une forme *fermée* sur un chemin continu arbitraire. Cela permettra ensuite de démontrer l'invariance de l'intégrale par homotopie en toute généralité.

5.2.1. Primitive d'une forme fermée le long d'un chemin

Si ω est une 1-forme fermée sur Ω et si z_0 est un point de Ω, on dira qu'une fonction F définie au voisinage de z_0 est une **primitive de ω au voisinage de z_0** s'il existe un voisinage ouvert V de z_0 tel que F soit de classe $\mathcal{C}^1$ sur V et $d\mathrm{F} \equiv \omega$ dans V. Cette définition a bien un sens car ω est localement exacte, d'après le lemme de Poincaré.

Remarquons que deux primitives de ω au voisinage d'un point z_0 diffèrent d'une constante au voisinage de z_0 : en effet, si F_1 et F_2 sont deux telles primitives, alors $d(F_1 - F_2) \equiv 0$ au voisinage de z_0.

Définition 5.2.1. *Soit $\omega \in \mathcal{A}_0^1(\Omega)$ une 1-forme différentielle fermée, et soit $\gamma : J \to \Omega$ un chemin continu. On dit qu'une fonction continue $f : J \to \mathbb{C}$ est une* **primitive de ω le long de γ** *si elle vérifie la propriété suivante : pour tout $t_0 \in J$, il existe une primitive F de ω au voisinage de $\gamma(t_0)$ telle que $f(t) = F(\gamma(t))$ au voisinage de t_0.*

Exemple 5.2.2. *Si $F \in \mathcal{C}^1(\Omega)$, alors $F \circ \gamma$ est une primitive de dF le long de γ.*

La preuve est immédiate.

Exemple 5.2.3. *Si γ est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, alors la fonction f définie par*

$$f(t) = \int_a^t \omega(\gamma(s)) \cdot \gamma'(s)\, ds$$

est une primitive de ω le long de γ.

Preuve. Supposons d'abord γ de classe $\mathcal{C}^1$; alors f est de classe $\mathcal{C}^1$ et $f'(t) \equiv \omega(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)$. Si $t_0 \in J$, alors, d'après le lemme de Poincaré, ω admet une primitive F au voisinage de $\gamma(t_0)$; on a donc

$$f'(t) = dF(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = (F \circ \gamma)'(t)$$

au voisinage de t_0. Quitte à rajouter une constante à F, on peut également supposer qu'on a $F(\gamma(t_0)) = f(t_0)$, et on en déduit que f et $F \circ \gamma$ coïncident au voisinage de t_0. Le résultat est donc acquis dans le cas d'un chemin de classe $\mathcal{C}^1$.

Dans le cas général, il découle de ce qui précède qu'on peut trouver une subdivision $(s_0, \ldots, s_N)$ de l'intervalle J telle que $f_{|[s_i;s_{i+1}]}$ est une primitive de ω le long de $\gamma_{|[s_i;s_{i+1}]}$ pour tout $i \leqslant N-1$. La définition 5.2.1 est satisfaite pour tout $t \in J \backslash \{s_0; \ldots; s_N\}$, et il reste à régler le cas des s_i.

Fixons $i \in \{0; \ldots; N\}$. Par hypothèse, on peut trouver deux primitives F_1, F_2 de ω au voisinage de $\gamma(s_i)$ telles que $F_1(\gamma(t)) = f(t)$ pour t proche de s_i, $t \leqslant s_i$, et $F_2(\gamma(t)) = f(t)$ pour t proche de s_i, $t \geqslant s_i$. Comme les fonctions F_1 et F_2 sont des primitives de ω au voisinage de $\gamma(s_i)$, elles diffèrent d'une constante au voisinage de $\gamma(s_i)$, et comme $F_1(\gamma(s_i)) = f(s_i) = F_2(\gamma(s_i))$, on a en fait $F_1 \equiv F_2$ au voisinage de $\gamma(s_i)$. La définition 5.2.1 est donc satisfaite pour tous les points s_i, ce qui termine la démonstration.

Le théorème suivant est le résultat principal de cette section.

Théorème 5.2.4. *Si $\gamma : J \to \Omega$ est un chemin continu, alors toute 1-forme différentielle fermée $\omega \in \mathcal{A}_0^1(\Omega)$ possède des primitives le long de γ. De plus, deux primitives de ω le long de γ diffèrent d'une constante.*

Pour la preuve, on a besoin de deux lemmes qu'on utilise également dans d'autres parties de ce livre. Le second, connu sous le nom de **lemme de Lebesgue**, a en fait déjà servi au chapitre 2.

Lemme 5.2.5. *Sur un espace connexe, toute application localement constante est constante*

Preuve. Rappelons que si X est un espace topologique et si Y est un ensemble quelconque, une application $f : X \to Y$ est dite **localement constante** si tout point de X admet un voisinage sur lequel f est constante. Il revient au même de dire que f est continue de X dans Y muni de la topologie discrète ; si X est connexe, une telle application est donc constante.

Lemme 5.2.6. (Lemme de Lebesgue.)
Soit (X,d) un espace métrique compact. Si $(O_i)_{i\in I}$ est un recouvrement ouvert de X, alors on peut trouver $\varepsilon > 0$ tel que tout ensemble $A \subset X$ de diamètre inférieur à ε est contenu dans l'un des O_i.

Preuve. Supposons que la conclusion soit fausse pour un certain recouvrement ouvert (O_i). On peut alors trouver une suite (A_n) de parties de X dont le diamètre tend vers 0 et telle qu'aucun A_n n'est contenu dans un O_i.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, choisissons un point $x_n \in A_n$. Comme X est compact, on peut supposer, quitte à extraire une sous-suite, que la suite (x_n) converge vers un point $x \in X$. Le point x est dans un certain O_i, et on peut trouver $\varepsilon > 0$ tel que la boule $B(x,\varepsilon)$ soit contenue dans O_i. Si n est suffisamment grand, alors $d(x_n,x) < \varepsilon/2$ et $\operatorname{diam}(A_n) < \varepsilon/2$, donc $A_n \subset B(x,\varepsilon) \subset O_i$, ce qui est absurde par hypothèse sur les A_n. Cette contradiction démontre le lemme.

Autre preuve. Par compacité, il suffit de prouver le résultat pour un recouvrement ouvert fini $O_1, \dots, O_N$.

Pour $i \leqslant N$, posons $K_i = X \backslash O_i$; posons également $K = \prod_1^N K_i$. On a $\bigcap_1^N K_i = \emptyset$ puisque les O_i recouvrent X, donc la fonction $f : K \to \mathbb{R}^+$ définie par $f(x_1, \dots, x_N) = \sum_1^{N-1} d(x_i, x_{i+1})$ ne s'annule jamais. Comme f est continue et K compact car les K_i le sont, $\alpha = \inf_K f$ est strictement positif. Soit maintenant $A \subset X$, et supposons que A ne soit contenu dans aucun O_i ; on peut donc trouver pour tout i un point

$x_i \in A \cap K_i$. On a alors $\alpha \leqslant \sum_1^{N-1} d(x_i, x_{i+1}) \leqslant N\,\mathrm{diam}(A)$, et par conséquent $\mathrm{diam}(A) \geqslant \alpha/N$. Ainsi, $\varepsilon = \alpha/N$ convient.

Preuve du théorème 5.2.4. Fixons $\gamma : J \to \Omega$ et une 1-forme fermée $\omega \in \mathcal{A}_0^1(\Omega)$.

Si f_1 et f_2 sont deux primitives éventuelles de ω le long de γ, alors, au voisinage de chaque point $t_0 \in J$, on a $f_j(t) = F_j(\gamma(t))$, $j = 1, 2$, où F_j est une primitive de ω au voisinage de $\gamma(t_0)$. Comme F_1 et F_2 différent d'une constante au voisinage de $\gamma(t_0)$, on en déduit que la fonction $f_1 - f_2$ est localement constante, et donc constante puisque J est connexe. Ainsi, deux primitives éventuelles de ω le long de γ diffèrent d'une constante. Il reste à prouver que de telles primitives existent.

Pour tout $t \in J$, choisissons un disque ouvert D_t tel que $\gamma(t) \in D_t \subset \Omega$. Comme $\mathrm{Im}(\gamma)$ est compact, le lemme de Lebesgue 5.2.6 permet de trouver un nombre $\varepsilon > 0$ tel que tout ensemble $A \subset \mathrm{Im}(\gamma)$ de diamètre inférieur à ε est contenu dans l'un des D_t ; et comme γ est une application uniformément continue, on en déduit qu'on peut trouver une subdivision $(s_0, \ldots, s_N)$ de l'intervalle J et des disques ouverts $D_1, \ldots, D_N \subset \Omega$ tels que $\gamma([s_{i-1}; s_i]) \subset D_i$ pour tout $i \geqslant 1$.

D'après le lemme de Poincaré, la 1-forme ω admet des primitives dans chaque disque D_i. On peut donc définir par récurrence des fonctions $F_1, \ldots, F_N$ de la façon suivante : F_1 est une primitive de ω sur D_1 arbitrairement choisie ; et pour $i \geqslant 2$, F_i est la primitive de ω sur D_i vérifiant $F_i(\gamma(s_{i-1})) = F_{i-1}(\gamma(s_{i-1}))$, ce qui a bien un sens puisque $\gamma(s_{i-1}) \in D_{i-1} \cap D_i$.

Comme l'intersection de deux disques est toujours connexe et comme $d(F_i - F_{i-1}) = 0$ sur $D_{i-1} \cap D_i$, les fonctions F_{i-1} et F_i coïncident sur $D_{i-1} \cap D_i$, $2 \leqslant i \leqslant N$. On en déduit que si on pose $f(t) = F_i(\gamma(t))$ pour $t \in [s_{i-1}; s_i]$, alors la fonction f est définie sans ambiguïté et est une primitive de ω le long de γ.

5.2.2. Intégrale sur un chemin continu

Définition 5.2.7. *Si $\omega \in \mathcal{A}_0^1(\Omega)$ est une 1-forme fermée et si $\gamma : J \to \Omega$ est un chemin continu, on définit l'***intégrale de ω sur γ** *par la formule*

$$\int_\gamma \omega = f(b) - f(a)\,,$$

où f est n'importe quelle primitive de ω le long de γ.

La proposition suivante montre que cette définition est « raisonnable », et que certaines propriétés fondamentales de l'intégrale curviligne restent vraies pour l'intégrale sur des chemins continus.

Proposition 5.2.8. **a)** *La définition de l'intégrale est compatible avec celle déjà donnée pour les chemins de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux.*

b) *L'intégrale est additive par rapport au chemin : si $c \in]a\,;b[$, alors $\int_\gamma \omega = \int \gamma_{|[a;c]}\,\omega + \int \gamma_{|[c;b]}\,\omega$.*

c) *Si γ et λ sont deux chemins ou deux lacets équivalents, alors $\int_\gamma \omega = \int_\lambda \omega$. Si γ et λ sont anti-équivalents, alors $\int_\gamma \omega = -\int_\lambda \omega$.*

d) *Si $\mathrm{F} \in \mathcal{C}^1(\Omega)$ et si γ est un chemin dans Ω, alors*

$$\int_\gamma d\mathrm{F} = \mathrm{F}(\gamma(b)) - \mathrm{F}(\gamma(a))\ ;$$

en particulier, si ω est une 1-forme exacte, alors $\int_\gamma \omega = 0$ pour tout lacet γ dans Ω.

e) *Si γ est un chemin constant, alors $\int_\gamma \omega = 0$ pour toute 1-forme fermée $\omega \in \mathcal{A}^1_0(\Omega)$.*

Preuve. La partie **a** découle de l'exemple 5.2.3.

Pour démontrer **b**, choisissons une primitive f_1 de ω le long de $\gamma_1 = \gamma_{|[a;c]}$, et notons f_2 la primitive de ω le long de $\gamma_2 = \gamma_{|[c;b]}$ vérifiant $f_2(c) = f_1(c)$. La fin de la preuve de l'exemple 5.2.3 montre que la fonction f égale à f_1 sur $[a\,;c]$ et à f_2 sur $[c\,;b]$ est une primitive de ω le long de γ. On a donc

$$\int_\gamma \omega = f(b) - f(a) = [f(b) - f(c)] + [f(c) - f(a)] = \int_{\gamma_1} \omega + \int_{\gamma_2} \omega\,.$$

Démontrons maintenant **c** dans le cas des chemins, le cas des lacets étant laissé en exercice. Si $\theta : [a\,;b] \to [c\,;d]$ est un changement de paramètre tel que $\gamma = \lambda \circ \theta$ et si g est une primitive de ω le long de λ, alors $f = g \circ \theta$ est une primitive de ω le long de γ. On a donc

$$\int_\gamma \omega = g(\theta(b)) - g(\theta(a)) = g(d) - g(c) = \int_\lambda \omega$$

si θ est croissant, et $\int_\gamma \omega = g(c) - g(d) = -\int_\lambda \omega$ si θ est décroissant.

Pour **d**, il suffit d'observer que la fonction $\mathrm{F} \circ \gamma$ est une primitive de $d\mathrm{F}$ le long de γ. Enfin, la partie **e** est immédiate.

Il reste également une trace de la formule de Stokes dans ce cadre plus général. C'est le contenu du lemme suivant, où on a noté $\partial\mathrm{H}$ le lacet $\mathrm{H} \circ \partial\mathrm{R}$.

Lemme 5.2.9. *Soit $\mathrm{R} \subset \mathbb{R}^2$ un rectangle fermé. Si $\mathrm{H} : \mathrm{R} \to \Omega$ est une application continue, alors $\int_{\partial\mathrm{H}} \omega = 0$ pour toute 1-forme fermée $\omega \in \mathcal{A}^1_0(\Omega)$.*

Preuve. Fixons ω et $H : R \to \Omega$. Soit également $\delta > 0$, et notons $R_1, \dots, R_k$ les sous-rectangles de R obtenus en traçant les droites d'équations $x = j\delta$ et $y = j\delta$, $j \in \mathbb{Z}$. Enfin, posons $H_i = H_{|R_i}$.

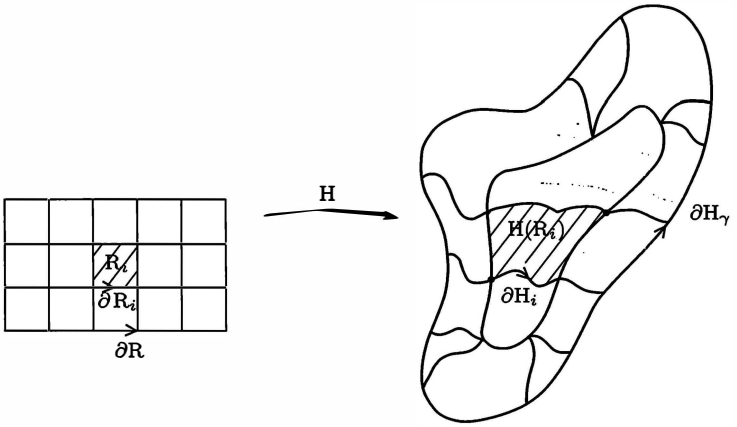


FIG. 29.

D'après la proposition précédente (**b** et **c**), on a $\int_{\partial H} \omega = \sum_1^k \int_{\partial H_i} \omega$ car les intégrales le long des cotés des R_i intérieurs à R se compensent. D'autre part, comme ω est localement exacte et comme H(R) est compact, le lemme de Lebesgue 5.2.6 permet de trouver $\varepsilon > 0$ tel que tout ensemble $A \subset H(R)$ de diamètre inférieur à ε est contenu dans un ouvert sur lequel ω est exacte. Par uniforme continuité de H, on en déduit que si δ est choisi suffisamment petit, alors ω est exacte au voisinage de chacun des $H(R_i)$. On a alors $\int_{\partial H_i} \omega = 0$ pour tout i, et donc $\int_{\partial H} \omega = 0$.

5.3. Homotopie

5.3.1. Définitions ; invariance de l'intégrale par homotopie

La notion d'homotopie correspond à l'idée intuitive de « déformation continue ».

Définition 5.3.1. a) *On dit que deux lacets $\gamma_0, \gamma_1 : J \to \Omega$ sont* **homotopes dans** Ω *s'il existe une application continue* $H : [0;1] \times J \to \Omega$ *vérifiant les propriétés suivantes :*

(i) *Pour tout $s \in [0;1]$, le chemin Γ_s défini par $\Gamma_s(t) = H(s,t)$ est un lacet ;*

(ii) $\Gamma_0 = \gamma_0$ *et* $\Gamma_1 = \gamma_1$.

b) *Si p et q sont deux points de Ω, on dit que deux chemins $\gamma_0, \gamma_1 : J \to \Omega$ de p vers q sont* **homotopes dans Ω avec extrémités fixes** *s'il existe une application continue* $H : [0;1] \times J \to \Omega$ *vérifiant*

(i') *pour tout* $s \in [0;1]$, *le chemin* Γ_s *a pour point initial* p *et pour point terminal* q ;

(ii) $\Gamma_0 = \gamma_0$ *et* $\Gamma_1 = \gamma_1$.

Dans les deux cas, on dit que l'application H *est une* **homotopie** *entre* γ_0 *et* γ_1.

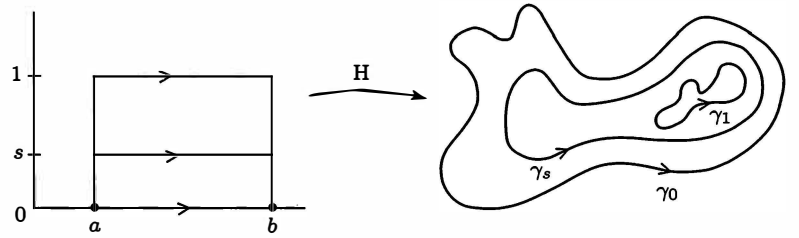


FIG. 30. Homotopie de lacets

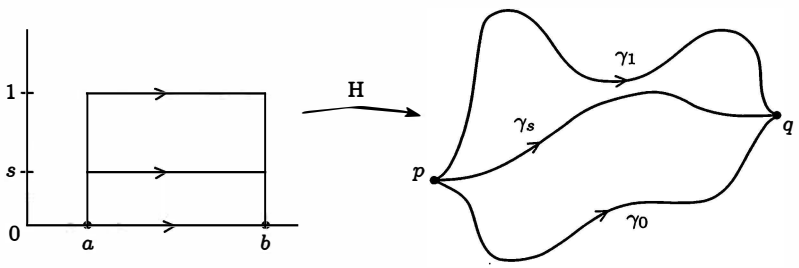


FIG. 31. Homotopie à extrémités fixes

Remarques. 1) On vérifie sans peine que les deux relations d'homotopie sont des relations d'équivalence.

2) Le fait que deux lacets ou deux chemins soient ou non homotopes dépend fortement de l'ouvert Ω. Par exemple, deux lacets quelconques sont toujours homotopes dans $\mathbb{C}$ (il suffit de poser $H(s,t) = (1-s)\gamma_0(t) + s\gamma_1(t)$), mais il est intuitivement clair que le lacet $\partial\mathbb{D}$ n'est

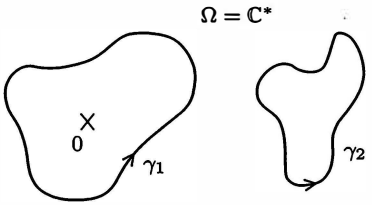


FIG. 32. γ_2 est homotope à un lacet constant, γ_1 ne l'est pas

pas homotope dans $\mathbb{C}^*$ à un lacet constant (voir la section suivante pour une démonstration).

3) La notion d'homotopie a un sens pour des chemins dans un espace topologique arbitraire : les définitions sont identiques.

Le résultat suivant donne une condition suffisante d'homotopie facilement vérifiable en pratique.

Lemme 5.3.2. *Si $\gamma_0, \gamma_1 : J \to \Omega$ sont deux chemins dans Ω ayant même origine et même extrémité ou deux lacets dans Ω, et si tous les segments $[\gamma_0(t) ; \gamma_1(t)]$ sont contenus dans Ω, alors γ_0 et γ_1 sont homotopes dans Ω. C'est le cas en particulier si on a*

$$|\gamma_1(t) - \gamma_0(t)| < d(\gamma_0(t), \partial\Omega) + d(\gamma_1(t), \partial\Omega)$$

pour tout $t \in J$.

Preuve. Il suffit de poser $H(s,t) = (1-s)\gamma_0(t) + s\gamma_1(t)$.

Corollaire 5.3.3. *Si γ_0, γ_1 sont deux lacets dans $\mathbb{C}^*$ vérifiant*

$$|\gamma_1(t) - \gamma_1(t)| < |\gamma_0(t)| + |\gamma_1(t)|$$

pour tout t, alors γ_0 et γ_1 sont homotopes dans $\mathbb{C}^*$.

Corollaire 5.3.4. *Tout chemin dans Ω est homotope dans Ω avec extrémités fixes à un chemin de classe C^1 par morceaux.*

Preuve. Soit $\gamma_0 : J \to \Omega$ un chemin dans Ω, et posons $r_0 = d(\mathrm{Im}(\gamma_0), \partial\Omega)$. Comme γ_0 est uniformément continu, on peut trouver un chemin $\gamma_1 : J \to \Omega$ affine par morceaux tel que $\gamma_1(a) = \gamma_0(a)$, $\gamma_1(b) = \gamma_0(b)$ et $\|\gamma_1 - \gamma_0\|_\infty < r_0$. D'après le lemme, γ_0 et γ_1 sont homotopes dans Ω avec extrémités fixes.

On peut maintenant énoncer le résultat principal du chapitre.

Théorème 5.3.5. *L'intégrale d'une 1-forme fermée sur un chemin est invariante par homotopie : si γ_0, γ_1 sont deux chemins homotopes dans Ω avec extrémités fixes ou deux lacets homotopes dans Ω, alors*

$$\int_{\gamma_0} \omega = \int_{\gamma_1} \omega$$

pour toute 1-forme fermée $\omega \in \mathcal{A}^1_0(\Omega)$.

Preuve. Fixons $\omega, \gamma_0, \gamma_1$, et soit $H : [0;1] \times J \to \Omega$ une homotopie entre γ_0 et γ_1. D'après le lemme 5.2.9, on a $\int_{\partial H} \omega = 0$, ce qui s'écrit,

en notant c_a et c_b les chemins définis sur $[0;1]$ par $c_a(s) = \mathrm{H}(s,a)$ et $c_b(s) = \mathrm{H}(s,b)$:

$$\int_{\gamma_1} \omega - \int_{\gamma_0} \omega = \int_{c_b} \omega - \int_{c_a} \omega .$$

Si H est une homotopie de lacets, alors les chemins c_a et c_b sont égaux, et si H est une homotopie à extrémités fixes, ils sont tous les deux constants. Dans un cas comme dans l'autre, on obtient $\int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_0} \omega$.

Corollaire 5.3.6. (Théorème de Cauchy homotopique.)
Si γ est un lacet homotope dans Ω à un lacet constant, alors

$$\int_\gamma f dz = 0$$

pour toute fonction f holomorphe dans Ω.

Corollaire 5.3.7. *Pour tout chemin γ dans Ω, l'application $f \mapsto \int_\gamma f dz$ est continue sur $\mathcal{H}(\Omega)$.*

Preuve. Le théorème 5.3.5 et le corollaire 5.3.4 permettent de se ramener au cas d'un chemin de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux ; et dans ce cas, la formule $\int_\gamma f dz = \int_a^b f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt$ donne immédiatement le résultat.

5.3.2. Ouverts simplement connexes

Définition 5.3.8. *On dit que Ω est* **simplement connexe** *s'il est connexe et si de plus tout lacet dans Ω est homotope dans Ω à un lacet constant.*

Remarques. 1) La simple connexité est une propriété *topologique*, c'est à dire invariante par homéomorphisme.

2) Si Ω est simplement connexe, alors deux lacets quelconques dans Ω sont toujours homotopes dans Ω. Cela découle de la transitivité de la relation d'homotopie et du fait que deux lacets constants dans Ω sont toujours homotopes car Ω est connexe par arcs.

Exemples. *a) Si Ω est convexe, ou plus généralement, si Ω est* **étoilé** *par rapport à un point p – ce qui signifie que pour tout $x \in \Omega$, le segment $[p;x]$ est contenu dans Ω – alors Ω est simplement connexe. C'est le cas par exemple pour $\Omega = \mathbb{C}$ ou pour $\Omega = \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}^-$, qui est étoilé par rapport à tout point $p \in]0;+\infty[$.*

b) $\mathbb{C}^*$ n'est pas simplement connexe. Par exemple, le lacet $\partial\mathbb{D}$ n'est pas homotope dans $\mathbb{C}^*$ à un lacet constant.

Preuve. Si Ω est étoilé par rapport à p et si γ est un lacet dans Ω, on définit une homotopie entre γ et le lacet constant $t \mapsto p$ en posant

$H(s,t) = (1-s)p + s\gamma(t)$; cela prouve **a**. Pour démontrer **b**, il suffit de remarquer que l'intégrale $\int_{\partial\mathbb{D}} \frac{dz}{z}$ n'est pas nulle et d'appliquer le théorème 5.3.5.

Théorème 5.3.9. *Sur un ouvert simplement connexe, toute* 1*-forme fermée est exacte.*

Preuve. Si Ω est simplement connexe et si ω est une 1-forme fermée sur Ω, alors $\int_\gamma \omega = 0$ pour tout lacet γ dans Ω d'après le théorème 5.3.5, donc ω est exacte d'après 2.1.7.

Corollaire 5.3.10. *Si Ω est simplement connexe, alors*

(1) $\int_\gamma f dz = 0$ *pour toute fonction $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ et pour tout lacet γ dans Ω ;*

(2) *toute fonction holomorphe dans Ω admet une primitive holomorphe ;*

(3) *toute fonction holomorphe $f : \Omega \to \mathbb{C}^*$ admet un logarithme holomorphe.*

Preuve. Les parties (1) et (2) sont immédiates. Enfin, si $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ ne s'annule pas dans Ω, alors sa dérivée logarithmique f'/f est holomorphe, donc admet une primitive holomorphe si Ω est simplement connexe, et il ne reste qu'à appliquer 4.1.4.

5.4. Indice d'un lacet par rapport à un point

5.4.1. Déterminations du logarithme le long d'un chemin ; variation de l'argument

Si $\gamma : J \to \mathbb{C}^*$ est un chemin dans $\mathbb{C}^*$, on appelle **détermination continue du logarithme le long de** γ toute application continue $l : J \to \mathbb{C}$ telle que $e^{l(t)} = \gamma(t)$ pour tout $t \in J$. On définit de même les **déterminations continues de l'argument le long de** γ.

Les déterminations du logarithme et de l'argument se correspondent de manière évidente : si l est une détermination du logarithme, alors $\theta = \mathrm{Im}(l)$ est une détermination de l'argument, et si θ est une détermination de l'argument le long de γ, alors $l = \log|\gamma| + i\theta$ est une détermination du logarithme. Notons également que par connexité de J, deux déterminations continues du logarithme le long de γ diffèrent d'une constante multiple de $2i\pi$, et deux déterminations continues de l'argument diffèrent d'une constante multiple de 2π.

On va montrer ici qu'il est toujours possible de trouver une détermination continue du logarithme le long d'un chemin donné, ce qui n'était pas du tout évident a priori.

Il est important de ne pas mal interpréter ce résultat : l'existence d'une détermination continue du logarithme le long d'un chemin γ n'entraîne absolument pas l'existence d'une détermination continue du logarithme sur $X = \mathrm{Im}(\gamma)$. Par exemple, si $\gamma : [0\,;2\pi] \to \mathbb{C}$ est le chemin défini par $\gamma(t) = e^{it}$, alors l'application $t \mapsto it$ est une détermination continue du logarithme le long de γ, mais il n'existe pas de détermination continue du logarithme sur le cercle unité $\mathbb{T}$, comme on l'a vu au chapitre 3.

Lemme 5.4.1. *Soit $\gamma : [a\,;b] \to \mathbb{C}^*$ un chemin dans $\mathbb{C}^*$. Pour une application $l : [a\,;b] \to \mathbb{C}$, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(1) *l est une primitive de $\frac{dz}{z}$ le long de γ et $l(a)$ est un logarithme de $\gamma(a)$;*

(2) *l est une détermination continue du logarithme le long de γ.*

Preuve. Si l est une primitive de dz/z le long de γ, alors, au voisinage de chaque point $t_0 \in J = [a\,;b]$, on peut écrire on peut écrire $l(t) = \mathrm{L}(\gamma(t))$, où L est une primitive de dz/z au voisinage de $\gamma(t_0)$. D'après le lemme 4.1.3, on a $e^{\mathrm{L}(z)} = cz$ au voisinage de $\gamma(t_0)$, pour une certaine constante $c = c(t_0)$, et donc $e^{l(t)} = c(t_0)\gamma(t)$ au voisinage de t_0. Ainsi, la fonction $t \mapsto e^{l(t)}/\gamma(t)$ est localement constante, et donc constante par connexité de J. Si de plus $e^{l(a)} = \gamma(a)$, alors $e^{l(t)} = \gamma(t)$ pour tout $t \in J$. On a donc montré que (1) entraîne (2).

Inversement, supposons (2) vérifiée. Si $t_0 \in J$, on peut trouver une primitive F de dz/z au voisinage de $\gamma(t_0)$ vérifiant $\mathrm{F}(\gamma(t_0)) = l(t_0)$. D'après le lemme 4.1.3, on a $e^{\mathrm{F}(z)} = cz$ au voisinage de $\gamma(t_0)$, pour une certaine constante c, et comme $e^{\mathrm{F}(\gamma(t_0))} = e^{l(t_0)} = \gamma(t_0)$, cette constante vaut 1. Ainsi, $e^{\mathrm{F}(z)} = z$ au voisinage de $\gamma(t_0)$, donc $e^{\mathrm{F}(\gamma(t))} = \gamma(t) = e^{l(t)}$ au voisinage de t_0. Par conséquent $l - \mathrm{F} \circ \gamma$ prend ses valeurs dans $2i\pi\mathbb{Z}$ au voisinage de t_0. Comme de plus l et $\mathrm{F} \circ \gamma$ sont continues et prennent la même valeur en t_0, on a donc $l \equiv \mathrm{F} \circ \gamma$ au voisinage de t_0. Ainsi, l est une primitive de dz/z le long de γ, et bien sûr $l(a)$ est un logarithme de $\gamma(a)$.

Proposition 5.4.2. *On peut toujours trouver des déterminations continues du logarithme le long d'un chemin donné $\gamma : [a\,;b] \to \mathbb{C}^*$. Si l est une telle détermination, alors*

$$\int_\gamma \frac{dz}{z} = l(b) - l(a)\,.$$

Preuve. Cela découle immédiatement du lemme précédent et du théorème 5.2.4.

Corollaire 5.4.3. *Soient $z_0, z_1 \in \mathbb{C}^*$, et soit γ un chemin reliant z_0 à z_1 dans $\mathbb{C}^*$. Si w_0 est un logarithme de z_0, alors $w_0 + \int_\gamma \frac{dz}{z}$ est un logarithme de z_1.*

Corollaire 5.4.4. *Soit $\gamma : [a\,;b] \to \mathbb{C}^*$ un chemin de classe C^1 par morceaux. Si w est un logarithme de $\gamma(a)$, alors l'application l définie par*

$$l(t) = w + \int_a^t \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s)}\, ds$$

est une détermination continue du logarithme le long de γ.

Si $\gamma : [a\,;b] \to \mathbb{C}^*$ est un chemin dans $\mathbb{C}^*$, alors, d'après la proposition précédente, on peut trouver des déterminations continues de l'argument le long de γ. Deux telles déterminations diffèrent d'une constante, donc la différence $\theta(b) - \theta(a)$ est indépendante de la détermination de l'argument θ. Cette différence est appelée la **variation de l'argument le long de** γ.

Proposition 5.4.5. *Soit $\gamma : [a\,;b] \to \mathbb{C}^*$ un chemin dans $\mathbb{C}^*$. En notant* V *la variation de l'argument le long de γ, on a*

$$\int_\gamma \frac{dz}{z} = \log\left|\frac{\gamma(b)}{\gamma(a)}\right| + i\mathrm{V}\,.$$

Preuve. Soit θ une détermination de l'argument le long de γ. L'application l définie par $l(t) = \log|\gamma(t)| + i\theta(t)$ est une détermination continue du logarithme le long de γ, donc $l(b) - l(a) = \int_\gamma \frac{dz}{z}$, d'où le résultat.

Corollaire 5.4.6. *La variation de l'argument le long d'un chemin γ est égale à $\int_\gamma \omega_0$, où $\omega_0 = \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2}$.*

Preuve. Cela découle de la proposition précédente et de l'identité $\frac{dz}{z} = d(\log|z|) + i\omega_0$, dont la vérification est laissée en exercice.

Corollaire 5.4.7. *Si γ_0, γ_1 sont deux chemins homotopes à extrémités fixes dans $\mathbb{C}^*$ ou deux lacets homotopes dans $\mathbb{C}^*$, alors les variations de l'argument le long de γ_0 et de γ_1 sont égales.*

5.4.2. Définition de l'indice ; exemples ; calcul pratique

Définition 5.4.8. *Soit $p \in \mathbb{C}$. Si γ est un lacet dans $\mathbb{C}\backslash\{p\}$, l'***indice de γ par rapport au point** *p est le nombre* $\mathrm{I}(\gamma, p)$ *défini par*

$$\mathrm{I}(\gamma, p) = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{dz}{z-p}\,.$$

La proposition suivante donne une interprétation géométrique de l'indice.

Proposition 5.4.9. *Si γ est un lacet dans $\mathbb{C}$ et si $p \in \mathbb{C}\backslash\mathrm{Im}(\gamma)$, alors la variation de l'argument le long de $\gamma - p$ est égale à $2\pi \mathrm{I}(\gamma, p)$. En particulier, $\mathrm{I}(\gamma, p)$ est un entier.*

Preuve. Par translation il suffit de le voir pour $p = 0$; et dans ce cas le résultat découle directement du corollaire 5.4.5 : en notant V la variation de l'argument le long de γ, on a $2i\pi \mathrm{I}(\gamma, 0) = \log\left|\frac{\gamma(b)}{\gamma(a)}\right| + i\mathrm{V} = i\mathrm{V}$ puisque $\gamma(b) = \gamma(a)$.

L'indice d'un lacet par rapport à un point p s'interprète donc comme le « nombre de tours » que ce lacet effectue autour de p, un tour étant compté positivement s'il est effectué dans le sens trigonométrique, et négativement sinon.

Par exemple, si D est un disque ouvert dans $\mathbb{C}$, on s'attend à trouver $\mathrm{I}(\partial\mathrm{D}, p) = 1$ si $p \in \mathrm{D}$ et $\mathrm{I}(\partial\mathrm{D}, p) = 0$ si $p \notin \overline{\mathrm{D}}$. De fait, cela découle de la formule de Cauchy pour $p \in \mathrm{D}$, et du théorème de Cauchy pour $p \notin \overline{\mathrm{D}}$; plus « élémentairement », on peut aussi appliquer le lemme 3.6.1. De façon plus générale, le théorème de Cauchy et la formule de Cauchy se conjuguent pour donner le résultat suivant.

Exemple 5.4.10. *Soit $\mathrm{K} \subset \mathbb{C}$ un compact à bord régulier ; on suppose que $\partial\mathrm{K}$ est connexe, et on choisit un paramétrage γ de $\partial\mathrm{K}$ positivement orienté relativement à $\mathring{\mathrm{K}}$. Alors $\mathrm{I}(\gamma, p) = 1$ si $p \in \mathring{\mathrm{K}}$ et $\mathrm{I}(\gamma, p) = 0$ si $p \notin \mathrm{K}$.*

La proposition qui va suivre donne une méthode « pratique » facilement utilisable pour le calcul de l'indice. Introduisons d'abord quelques définitions. Si $\mathrm{L} \subset \mathbb{C}$ est une demi-droite d'origine p, on dira qu'un point $z \in \mathbb{C} \setminus \mathrm{L}$ est situé « à gauche » de L si l'angle orienté entre les demi-droites L et $[p\,;z)$ (dans cet ordre) est compris entre 0 et $\pi/2$, et on dira que p est situé « à droite » de L si cet angle est compris entre $-\pi/2$ et 0. On dira qu'un chemin $\gamma : [a\,;b] \to \mathbb{C}$ **traverse** la demi-droite L en un point $c \in]a\,;b[$ si $\gamma(c) \in \mathrm{L}$, $\gamma(c) \neq p$, et s'il existe $\varepsilon > 0$ vérifiant la propriété suivante : $\gamma(t)$ est situé à droite de L pour $t \in]c-\varepsilon\,;c[$ et à gauche de L pour $t \in]c\,;c+\varepsilon[$, ou vice-versa. Dans le premier cas, on dit que γ traverse **positivement** la demi-droite L, et on dit qu'il la traverse **négativement** dans le deuxième cas.

Proposition 5.4.11. *Soit $p \in \mathbb{C}$ et soit γ un chemin dans $\mathbb{C} \setminus \{p\}$. On suppose qu'il existe une demi-droite L d'origine p telle que $\mathrm{E} = \gamma^{-1}(\mathrm{L})$ est fini et que γ traverse L en tout point de E. Notons n^+ le nombre de points de E où γ traverse positivement L, et n^- le nombre de points où γ traverse négativement L. Alors $\mathrm{I}(\gamma, p) = n^+ - n^-$.*

Preuve. Par translation et rotation, on peut supposer $p = 0$ et $L = \mathbb{R}^-$. Notons $[a\,;b]$ l'intervalle de définition de γ et $c_1 < \cdots < c_n$ les points de E. On pose $\varepsilon_i = 1$ ou -1 selon que γ traverse L positivement ou négativement au point c_i.

En notant Arg la détermination principale de l'argument, l'application $t \mapsto \mathrm{Arg}(\gamma(t))$ est continue sur $[a\,;b] \setminus E$, et par définition des ε_i, on a $\lim_{t\to c_i^-} \mathrm{Arg}(\gamma(t)) = \varepsilon_i\pi$ et $\lim_{t\to c_i^+} \mathrm{Arg}(\gamma(t)) = -\varepsilon_i\pi$ pour tout $i \in \{1;\ldots;n\}$. Par conséquent, les variations de l'argument le long de $\gamma_{|[a;c_1]}$ et $\gamma_{|[c_n;b]}$ sont respectivement égales à $\varepsilon_1\pi - \mathrm{Arg}(\gamma(a))$ et $\mathrm{Arg}(\gamma(b)) + \varepsilon_n\pi$, et pour $1 \leqslant i \leqslant n-1$, la variation de l'argument le long de $\gamma_{|[c_i;c_{i+1}]}$ est égale à $(\varepsilon_{i+1} + \varepsilon_i)\pi$. Comme $\gamma(b) = \gamma(a)$, la variation de l'argument le long de γ est donc égale à

$$V = \pi\left(\varepsilon_1 + \varepsilon_n + \sum_1^{n-1}(\varepsilon_{i+1} + \varepsilon_i)\right) = 2\pi\,(n^+ - n^-)\,,$$

d'où le résultat.

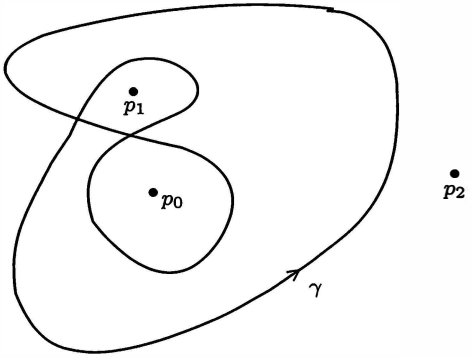


FIG. 33. $\mathrm{I}(\gamma, p_0) = 0$, $\mathrm{I}(\gamma, p_1) = 2$, $\mathrm{I}(\gamma, p_2) = 0$

5.4.3. Formule de Cauchy homotopique

Du théorème de Cauchy homotopique 5.3.6, on déduit le résultat suivant, analogue à la formule de Cauchy.

Théorème 5.4.12. (Formule de Cauchy homotopique.)

Si γ est un lacet homotope dans Ω à un lacet constant et si $a \in \Omega\backslash\mathrm{Im}(\gamma)$, alors, pour toute fonction $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, on a

$$\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f(z)}{z-a}\,dz = \mathrm{I}(\gamma, a) f(a)\,.$$

Preuve. Définissons $g : \Omega \to \mathbb{C}$ par

$$\begin{cases} g(a) = f'(a) \\ g(z) = \dfrac{f(z) - f(a)}{z - a} \quad \text{si } z \neq a \end{cases}$$

La fonction g est holomorphe dans $\Omega\backslash\{a\}$ et continue sur Ω ; elle est donc en fait holomorphe dans Ω d'après le corollaire 4.2.4. D'après le théorème de Cauchy homotopique, on a donc $\int_\gamma g\,dz = 0$, ce qui donne la formule de Cauchy homotopique pour f.

Corollaire 5.4.13. *Si Ω est simplement connexe, alors la formule précédente est valable pour tout lacet dans Ω.*

5.4.4. Propriétés de l'indice

a. Invariance par homotopie

L'indice d'un lacet γ par rapport à un point p étant par définition l'intégrale de la forme fermée $\frac{dz}{z-p}$ sur ce lacet, il est invariant par homotopie. On peut donc énoncer la

Proposition 5.4.14. *Si p est un point de $\mathbb{C}$ et si γ_0, γ_1 sont deux lacets homotopes dans $\mathbb{C}\backslash\{p\}$, alors $\mathrm{I}(\gamma_0, p) = \mathrm{I}(\gamma_1, p)$.*

On en déduit les deux résultats suivants.

Corollaire 5.4.15. *Si Ω est simplement connexe et si $p \notin \Omega$, alors $\mathrm{I}(\gamma, p) = 0$ pour tout lacet γ dans Ω.*

Corollaire 5.4.16. *Si λ, ν sont deux lacets dans $\mathbb{C}^*$ et si*

$$|\lambda(t) - \nu(t)| < |\lambda(t)| + |\nu(t)|$$

pour tout t, alors $\mathrm{I}(\lambda, 0) = \mathrm{I}(\nu, 0)$.

Preuve. Sous cette hypothèse, les deux lacets sont homotopes dans $\mathbb{C}^*$ d'après 5.3.3.

La proposition 5.4.14 admet en fait une réciproque. Avant de l'énoncer, remarquons que l'ensemble $\mathcal{L}(\mathrm{J}, \mathbb{C}^*)$ des lacets dans $\mathbb{C}^*$ paramétrés par J est naturellement muni d'une structure de groupe multiplicatif : si γ_1 et γ_2 sont deux lacets dans $\mathbb{C}^*$, leur produit (noté $\gamma_1\gamma_2$) est le lacet $\gamma \in \mathcal{L}(\mathrm{J}, \mathbb{C}^*)$ défini par $\gamma(t) = \gamma_1(t)\gamma_2(t)$.

Proposition 5.4.17. *L'application $\gamma \mapsto \mathrm{I}(\gamma, 0)$ est un homomorphisme surjectif de $\mathcal{L}(\mathrm{J}, \mathbb{C}^*)$ sur $\mathbb{Z}$, dont le noyau est exactement l'ensemble des lacets homotopes à un lacet constant.*

Preuve. Notons I l'application $\gamma \mapsto \mathrm{I}(\gamma, 0)$.

En désignant par **1** le lacet constant $t \mapsto 1$, on a $\mathrm{I}(\mathbf{1}) = 0$. D'autre part, si γ_1, γ_2 sont deux lacets dans $\mathbb{C}^*$ paramétrés par $\mathrm{J} = [a\,;b]$ et si l_i est une détermination continue du logarithme le long de γ_i, $(i = 1, 2)$ alors $l_1 + l_2$ est une détermination continue du logarithme le long de $\gamma_1\gamma_2$. On a donc

$$\mathrm{I}(\gamma_1\gamma_2) = (l_1 + l_2)(b) - (l_1 + l_2)(a) = \mathrm{I}(\gamma_1) + \mathrm{I}(\gamma_2)\,.$$

Ainsi, l'application I est un homomorphisme de groupes. Cet homomorphisme est surjectif car si on note γ le lacet défini par $\gamma(t) = e^{2i\pi t/(b-a)}$, alors $\mathrm{I}(\gamma) = 1$.

D'après la proposition 5.4.14, les lacets homotopes à des lacets constantes sont dans le noyau de I. Inversement, soit $\gamma \in \mathrm{Ker}(\mathrm{I})$, et soit l une détermination continue du logarithme le long de γ. Par hypothèse, on a $l(b) - l(a) = \mathrm{I}(\gamma) = 0$, donc $l(b) = l(a)$. Si on pose $\mathrm{H}(s,t) = e^{sl(a)+(1-s)l(t)}$, on obtient donc une homotopie dans $\mathbb{C}^*$ entre γ et le lacet constant $t \mapsto \gamma(a)$.

Corollaire 5.4.18. *Si $p \in \mathbb{C}$ et si γ_0, γ_1 sont deux lacets dans $\mathbb{C}\backslash\{p\}$ tels que $\mathrm{I}(\gamma_0, p) = \mathrm{I}(\gamma_1, p)$ alors γ_0 et γ_1 sont homotopes dans $\mathbb{C}\backslash\{p\}$.*

Preuve. Si $\mathrm{I}(\gamma_0, p) = \mathrm{I}(\gamma_1, p)$, alors, d'après la proposition, le lacet $\gamma = \frac{\gamma_0 - p}{\gamma_1 - p}$ est homotope dans $\mathbb{C}^*$ à un lacet constant, donc homotope au lacet constant **1** car $\mathbb{C}^*$ est connexe par arcs. Si H est une homotopie dans $\mathbb{C}^*$ entre γ et le lacet **1**, alors l'application $(s,t) \mapsto p + (\gamma_1(t) - p)\,\mathrm{H}(s,t)$ est une homotopie dans $\mathbb{C} \setminus \{p\}$ entre γ_0 et γ_1.

b. Dépendance par rapport au point p

Rappelons d'abord un résultat élémentaire de topologie.

Lemme 5.4.19. *Si K est un compact de $\mathbb{C}$, alors $\mathbb{C}\backslash\mathrm{K}$ possède exactement une composante connexe non bornée.*

Preuve. Si D est un disque contenant K alors $\mathrm{A} = \mathbb{C}\backslash\mathrm{D}$ est connexe, et est donc contenu dans une composante connexe de $\mathbb{C}\backslash\mathrm{K}$, évidemment non bornée. Quant aux autres composantes connexes de $\mathbb{C}\backslash\mathrm{K}$, elles sont contenues dans $\mathbb{C}\backslash\mathrm{A} = \mathrm{D}$, et sont donc toutes bornées.

Proposition 5.4.20. *Le lacet γ étant fixé, l'application $p \mapsto \mathrm{I}(\gamma, p)$ est constante dans chaque composante connexe de $\mathbb{C}\backslash\mathrm{Im}(\gamma)$. De plus, on a $\mathrm{I}(\gamma, p) = 0$ dans la composante connexe non bornée de $\mathbb{C}\backslash\mathrm{Im}(\gamma)$.*

Preuve. Soit $p_0 \in \mathbb{C}\backslash\mathrm{Im}(\gamma)$. Si $p \in \mathbb{C}\backslash\mathrm{Im}(\gamma)$ vérifie

$$|p - p_0| < \inf_{\mathrm{J}} |\gamma(t) - p_0|\,,$$

alors les lacets $\gamma - p$ et $\gamma - p_0$ sont homotopes dans $\mathbb{C}^*$ d'après 5.3.3, donc $\mathrm{I}(\gamma - p, 0) = \mathrm{I}(\gamma - p_0, 0)$, autrement dit $\mathrm{I}(\gamma, p) = \mathrm{I}(\gamma, p_0)$. Ainsi, l'application $p \mapsto \mathrm{I}(\gamma, p)$ est localement constante, ce qui prouve la première assertion.

Soit D un disque ouvert contenant $\mathrm{Im}(\gamma)$, et choisissons un point p en dehors de D. Comme D est simplement connexe, on a $\mathrm{I}(\gamma, p) = 0$ d'après le corollaire 5.4.15 ; et comme p appartient à la composante connexe non bornée de $\mathbb{C}\backslash\mathrm{Im}(\gamma)$, l'indice est identiquement nul dans la dite composante puisqu'il y est constant.

Corollaire 5.4.21. *Soit* F *un fermé connexe de* $\mathbb{C}$.

a) *Si* F *est non borné, alors, pour tout point* $p \in \mathrm{F}$, *il existe une détermination holomorphe de* $\log(z - p)$ *dans* $\mathbb{C}\backslash\mathrm{F}$.

b) *Si* p *et* q *sont deux points de* F, *alors il existe une détermination holomorphe de* $\log\left(\frac{z-p}{z-q}\right)$ *dans* $\mathbb{C}\backslash\mathrm{F}$.

Preuve. Si F est non borné et si $p \in \mathrm{F}$, alors, pour tout lacet γ dans $\mathbb{C}\backslash\mathrm{F}$, le point p est dans la composante connexe non bornée de $\mathbb{C}\backslash\mathrm{Im}(\gamma)$. On a donc $\mathrm{I}(\gamma, p) = 0$ pour tout lacet γ dans $\mathbb{C}\backslash\mathrm{F}$, et par conséquent, la forme $\frac{dz}{z-p}$ est exacte sur $\mathbb{C}\backslash\mathrm{F}$. D'après 4.1.4, cela prouve **a**.

Pour démontrer **b**, posons $f(z) = \frac{z-p}{z-q}$. La fonction f est holomorphe dans $\mathbb{C}\backslash\mathrm{F}$, ne s'y annule pas, et on a $\frac{df}{f} = \frac{dz}{z-p} - \frac{dz}{z-q}$. Comme F est connexe, on a $\mathrm{I}(\gamma, p) = \mathrm{I}(\gamma, q)$ pour tout lacet γ dans $\mathbb{C}\backslash\mathrm{F}$, et on en déduit comme plus haut que $\frac{df}{f}$ est exacte sur $\mathbb{C}\backslash\mathrm{F}$, ce qui donne **b**.

5.4.5. Indice et logarithmes continus

On a vu au chapitre 4 qu'une fonction holomorphe $f : \Omega \to \mathbb{C}^*$ admet un logarithme holomorphe si et seulement si la forme $\frac{df}{f}$ est exacte ; et d'après 2.1.7, il revient au même de dire qu'on a $\int_\gamma \frac{df}{f} = 0$ pour tout lacet γ dans Ω de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux.

Comme $\int_\gamma \frac{df}{f} = \int \gamma^*(\frac{df}{f})$ et $\gamma^*(\frac{df}{f}) = \gamma^* f^*(\frac{dz}{z}) = (f \circ \gamma)^*(\frac{dz}{z})$, on a $\int_\gamma \frac{df}{f} = \int_{f\circ\gamma} \frac{dz}{z} = \mathrm{I}(\gamma, 0)$. Par conséquent, f admet un logarithme holomorphe si et seulement si

$$\mathrm{I}(f \circ \gamma, 0) = 0$$

pour tout lacet γ dans Ω de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux. Ainsi, l'existence d'un logarithme holomorphe pour f peut se formuler via l'indice par une condition ne faisant plus intervenir la dérivée de f. Dans cette section, on va démontrer un résultat analogue pour des fonctions seulement supposées continues et définies sur des espaces topologiques relativement généraux.

Commençons par une remarque très simple.

Remarque 5.4.22. *Soit* X *un espace topologique. Si* $f : X \to \mathbb{C}^*$ *admet un logarithme continu, alors* $I(f \circ \gamma, 0) = 0$ *pour tout lacet* γ *dans* X.

Preuve. Si g est un logarithme continu de f et si $\gamma : [a\,;b] \to X$ est un lacet, alors $g \circ \gamma$ est une détermination continue du logarithme le long de $f \circ \gamma$, donc $I(f \circ \gamma, 0) = g(\gamma(b)) - g(\gamma(a)) = 0$.

Rappelons maintenant qu'un espace topologique X est dit **localement connexe par arcs** si tout point de X possède une base de voisinage formée d'ensembles connexes par arcs. Par exemple, $[0\,;1]$ et $\mathbb{T}$ sont localement connexes par arcs, de même que tout ouvert de $\mathbb{R}^n$. Rappelons aussi que si X est localement connexe par arcs, alors ses composantes connexes sont ouvertes, connexes par arcs et localement connexes par arcs.

Proposition 5.4.23. *Soit* X *un espace topologique localement connexe par arcs. Pour une application continue* $f : X \to \mathbb{C}^*$*, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(1) f *admet un logarithme continu ;*

(2) $I(f \circ \gamma, 0) = 0$ *pour tout lacet* γ *dans* X.

Preuve. D'après la remarque 5.4.22, il reste à montrer que (2) entraîne (1) ; supposons donc (2) vérifiée. Comme les composantes connexes de X sont ouvertes, il suffit de montrer que f admet un logarithme continu dans chacune de ces composantes. On se ramène ainsi au cas où X est connexe, donc en fait connexe par arcs.

Fixons un point $p \in X$. Si x est un point quelconque de X, alors, d'après (2), la valeur de l'intégrale $\int_{f\circ\gamma} \frac{dz}{z}$ est indépendante du chemin joignant p à x dans W. On peut donc définir une application $g : X \to \mathbb{C}$ en posant $g(x) = w + \int_{f\circ\gamma_x} \frac{dz}{z}$, où w est un logarithme de $f(p)$ et γ_x est n'importe quel chemin joignant p à x dans X. D'après le corollaire 5.4.3, la fonction g est un logarithme de f. Il s'agit donc de vérifier que g est continue.

Fixons $x_0 \in X$ et $\varepsilon > 0$. L'application $\lambda \mapsto \int_\lambda \frac{dz}{z}$ étant continue sur $\mathcal{C}(J, \mathbb{C}^*)$ (voir l'exercice 5.2), on peut trouver $\delta > 0$ tel que $|\int_\lambda \frac{dz}{z}| < \varepsilon$ pour tout chemin $\lambda : J \to \mathbb{C}^*$ à distance inférieure à δ du chemin constant $t \mapsto f(x_0)$. D'autre part, la continuité de f permet de choisir un voisinage V de x_0 tel que $|f(v) - f(x_0)| < \delta$ pour tout $v \in V$, et comme X est localement connexe par arcs, on peut supposer V connexe par arcs. Si maintenant x est un point quelconque de V et si ν_x un chemin joignant x_0 à x dans V, alors $g(x) - g(x_0) = \int_{f\circ\nu_x} \frac{dz}{z}$, et donc $|g(x) - g(x_0)| < \varepsilon$ car le chemin $f \circ \nu_x$ est à distance inférieure à δ du chemin constant $t \mapsto f(x_0)$.

Corollaire 5.4.24. *Si $\Omega \subset \mathbb{C}$ est un ouvert simplement connexe, alors toute fonction continue $f : \Omega \to \mathbb{C}^*$ admet un logarithme continu.*

Preuve. Tout ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$ est localement connexe par arcs. Si de plus Ω est simplement connexe, alors tout lacet de la forme $f \circ \gamma$ est homotope dans $\mathbb{C}^*$ à un lacet constant, et vérifie donc $\mathrm{I}(f \circ \gamma, 0) = 0$.

Corollaire 5.4.25. *Si* A *est une partie convexe d'un espace vectoriel normé, alors toute application continue $f : \mathrm{A} \to \mathbb{C}^*$ admet un logarithme continu.*

Preuve. Pour tout point $a \in \mathrm{A}$, les ensembles $\mathrm{B}(a, r) \cap \mathrm{A}$ sont convexes et forment une base de voisinages de a dans A, donc A est localement connexe par arcs. D'autre part, tout lacet γ dans A est homotope dans A à un lacet constant : il suffit de poser $\mathrm{H}(s, t) = s\gamma(t) + (1-s)a_0$, où a_0 est un point de A fixé. On peut donc appliquer la proposition précédente.

Exercices

5.1. Soit γ un chemin dans Ω, et soit ω une 1-forme fermée sur Ω. Peut-on trouver un ouvert V contenant $\mathrm{Im}(\gamma)$ tel que ω soit exacte sur V ?

5.2. Dans tout l'exercice, ω est une 1-forme fermée sur Ω, et on note $\mathcal{C}(\mathrm{J}, \Omega)$ l'ensemble des chemins $\gamma : \mathrm{J} \to \Omega$ muni de la topologie de la convergence uniforme.

1) Soit $\gamma_0 \in \mathcal{C}(\mathrm{J}, \Omega)$, et soit $r_0 = d(\mathrm{Im}(\gamma_0), \partial\Omega)$.

a) Montrer que si $\gamma \in \mathcal{C}(\mathrm{J}, \Omega)$ vérifie $\|\gamma - \gamma_0\|_\infty < r_0$, alors on définit une application continue $\mathrm{H}_\gamma : [0\,;1] \times \mathrm{J} \to \Omega$ en posant $\mathrm{H}_\gamma(s\,, t) = (1-s)\gamma(t) + s\gamma_0(t)$. En déduire que pour un tel γ, on a

$$\int_\gamma \omega - \int_{\gamma_0} \omega = \int_{[\gamma(a);\gamma_0(a)]} \omega + \int_{[\gamma_0(b);\gamma(b)]} \omega\,.$$

b) En utilisant *a*), montrer qu'il existe une constante C telle que

$$\left| \int_\gamma \omega - \int_{\gamma_0} \omega \right| \leqslant \mathrm{C}\, \|\gamma - \gamma_0\|_\infty$$

pour tout $\gamma \in \mathcal{C}(\mathrm{J}, \Omega)$ vérifiant $\|\gamma - \gamma_0\|_\infty \leqslant r_0/2$.

2) Conclure que l'application $\gamma \mapsto \int_\gamma \omega$ est continue sur $\mathcal{C}(\mathrm{J}, \Omega)$.

5.3. Montrer que tout lacet dans $\mathbb{C}^*$ est homotope dans $\mathbb{C}^*$ à un lacet dont l'image est contenue dans le cercle unité $\mathbb{T}$.

5.4. Montrer que tout lacet dans Ω est homotope dans Ω à un lacet de classe $\mathcal{C}^\infty$.

5.5. On note $\mathcal{L}(J,\Omega)$ l'ensemble des lacets $\gamma : J \to \Omega$; et pour $p, q \in \Omega$, on note $\mathcal{C}_{pq}(J,\Omega)$ l'ensemble des chemins $\gamma : J \to \Omega$ de point initial p et de point terminal q. On munit $\mathcal{L}(J,\Omega)$ et $\mathcal{C}_{pq}(J,\Omega)$ de la topologie de la convergence uniforme.

1) Montrer que $\mathcal{L}(J,\Omega)$ et $\mathcal{C}_{pq}(J,\Omega)$ sont localement connexes par arcs.

2) Montrer que deux lacets γ_0, γ_1 sont homotopes dans Ω si et seulement si ils sont dans la même composante connexe de $\mathcal{L}(J,\Omega)$, et que deux chemins de p vers q sont homotopes avec extrémités fixes dans Ω si et seulement si ils sont dans la même composante connexe de $\mathcal{C}_{pq}(J,\Omega)$.

5.6. Soient $\gamma, \lambda : [0;1] \to \mathbb{C}$ deux chemins homotopes avec extrémités fixes dans Ω. On définit $\gamma \cdot \lambda^- : [0;1] \to \Omega$ par

$$\begin{cases} \gamma \cdot \lambda^-(t) = \gamma(2t) & \text{si } t \leqslant 1/2 \\ \gamma \cdot \lambda^-(t) = \lambda(1-2t) & \text{si } t \geqslant 1/2 \end{cases}$$

Montrer que $\gamma \cdot \lambda^-$ est homotope dans Ω à un lacet constant.

5.7. Soit ω une 1-forme classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{C}^*$. On suppose que ω est fermée et vérifie de plus $\lim_{z\to 0} |z|\,\omega(z) = 0$. Montrer que ω est exacte. On pourra utiliser l'exercice 2.8 et raisonner par homotopie.

5.8. Soient ω et ω_0 les 1-formes définies sur $\mathbb{C}^*$ par

$$\omega = \frac{e^x}{x^2+y^2}\left[(x\cos y + y\sin y)\,dy + (x\sin y - y\cos y)\,dx\right]$$

et

$$\omega_0 = \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2}\,.$$

1) Montrer qu'on a $\omega = e^x \cos y\,\omega_0 + e^x \sin y\, d(\log r)$, où $r = \sqrt{x^2+y^2}$.

2) Montrer que ω est fermée sur $\mathbb{C}^*$.

3) Montrer que $\omega - \omega_0$ est exacte.

5.9. On note $\mathbf{S}^2$ la sphère unité euclidienne de $\mathbb{R}^3$.

1) Montrer que si $\gamma : [a;b] \to \mathbf{S}^2$ est un chemin lipschitzien, alors $\mathrm{Im}(\gamma)$ est négligeable pour la mesure de surface sur $\mathbf{S}^2$.

2) Observer que si $p \in \mathbf{S}^2$, alors $\mathbf{S}^2 \backslash \{p\}$ est homéomorphe à $\mathbb{C}$. En déduire que si $\gamma : [a;b] \to \mathbf{S}^2$ est un lacet non surjectif, alors γ est homotope dans $\mathbf{S}^2$ à un lacet constant.

3) En utilisant 1) et 2), montrer que tout lacet dans $\mathbf{S}^2$ est homotope à un lacet constant.

5.10. Montrer que $\mathbb{C}$ et $\mathbb{C}^*$ ne sont pas homéomorphes.

5.11. Les ouverts $\mathbb{C}\backslash[-1;1]$ et $D(0,1) \cup D(1,1/2)$ sont-ils simplement connexes ?

5.12. Pour $t \in [0;1]$, on choisit $r_t > 0$. L'ouvert $\Omega = \bigcup_t D(t, r_t)$ est-il simplement connexe ?

5.13. Montrer que si Ω est simplement connexe, alors deux chemins dans Ω ayant même point initial et même point terminal sont toujours homotopes avec extrémités fixes dans Ω.

5.14. On suppose Ω simplement connexe. Montrer que si $g \in \mathcal{H}(\Omega)$, alors on peut trouver une fonction holomorphe $f : \Omega \to \mathbb{C}^*$ vérifiant $f'/f = g$. On pourra chercher f sous la forme e^h.

5.15. Soient $a_0, \dots, a_N \in \mathbb{C}$ non tous nuls. Montrer que si Ω est simplement connexe, alors, pour toute fonction $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, l'équation différentielle $\sum_0^N a_k g^{(k)} = f$ admet une solution $g \in \mathcal{H}(\Omega)$.

5.16. Soit $\gamma : [a\,;b] \to \mathbb{C}^*$ de classe $\mathcal{C}^1$, et soit w un logarithme de $\gamma(a)$. En considérant $\varphi(t) = \gamma(t) \exp\left(-\int_a^t \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s)}\, ds\right)$, montrer directement que l'application $t \mapsto w + \int_a^t \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s)}\, ds$ est une détermination continue du logarithme le long de γ.

5.17. Soit $\gamma : [a\,;b] \to \mathbb{C}^*$ de classe $\mathcal{C}^1$. Donner une formule intégrale définissant une détermination continue de l'argument le long de γ.

5.18. (Relèvement des chemins.)

Soient X, Y deux espace topologiques séparés, et soit $p : Y \to X$ une surjection continue. On suppose que p est un **revêtement**, ce qui signifie que tout point $x \in X$ admet un voisinage ouvert U tel que $p^{-1}(U)$ s'écrive $\bigcup_i V_i$, où les V_i sont des ouverts de Y deux à deux disjoints et la restriction de p à chaque V_i est un homéomorphisme de V_i sur U.

1) Montrer que tout chemin γ dans X admet un « relèvement » continu dans Y, c'est à dire un chemin $\tilde{\gamma}$ dans Y tel que $p \circ \tilde{\gamma} = \gamma$. Plus précisément, montrer que si $\gamma : [a\,;b] \to X$ est un chemin dans X et si on choisit $y \in Y$ tel que $p(y) = \gamma(a)$, alors γ admet un relèvement vérifiant $\tilde{\gamma}(a) = y$.

2) Peut on toujours relever un lacet en un lacet ?

3) *a*) Soit $\gamma : [a\,;b] \to X$ un chemin dans X. Montrer que si $\tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2$ sont deux relèvements de γ, alors l'ensemble $\{t \in [a\,;b];\ \tilde{\gamma}_1(t) = \tilde{\gamma}_2(t)\}$ est ouvert et fermé dans $[a\,;b]$.

b) En déduire que si $\gamma : [a\,;b] \to X$ est un chemin dans X et si on choisit $y \in Y$ tel que $p(y) = \gamma(a)$, alors γ admet un *unique* relèvement vérifiant $\tilde{\gamma}(a) = y$.

5.19. (Principe de monodromie.)

On conserve les hypothèses et la terminologie de l'exercice précédent.

1) Montrer que toute application continue $H : [0\,;1] \times [a\,;b] \to X$ admet un relèvement continu $\tilde{H} : [0\,;1] \times [a\,;b] \to Y$, et que si $y \in Y$ vérifie $p(y) = H(0\,, a)$, alors on peut imposer $\tilde{H}(0\,, a) = y$.

2) Soient $\gamma_0\,, \gamma_1 : [a\,;b] \to X$ deux chemins homotopes avec extrémités fixes dans X. On note x le point initial de γ_0 et γ_1, on choisit $y \in Y$ tel que $p(y) = x$, et on note $\tilde{\gamma}_i$ le relèvement de γ_i de point initial y. En utilisant 1) et en s'inspirant de la question 3) de l'exercice précédent, montrer que $\tilde{\gamma}_0$ et $\tilde{\gamma}_1$ ont le même point terminal.

5.20. Montrer que $X = \mathbb{C}^*$, $Y = \mathbb{C}$ et $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$ définie par $p(z) = e^z$ sont redevables des deux exercices précédents. Quels résultats retrouve-t-on ainsi ?

5.21. Soit γ la « concaténation » des 7 segments $[1\,;1+i]$, $[1+i\,;-1+i]$, $[-1+i\,;-1-2i]$, $[-1-2i\,;2-2i]$, $[2-2i\,;2+2i]$, $[2+2i\,;-3+2i]$, $[-3+2i\,;-3]$. Quelle est la variation de l'argument le long de γ ?

5.22. Soit $R = abcd$ un rectangle de $\mathbb{C}$, et soient γ_1, γ_2 deux chemins dans R, l'un joignant a à c, l'autre joignant b à d. Le but de l'exercice est de montrer que $\mathrm{Im}(\gamma_1)$ et $\mathrm{Im}(\gamma_2)$ ont au moins un point en commun.

0) Montrer qu'on peut supposer que γ_1 ne passe ni par b ni par d, et que γ_2 ne passe ni par a ni par c ; c'est ce que l'on fait dans la suite.

1) On suppose que les sommets de R sont énumérés dans le sens trigonométrique. En raisonnant par homotopie, montrer que la variation de l'argument le long de chacun des chemins $b-\gamma_1$, γ_2-c, $d-\gamma_1^-$, $\gamma_2^- - a$ est égale à $-\pi/2$, où on a noté γ_i^- le chemin « inverse » de γ_i.

2) Soit Q un rectangle de $\mathbb{R}^2$, et soit $H : Q \to \mathbb{C}^*$ continue. On pose $\partial H = H \circ \partial Q$. Rappeler pourquoi la variation de l'argument le long de ∂H est nulle.

3) En considérant l'application H définie par $H(t,s) = \gamma_1(t) - \gamma_2(s)$ et en raisonnant par l'absurde, déduire de 1) et 2) que $\mathrm{Im}(\gamma_1)$ et $\mathrm{Im}(\gamma_2)$ ont un point commun.

5.23. Soit $f : \Omega \to \mathbb{C}^*$ de classe $\mathcal{C}^1$; d'après l'exercice 2.20, la 1-forme $\frac{df}{f}$ est fermée. Montrer que si γ est un lacet dans Ω, alors

$$\mathrm{I}(f \circ \gamma, 0) = \int_\gamma \frac{df}{f} \cdot$$

5.24. Pour $t \in [0\,;1]$, on pose $\gamma(t) = [1 + t(1-t)]\, e^{4i\pi t}$.

1) Vérifier que γ est un lacet dans $\mathbb{C}^*$, et effectuer le calcul de $\mathrm{I}(\gamma, 0)$.

2) Dessiner $\mathrm{Im}(\gamma)$ et retrouver sans calcul la valeur de $\mathrm{I}(\gamma, 0)$.

5.25. Soit $\gamma : [0\,;1] \to \mathbb{C}$ défini par

$$\gamma(t) = \begin{cases} 1 + i(8t-1) & \text{si} \quad 0 \leqslant t \leqslant 1/4 \\ 3 - 8t + i & \text{si} \quad 1/4 \leqslant t \leqslant 1/2 \\ -1 + i(5-8t) & \text{si} \quad 1/2 \leqslant t \leqslant 3/4 \\ 8t - 7 - i & \text{si} \quad 3/4 \leqslant t \leqslant 1 \end{cases}$$

1) Vérifier que γ est un lacet dans $\mathbb{C}^*$, et effectuer le calcul de $\mathrm{I}(\gamma, 0)$.

2) Retrouver sans calcul la valeur de $\mathrm{I}(\gamma, 0)$.

5.26. Soient a et b deux réels strictement positifs.

1) Déterminer $\mathrm{I}(\gamma, 0)$, où γ est le lacet défini sur $[0\,;2\pi]$ par

$$\gamma(t) = a\cos t + i\, b \sin t\ .$$

2) En déduire la valeur de l'intégrale $J = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{a^2\cos^2 t + b^2 \sin^2 t}$.

5.27. Lorsque V est un rectangle, un triangle ou un disque ouvert, effectuer le calcul de $I(\partial V, a)$ pour $a \in \mathbb{C}\backslash\partial V$.

5.28. Calculer $I(\gamma, 0)$ lorsque γ est le lacet suivant.

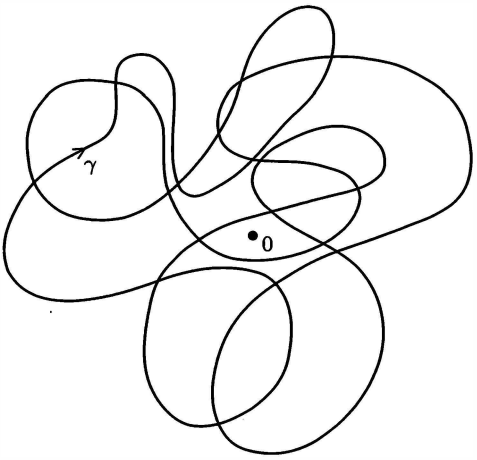


FIG. 34.

5.29. (Théorème de Jordan pour un polygone.)

Soit $\Gamma \subset \mathbb{C}$ une courbe de Jordan fermée polygonale, c'est-à-dire l'image d'un lacet de Jordan γ affine par morceaux. Le but de l'exercice est de montrer que $\mathbb{C}\backslash\Gamma$ a exactement deux composantes connexes, et que si a est dans la composante connexe bornée de $\mathbb{C}\backslash\Gamma$, alors $I(\gamma, a) = \pm 1$.

1) Montrer que la famille des composantes connexes de $\mathbb{C}\backslash\Gamma$ est au plus dénombrable ; on la notera $(V_n)_{0 \leqslant n < N}$, où $N \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$.

2) *a*) Observer que tout point $z \in \Gamma$ possède un voisinage V tel que $V \cap (\mathbb{C}\backslash\Gamma)$ admet exactement 2 composantes connexes. En déduire qu'un point de Γ est adhérent à au plus deux des V_n, et que si on pose $m(z) = \min\{n;\ z \in \overline{V}_n\}$ et $M(z) = \max\{n;\ z \in \overline{V}_n\}$, alors les deux applications m et M sont continues sur Γ.

b) Montrer que $\mathbb{C}\backslash\Gamma$ a au plus deux composantes connexes.

3) Soit L un côté de Γ. Pour $\varepsilon > 0$, on note T_ε^1 et T_ε^2 les deux triangles isocèles de hauteur ε construits sur L.

a) Montrer que si ε est assez petit, alors T_ε^1 et T_ε^2 ne rencontrent Γ que par leur côté commun L.

b) Soit ε comme dans *a*). On note γ^1, γ^2 les deux lacets de Jordan obtenus à partir de γ en remplaçant L par les deux autres côtés de $T_\varepsilon^1, T_\varepsilon^2$ respectivement. On choisit également un point p^1 intérieur à T_ε^1, et un point p^2 intérieur à T_ε^2. Montrer qu'on a $I(\gamma^1, p^2) = I(\gamma, p^2)$ et $I(\gamma^2, p^1) = I(\gamma, p^1)$; en déduire qu'on a $I(\gamma, p^1) - I(\gamma, p^2) = \pm 1$.

4) Conclure.

5.30. Soit γ un lacet régulier de classe $\mathcal{C}^1$, d'image $\Gamma \subset \mathbb{C}$.

1) Soit $\zeta_0 = \gamma(t_0) \in \Gamma$; on suppose que ζ_0 n'est pas un point double de γ.

a) Montrer qu'on peut trouver un voisinage W de ζ_0 et un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme φ d'un rectangle ouvert $U =]-\alpha;\alpha[\times]t_0-\varepsilon;t_0+\varepsilon[$ sur W tel que $\varphi(\{0\}\times]t_0-\varepsilon;t_0+\varepsilon[) = U\cap\Gamma$ et $\varphi(0,t)\equiv\gamma(t)$.

b) Soient $p_1, p_2 \in \mathbb{C}\backslash\Gamma$. On suppose que ζ_0 appartient à $]p_1;p_2[$, que le segment $[p_1;p_2]$ ne rencontre Γ qu'en ζ_0, et que la tangente à Γ en ζ_0 n'est pas parallèle à $[p_1;p_2]$. En utilisant *a*) et en s'inspirant de l'exercice précédent, montrer qu'on a $I(\gamma,p_1) = 1 + I(\gamma,p_2)$ si le couple de vecteurs $(p_2-p_1, \gamma'(t_0))$ est positivement orienté, et $I(\gamma,p_1) = -1 + I(\gamma,p_2)$ dans le cas contraire.

2) Soit $p \in \mathbb{C}\backslash\Gamma$. Déduire de 1) une autre preuve de la proposition 5.4.11 en supposant qu'il existe une demi-droite L d'origine p qui rencontre Γ en un nombre fini de points, toujours **transversalement** – ce qui signifie que les tangentes à Γ aux points considérés ne sont pas parallèles à L – les points en question n'étant pas des points doubles de γ.

5.31. (Indice d'un champ de vecteurs.)

Soit $F : \Omega \to \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose que F n'a qu'un nombre fini de zéros.

1) *a*) Montrer que si $a \in \Omega$, alors $I(F\circ\partial D(a,r),0)$ est bien défini et indépendant de r si r est suffisamment petit. Le nombre ainsi obtenu s'appelle l'**indice** de F au point a, et se note $I_a(F)$.

b) Montrer qu'on a $I_a(F) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\partial D(a,r)} \frac{dF}{F}$ pour tout r assez petit.

2) Montrer que si a n'est pas un zéro de F, alors $I_a(F) = 0$.

3) On dit qu'un point $a \in F^{-1}(0)$ est un zéro **simple** de F si $dF(a)$ est inversible en tant qu'application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$. On dit que a est un zéro **positif** si le Jacobien $J_F(a)$ est strictement positif, et que a est un zéro **négatif** si $J_F(a) < 0$.

a) Montrer que si a est un zéro simple de F, alors $I_a(F) = 1$ si a est un zéro positif, et $I_a(F) = -1$ si a est un zéro négatif. On pourra commencer par le cas où F est la restriction à Ω d'une application affine.

b) Soit $\overline{D}$ un disque fermé contenu dans Ω. On suppose que F est de classe $\mathcal{C}^2$, n'a pas de zéros sur ∂D et n'a que des zéros simples dans D. En appliquant la formule de Stokes dans un disque à trous convenable, déduire de *a*) qu'on a

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{\partial D}\frac{dF}{F} = P - N$$

où P est le nombre de zéros positifs de F dans D, et N le nombre de zéros négatifs.

c) Montrer que la formule du *b*) est encore valable si F est seulement supposée de classe $\mathcal{C}^1$. On pourra se reporter aux exercices 2.20 et 2.33.

5.32. Pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$, trouver $F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^1$ ne s'annulant qu'en 0 et vérifiant $I_0(F) = n$ (voir l'exercice précédent).

5.33. Soit $\omega = \dfrac{2(x^2-y^2-1)\,dy - 4xy\,dx}{(x^2+y^2-1)^2+4y^2}$. En appliquant l'exercice 5.31 à la fonction F définie par $F(x,y) = x^2+y^2-1+2iy$, calculer les intégrales $\int_{\partial D_1}\omega$ et $\int_{\partial D_2}\omega$, où $D_1 = D(1,1/2)$ et $D_2 = D(-1,1/2)$.

5.34. Soit $u : \Omega \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$. On suppose que u n'a qu'un nombre fini de points critiques, et on considère $F = \nabla u$ comme une application à valeurs dans $\mathbb{C}$.

1) Avec les notations de l'exercice 5.31, montrer que si a est un point critique non dégénéré de u, alors $I_a(F) = 1$ si a est un maximum local ou un minimum local de u, et $I_a(F) = -1$ si a est un point-selle.

2) Soit $\overline{D}$ un disque fermé contenu dans Ω On suppose que u n'a pas de points critiques sur ∂D, et que tous les points critiques de u dans D sont non dégénérés. On note M le nombre de maxima locaux de u dans D, m le nombre de minima locaux, et σ le nombre de points-selles. Montrer qu'on a

$$M + m = 1 + \sigma\ .$$

Interpréter cette formule en termes de sommets, de vallées et de cols.

5.35. Soit $g \in \mathcal{H}(\Omega)$. Le but de l'exercice est de montrer l'équivalence des deux propriétés suivantes :

(i) il existe une fonction holomorphe $f : \Omega \to \mathbb{C}^*$ telle que $\frac{f'}{f} = g$;

(ii) pour tout lacet γ dans Ω, l'intégrale $\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz$ est un multiple entier de $2i\pi$.

1) Montrer que (i) entraîne (ii).

2) On suppose (ii) vérifiée.

a) Observer que pour montrer (i), on peut supposer Ω connexe ; c'est ce qu'on fait dans la suite.

b) Montrer que si z_1 et z_2 sont deux points de Ω, alors le nombre $\exp\left(\int_\gamma g(\zeta)\,d\zeta\right)$ est indépendant du chemin γ joignant z_1 à z_2 dans Ω.

c) Soit $z_0 \in \Omega$, et soit $\zeta_0 \in \mathbb{C}$. Montrer qu'il existe une unique fonction holomorphe $f : \Omega \to \mathbb{C}^*$ vérifiant $\frac{f'}{f} = g$ et $f(z_0) = \zeta_0$, donnée par la formule

$$f(z) = \zeta_0 \exp\left(\int_{\gamma_z} g(\zeta)\,d\zeta\right)\ ,$$

où γ_z est n'importe quel chemin joignant z_0 à z dans Ω.

5.36. On suppose Ω simplement connexe, et on fixe un point $z_0 \in \Omega$. Soit également $f : \Omega \to \mathbb{C}^*$ holomorphe.

1) Montrer que la fonction $z \mapsto f(z)/f(z_0)$ admet un unique argument $\mathcal{C}^\infty$ valant 0 en z_0 ; on note V_f cet argument $\mathcal{C}^\infty$.

2) Montrer que pour tout point $z \in \Omega$, $V_f(z)$ est la variation de l'argument le long de $f \circ \gamma_z$, où γ_z est n'importe quel chemin joignant z_0 à z dans Ω.

5.37. On suppose Ω simplement connexe. Soient $z_0 \in \Omega$ et $n \in \mathbb{N}^*$; soit également $f : \Omega \to \mathbb{C}^*$ holomorphe, et soit ζ_0 une racine n-ième de $f(z_0)$.

1) Montrer que f admet une unique racine n-ième continue prenant la valeur ζ_0 en z_0, et que cette racine n-ième est en fait holomorphe ; on la note $f^{1/n}$.

2) Avec les notations de l'exercice précédent, montrer que $f^{1/n}$ est donnée par la formule

$$f^{1/n}(z) = \frac{\zeta_0}{|\zeta_0|}\,|f(z)|^{1/n} \exp\left(i\,\frac{V_f(z)}{n}\right) .$$

5.38. Soit $\Omega = \mathbb{C}\backslash A$, où A est la réunion des 4 demi-droites $-2+i\mathbb{R}^-$, $-1+i\mathbb{R}^-$, $1+i\mathbb{R}^-$ et $2+i\mathbb{R}^-$. On note f la fonction définie sur Ω par $f(z) = (1-z^2)(4-z^2)$.

0) Montrer que Ω est simplement connexe.

1) Soit $z_0 = 0$. Avec les notations de l'exercice 5.36, déterminer $V_f(x)$ pour $x \in \mathbb{R}\backslash\{-2;-1;1;2\}$.

2) On note g l'unique racine carrée holomorphe de f prenant la valeur 1 en 0 ; l'existence de g découle de l'exercice précédent. Calculer $g(x)$ pour $x \in \mathbb{R}\backslash\{-2;-1;1;2\}$.

5.39. Soit N un entier au moins égal à 2, soient $a_1, \dots, a_N \in \mathbb{C}$ et soient $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ des nombres rationnels vérifiant $\sum_1^N \lambda_j = 1$. On suppose que les λ_j sont de la forme r_j/r, où $r \in \mathbb{N}^*$, $r_j \in \mathbb{Z}$ et $\operatorname{pgcd}(r_j, r) = 1$. Si V est un ouvert de $\mathbb{C}$ ne contenant pas les points a_j, on appelle **détermination holomorphe de** $\prod_1^N (z-a_j)^{\lambda_j}$ dans V toute fonction holomorphe $f : V \to \mathbb{C}$ vérifiant $f(z)^r \equiv \prod_1^N (z-a_j)^{r_j}$.

1) *a*) Montrer que si V est un ouvert simplement connexe ne contenant aucun des a_j, alors il existe une détermination holomorphe de $\prod_1^N (z-a_j)^{\lambda_j}$ dans V.

b) Existe-t-il une détermination holomorphe de $z^{1/2}(z-1)^{1/2}$ dans $\mathbb{C}\backslash\{0;1\}$? Dans $\mathbb{C}\backslash[0;1]$?

2) Soit V un ouvert connexe ne contenant aucun des a_j, et soit $z_0 \in V$. Pour $z \in V$, on pose

$$A(z) = \sum_1^N \frac{\lambda_j}{z-a_j} .$$

Montrer qu'une fonction holomorphe $f : V \to \mathbb{C}^*$ est une détermination de $\prod_1^N (z-a_j)^{\lambda_j}$ si et seulement si elle vérifie $\frac{f'}{f} = A$ et $f(z_0)^r = \prod_1^N (z_0-a_j)^{r_j}$.

3) Soit $F \subset \mathbb{C}$ un fermé connexe contenant tous les a_j ; on suppose également que $\mathbb{C}\backslash F$ est connexe. On fixe un point $z_0 \in \mathbb{C}\backslash F$ et $\zeta_0 \in \mathbb{C}$ vérifiant $\zeta_0^r = \prod_1^N (z_0-a_j)^{r_j}$. En utilisant l'exercice 5.37, montrer qu'il existe une unique détermination holomorphe de $\prod_1^N (z-a_j)^{\lambda_j}$ dans $\mathbb{C}\backslash F$ vérifiant $f(z_0) = \zeta_0$, donnée par la formule

$$f(z) = \frac{\zeta_0}{|\zeta_0|} \prod_1^N |z-a_j|^{\lambda_j} \exp\left(i \sum_1^N \lambda_j V_j(\gamma_z)\right) ,$$

où γ_z est n'importe quel chemin joignant z_0 à z dans $\mathbb{C}\backslash F$ et $V_j(\gamma_z)$ est la variation de l'argument le long de $\gamma_z - a_j$.

5.40. Soit K un compact de $\mathbb{C}$, et soit $a \in K$. À quelle condition portant sur $p, q \in \mathbb{Z}$ peut-on trouver une fonction continue $f : \mathbb{C}\backslash K \to \mathbb{C}$ vérifiant $f(z)^q \equiv (z-a)^p$? Suggestion : pour une telle f, examiner $I(f \circ \partial D, 0)$, où D est un disque bien choisi.

5.41. En appliquant convenablement le théorème d'inversion locale, montrer que si $f : \Omega \to \mathbb{C}^*$ est de classe $\mathcal{C}^1$, alors ses éventuels logarithmes continus sont de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer que si f est holomorphe, alors ses éventuels logarithmes continus sont holomorphes.

5.42. Soit $a \in \mathbb{C}$, et soit $\Omega_a = \mathbb{C}\backslash\{a\}$.

1) Pour $n \in \mathbb{Z}$, on note $\gamma_n : [0\,;2\pi] \to \Omega_a$ le lacet défini par $\gamma_n(t) = a + e^{int}$. Montrer que tout lacet $\gamma : [0\,;2\pi] \to \Omega_a$ est homotope dans Ω_a à un lacet γ_n.

2) Montrer que si $f : \Omega_a \to \mathbb{C}^*$ est une application continue, alors

$$I(f \circ \gamma_n, 0) = n\, I(f \circ \gamma_1, 0)$$

pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

3) Déduire de 1) et 2) que si $f : \Omega_a \to \mathbb{C}^*$ est continue, alors on peut trouver un entier m et une fonction continue $g : \Omega_a \to \mathbb{C}$ tels que $f(z) \equiv (z-a)^m e^{g(z)}$.

5.43. Montrer que si $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}^*$ est continue, alors on peut trouver $m \in \mathbb{Z}$ et $g : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ continue tels que $f(\zeta) \equiv \zeta^m e^{g(\zeta)}$.

5.44. Soit $f : \Omega \to \mathbb{C}^*$ continue.

0) Montrer que si f admet un logarithme continu, alors f admet une racine n-ième continue pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que si f admet une racine n-ième continue et si γ est un lacet dans Ω, alors $I(f \circ \gamma, 0)$ est multiple de n.

2) Montrer que si f admet une racine n-ième continue pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, alors f admet un logarithme continu.

Chapitre 6
Topologie du plan

Dans ce chapitre, on va montrer comment la notion d'homotopie permet d'obtenir des résultats topologiques non triviaux comme le théorème de Brouwer, le théorème de l'image ouverte pour les applications continues injectives, ou le théorème de Jordan.

On aura besoin d'une définition plus générale que celle de l'homotopie de lacets donnée au chapitre précédent.

Définition 6.0.26. *Soient* X *et* Y *deux espaces topologiques. On dit que deux applications continues* $f_0, f_1 : X \to Y$ *sont* **homotopes** *s'il existe une application continue* $H : [0;1] \times X \to Y$ *telle que* $H(0, .) = f_0$ *et* $H(1, .) = f_1$.

Lorsque Y est une partie de $\mathbb{C}$, on dira que deux applications $f_0, f_1 : X \to \mathbb{C}$ sont **homotopes dans** Y si elles sont à valeurs dans Y et homotopes en tant qu'applications de X dans Y. Avec cette terminologie, deux lacets sont homotopes dans un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$ au sens de la définition 5.3.1 si et seulement si les applications quotients associées, qui sont définies sur le cercle $\mathbb{T}$, sont homotopes dans Ω.

Exemple *Soit* X *un espace topologique. Si* $f_0, f_1 : X \to \mathbb{C}^*$ *sont deux applications continues vérifiant* $|f_0(x) - f_1(x)| < |f_0(x)| + |f_1(x)|$ *pour tout* $x \in X$, *alors* f_0 *et* f_1 *sont homotopes dans* $\mathbb{C}^*$.

Preuve. L'inégalité $|f_0 + f_1| < |f_0| + |f_1|$ signifie qu'aucun segment $[f_0(x); f_1(x)]$ ne passe par 0. Il suffit donc de poser

$$H(s, x) = (1 - s)f_0(x) + sf_1(x) .$$

6.1. Degré d'une application définie sur un cercle

Définition 6.1.1. *Soit* D *un disque ouvert de* $\mathbb{C}$, *et soit* $p \in \mathbb{C}$. *Si* $\varphi : \partial D \to \mathbb{C}$ *est une application continue ne prenant pas la valeur p, le* **degré** *de l'application* φ *au point p est l'entier* $\deg(\varphi, p)$ *défini par*

$$\deg(\varphi, p) = I(\varphi \circ \partial D, p) .$$

Par définition, $\deg(\varphi, p)$ est toujours un entier. De plus, d'après les résultats déjà démontrés sur l'indice, le degré vérifie les propriétés suivantes :

(1) *si* $\varphi_0, \varphi_1 : \partial D \to \mathbb{C}$ *sont homotopes dans* $\mathbb{C}\backslash\{p\}$, *alors*

$$\deg(\varphi_0, p) = \deg(\varphi_1, p) ;$$

(2) *en particulier, si* $\varphi_0, \varphi_1 : \partial D \to \mathbb{C}^*$ *vérifient* $|\varphi_0 - \varphi_1| < |\varphi_0| + |\varphi_1|$, *alors* $\deg(\varphi, 0) = \deg(\varphi_1, 0)$;

(3) *si* $\varphi : \partial D \to \mathbb{C}$ *est donnée, l'application* $p \mapsto \deg(\varphi, p)$ *est localement constante, et donc continue sur* $\mathbb{C}\backslash\varphi(\partial D)$.

Voici deux autre propriétés importantes.

Lemme 6.1.2. *Soit* D *un disque ouvert de* $\mathbb{C}$, *et soit* $g : \overline{D} \to \mathbb{C}$ *une application continue. Si* $p \in \mathbb{C}\backslash g(\partial D)$ *et si* $\deg(g_{|\partial D}, p) \neq 0$, *alors* g *prend au moins une fois la valeur* p *dans le disque* D.

Preuve. Notons z_0 le centre de D. Soit $p \in \mathbb{C}\backslash g(\partial D)$, et supposons que g ne prenne jamais la valeur p dans D, donc dans $\overline{D}$. Pour $(s, \zeta) \in [0;1] \times \partial D$, posons $H(s, \zeta) = g((1-s)z_0 + s\zeta)$. Comme g ne prend pas la valeur p dans $\overline{D}$, l'application H est une homotopie dans $\mathbb{C}\backslash\{p\}$ entre $g_{|\partial D}$ et la fonction constante $\zeta \mapsto g(z_0)$. On a donc $\deg(g_{|\partial D}, p) = 0$.

Lemme 6.1.3. *Soit* $D \subset \mathbb{C}$ *un disque centré en* 0. *Si* $\varphi : \partial D \to \mathbb{C}^*$ *est continue et impaire, alors* $\deg(\varphi, 0)$ *est un entier impair ; en particulier, on a* $\deg(\varphi, 0) \neq 0$.

Preuve. Soit $\varphi : \partial D \to \mathbb{C}^*$ continue impaire et soit V la variation de l'argument le long de $\varphi \circ \partial D$. D'après 5.4.8 on a $V = 2\pi \deg(\varphi, 0)$. Il s'agit donc de montrer que V est un multiple impair de 2π.

On notera γ_1 et γ_2 les restrictions du lacet ∂D à $[0;\pi]$ et $[\pi;2\pi]$ respectivement, et V_i la variation de l'argument le long de $\varphi \circ \gamma_i$ $(i = 1, 2)$. On a donc $V = V_1 + V_2$.

Soit θ_1 une détermination continue de l'argument le long de $\varphi \circ \gamma_1$. Comme φ est impaire, on voit que l'application θ_2 définie par $\theta_2(t) = \pi + \theta_1(t - \pi)$ est une détermination continue de l'argument le long de $\varphi \circ \gamma_2$. On a donc $V_2 = (\pi + \theta_1(\pi)) - (\pi + \theta_1(0)) = V_1$, d'où $V = 2V_1$. De plus, on a $\theta_1(\pi) \equiv \pi + \theta_1(0) \pmod{2\pi}$, toujours par imparité de φ, donc $V_1 = \theta_1(\pi) - \theta_1(0)$ est un multiple impair de π. Par conséquent, V est bien un multiple impair de 2π.

6.2. Théorème de Brouwer et théorème de l'image ouverte

On montre ici comment les propriétés élémentaires du degré permettent d'obtenir très facilement le théorème de Brouwer et le théorème de l'image ouverte pour les applications continues injectives.

Proposition 6.2.1. (Théorème de Brouwer.)
Toute application continue du disque unité fermé $\overline{\mathbb{D}}$ dans lui-même admet un point fixe.

Preuve. Soit $f : \overline{\mathbb{D}} \to \overline{\mathbb{D}}$ continue, et définissons $g : \overline{\mathbb{D}} \to \mathbb{C}$ par $g(z) = f(z) - z$. Si g s'annule sur $\partial\mathbb{D}$, il n'y a rien à démontrer. Si g ne s'annule pas sur $\partial\mathbb{D}$, alors $|g(\zeta) + \zeta| = |f(\zeta)| \leqslant 1 < |g(\zeta)| + |\zeta|$ pour tout $\zeta \in \partial\mathbb{D}$, donc $\deg(g_{|\partial\mathbb{D}}, 0) = \deg(-\mathrm{id}_{\partial\mathbb{D}}, 0) = 1$. D'après le lemme 6.1.2, la fonction g s'annule au moins une fois dans $\mathbb{D}$, ce qui termine la démonstration.

Corollaire 6.2.2. (Théorème de non-rétraction.)
Il n'existe pas de rétraction continue de $\overline{\mathbb{D}}$ sur $\partial\mathbb{D}$. Autrement dit, il n'existe pas d'application continue $r : \overline{\mathbb{D}} \to \partial\mathbb{D}$ telle que $r(\zeta) = \zeta$ pour tout $\zeta \in \partial\mathbb{D}$.

Preuve. Si r est une rétraction de $\overline{\mathbb{D}}$ sur $\partial\mathbb{D}$, alors $-r$ est une application de $\overline{\mathbb{D}}$ dans $\overline{\mathbb{D}}$ sans point fixe.

Proposition 6.2.3. (Théorème de l'image ouverte.)
Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$. Si $f : \mathrm{U} \to \mathbb{C}$ est une application continue et injective, alors f est une application ouverte.

Preuve. Si V est un ouvert de U, alors tout point $a \in \mathrm{V}$ est centre d'un disque ouvert D tel que $\overline{\mathrm{D}} \subset \mathrm{V}$, et pour montrer que $f(\mathrm{V})$ est un voisinage de $f(a)$, il suffit de vérifier que $f(\mathrm{D})$ est un voisinage de $f(a)$. On se ramène donc à prouver que si $f : \overline{\mathbb{D}} \to \mathbb{C}$ est continue et injective, alors $f(0)$ est intérieur à $f(\mathbb{D})$; fixons une telle f.

Pour $\zeta \in \partial\mathbb{D}$, posons $\varphi_0(\zeta) = f(\zeta) - f(0)$ et $\varphi_1(\zeta) = f(\frac{\zeta}{2}) - f(-\frac{\zeta}{2})$. Comme f est injective, l'application $\mathrm{H} : [0\,;1] \times \partial\mathbb{D} \to \mathbb{C}$ définie par $\mathrm{H}(s, \zeta) = f((1 - \frac{s}{2})\,\zeta) - f(-\frac{s}{2}\,\zeta)$ ne s'annule jamais, ce qui montre que φ_0 et φ_1 sont homotopes dans $\mathbb{C}^*$. On a donc $\deg(\varphi_0, 0) = \deg(\varphi_1, 0)$, autrement dit $\deg(f_{|\partial\mathbb{D}}, f(0)) = \deg(\varphi_1, 0)$. Comme φ_1 est impaire, le lemme 6.1.3 entraîne donc que $\deg(f_{|\partial\mathbb{D}}, f(0))$ est non nul.

Par continuité de l'application $w \mapsto \deg(f_{|\partial\mathbb{D}}, w)$, on peut trouver un voisinage W de $f(0)$ tel que $\deg(f_{|\partial\mathbb{D}}, w) \neq 0$ dans W, et d'après le lemme 6.1.2, on en déduit que la fonction f prend dans $\mathbb{D}$ toutes les valeurs $w \in \mathrm{W}$. Ainsi, $f(0)$ est bien intérieur à $f(\mathbb{D})$.

Remarque 6.2.4. *Le théorème de Brouwer et le théorème de l'image ouverte sont vrais en dimension finie quelconque, mais la démonstration demande plus d'efforts.*

6.3. Homotopie, extensions et logarithmes continus

On a vu au chapitre 5 comment exprimer l'existence de logarithmes continus en termes d'indice. Dans cette section, on va donner deux autres caractérisations de cette propriété.

Commençons par une remarque très simple.

Remarque 6.3.1. *Soit* X *un espace topologique, et soit* $f : X \to \mathbb{C}^*$ *continue. Si l'une des deux propriétés suivantes est vérifiée, alors* f *est homotope à* $\mathbf{1}$ *dans* $\mathbb{C}^*$

(1) f *admet un logarithme continu.*

(2) X *est une partie de* $\mathbb{R}^n$ *et* f *admet un prolongement continu* $F : A \to \mathbb{C}^*$, *où* A *est un ensemble convexe.*

Preuve. Dans le premier cas, on pose $H(s, x) = e^{(1-s)g(x)}$, où g est un logarithme continu de f. Dans le second cas, un point $x_0 \in X$ étant fixé, l'application définie par $H(s, x) = F((1-s)x + sx_0)$ montre que f est homotope dans $\mathbb{C}^*$ à une fonction constante. Comme $\mathbb{C}^*$ est connexe par arcs, cette fonction constante est homotope à $\mathbf{1}$, et il en va donc de même pour f.

Notons que la condition (2) entraîne en fait (1) : cela découle de 5.4.25.

Théorème 6.3.2. (Théorème de Borsuk.)

Soit K *un compact de* $\mathbb{R}^n$. *Pour une application continue* $f : K \to \mathbb{C}^*$, *les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(1) f *admet un logarithme continu ;*

(2) f *est homotope dans* $\mathbb{C}^*$ *à la fonction* $\mathbf{1}$ *;*

(3) f *possède une extension continue* $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}^*$.

Preuve. Si $g : K \to \mathbb{C}$ est un logarithme continu de f, alors g possède une extension continue $G : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ d'après le théorème de Tietze-Urysohn, et $F = e^G$ est une extension continue de f à valeurs dans $\mathbb{C}^*$. Par conséquent, (1) entraîne (3).

La remarque 6.3.1 montre que (3) entraîne (2).

Supposons maintenant la propriété (2) vérifiée : soit $H : [0\,;1] \times K \to \mathbb{C}^*$ une homotopie dans $\mathbb{C}^*$ entre f et la fonction $\mathbf{1}$.

Comme $L = [0\,;1] \times K$ est compact, le nombre $\varepsilon = \inf_L |H(s, x)|$ est strictement positif. Toujours par compacité, la fonction H est uniformément continue sur L, donc on peut trouver un entier $n \geqslant 1$ tel que

$|H(\frac{k}{n},x)-H(\frac{k+1}{n},x)| < \varepsilon$ pour tout $k \in \{0;\dots;n-1\}$ et pour tout $x \in K$. Par définition de ε, on a alors $|H(\frac{k}{n},x) - H(\frac{k+1}{n},x)| < |H(\frac{k+1}{n},x)|$ pour tout x et pour tout k.

Posons $H_k(x) = H(\frac{k}{n},x)$. D'après ce qui précède, on a $|\frac{H_k}{H_{k+1}} - 1| < 1$ pour tout $k \in \{0;\dots;n-1\}$. Comme la fonction Log est continue sur le disque ouvert $D(1,1)$, les fonctions $\mathrm{Log}(H_k/H_{k+1})$ sont donc continues sur K. Si on pose $g = \sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{Log}(H_k/H_{k+1})$, alors g est continue et

$$e^g = \prod_0^{n-1} \frac{H_k}{H_{k+1}} = \frac{H_0}{H_n} = \frac{f}{\mathbf{1}} = f\,.$$

Ainsi, f admet un logarithme continu et on a donc montré que (2) entraîne (1).

Corollaire 6.3.3. *Deux applications continues $u, v : K \to \mathbb{C}^*$ sont homotopes dans $\mathbb{C}^*$ si et seulement si u/v admet un logarithme continu.*

Preuve. D'après le théorème de Borsuk, il suffit de montrer que u et v sont homotopes dans $\mathbb{C}^*$ si et seulement si u/v est homotope à $\mathbf{1}$. Cela se vérifie facilement : si $H_1 : [0;1] \times K \to \mathbb{C}^*$ est une homotopie entre u et v, alors l'application $(s,x) \mapsto H_1(s,x)/v(x)$ est une homotopie entre u/v et $\mathbf{1}$, et inversement, si H_2 est une homotopie entre u/v et $\mathbf{1}$, alors l'application $(s,x) \mapsto H_2(s,x)\,v(x)$ est une homotopie entre u et v.

Corollaire 6.3.4. *Si K est un compact convexe de $\mathbb{R}^n$, alors toute application continue de K dans $\mathbb{C}^*$ admet un logarithme continu.*

Preuve. Cela découle du théorème de Borsuk et de 6.3.1.

Sans hypothèse sur K, le résultat peut bien sûr tomber en défaut. Par exemple, il n'existe pas de détermination continue du logarithme sur le cercle $\mathbb{T} \subset \mathbb{C}$.

Corollaire 6.3.5. *Toute application continue de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{C}^*$ admet un logarithme continu.*

Preuve. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}^*$ continue, et soit w_0 un logarithme de $f(0)$. Pour tout $i \in \mathbb{N}$, le corollaire précédent appliqué à $K_i = \overline{B}(0,i)$ permet de trouver une application continue $g_i : K_i \to \mathbb{C}$ telle que $e^{g_i} \equiv f$ sur K_i et $g_i(0) = w_0$. Par connexité, les fonctions g_i et g_{i+1} diffèrent d'une constante sur K_i, et comme elles prennent la même valeur en 0, on a donc $g_{i+1} \equiv g_i$ sur K_i. On peut donc définir sans ambiguïté une application $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ en posant $g(x) = g_i(x)$ pour $x \in K_i$, et il est clair que g est un logarithme continu de f.

Notons pour finir que 6.3.4 et 6.3.6 découlent bien sûr de 5.4.24, mais que les démonstrations données ici sont sensiblement différentes.

6.3.1. Autre définition de l'indice

Le corollaire 6.3.4 appliqué à $K = [a\,;b]$ permet de retrouver le fait que tout chemin dans $\mathbb{C}^*$ admet un logarithme et un argument continus, sans passer par la notion de primitive le long d'un chemin. De là, on peut *définir* l'indice d'un lacet γ par rapport un point p comme étant la variation de l'argument le long de $\gamma - p$.

La propriété d'invariance par homotopie se déduit alors du corollaire 6.3.4 appliqué au compact $K = [0\,;1]\times J$. En effet, si $H : [0\,;1]\times J \to \mathbb{C}^*$ est une homotopie entre deux lacets γ_0 et γ_1, alors H admet un logarithme continu L puisque $[0\,;1] \times J$ est convexe. En notant γ_s le lacet $t \mapsto H(s\,,t)$, on a $I(\gamma_s, 0) = L(s\,,b) - L(s\,,a)$ pour tout $s \in [0\,;1]$, ce qui montre que l'application $s \mapsto I(\gamma_s, 0)$ est continue. Comme cette application est à valeurs entières, elle est nécessairement constante sur $[0\,;1]$, d'où $I(\gamma_1, 0) = I(\gamma_0, 0)$.

6.3.2. L'ensemble des exponentielles dans une algèbre de Banach

L'implication « (2) entraîne (1) », qui est la partie délicate dans la preuve du théorème de Borsuk donnée plus haut, est un cas particulier d'un résultat « topologique » très général.

Remarquons d'abord que si K est un espace topologique compact, alors

$$\mathcal{G}(K) = \{f : K \to \mathbb{C}^*;\ f \text{ continue}\}$$

est le groupe des éléments inversibles de l'algèbre de Banach $\mathcal{C}(K) = (\mathcal{C}^0(K), \|\ \|_\infty)$.

D'autre part, on vérifie sans peine qu'une application $H : [0\,;1] \times K \to \mathbb{C}$ est continue si et seulement l'application $s \mapsto H(s\,,\,.\,)$ est continue de $[0\,;1]$ dans $\mathcal{C}(K)$. Par conséquent, une homotopie entre deux fonctions $f_0\,, f_1 \in \mathcal{C}(K)$ s'identifie à un chemin reliant f_0 et f_1 dans $\mathcal{C}(K)$, et une homotopie dans $\mathbb{C}^*$ entre deux fonctions $f_0\,, f_1 \in \mathcal{G}(K)$ s'identifie à un chemin reliant f_0 et f_1 dans $\mathcal{G}(K)$. En particulier, f_0 et $f_1 \in \mathcal{G}(K)$ sont homotopes dans $\mathbb{C}^*$ si et seulement si elles sont dans la même composante connexe par arcs de $\mathcal{G}(K)$.

Enfin, $\mathcal{G}(K)$ est un *ouvert* de $\mathcal{C}(K)$: cela se démontre directement en remarquant que si $f \in \mathcal{G}(K)$ et si $g \in \mathcal{C}(K)$ vérifie $\|f-g\|_\infty < \inf_K |f|$, alors $g \in \mathcal{G}(K)$, ou en invoquant le fait que l'ensemble des éléments inversibles d'une algèbre de Banach A est toujours un ouvert de A. En particulier, les composantes connexes de $\mathcal{G}(K)$ sont identiques à ses composantes connexes par arcs, comme c'est le cas pour tout ouvert d'un espace vectoriel normé. On obtient donc le résultat suivant.

Remarque 6.3.6. *Deux applications continues $f_0, f_1 : \mathrm{K} \to \mathbb{C}^*$ sont homotopes dans $\mathbb{C}^*$ si et seulement si elles sont dans la même composante connexe de $\mathcal{G}(\mathrm{K})$.*

Compte tenu de cette remarque, l'équivalence de (1) et (2) dans le théorème de Borsuk découle immédiatement du résultat suivant.

Lemme 6.3.7. *Soit* A *une algèbre de Banach commutative, avec unité* $\mathbf{1}$. *Notons $\mathcal{G}$ le groupe des inversibles de* A *et posons $\mathcal{E} = \{e^a;\ a \in \mathrm{A}\}$. Alors $\mathcal{E}$ est la composante connexe de* $\mathbf{1}$ *dans $\mathcal{G}$.*

Preuve. Comme $\mathbf{1} \in \mathcal{E}$, il suffit de montrer que $\mathcal{E}$ est une partie connexe, ouverte et fermée de $\mathcal{G}$. Notons $\Phi : \mathrm{A} \to \mathrm{A}$ l'application exponentielle.

Comme A est connexe, la continuité de Φ entraîne que $\mathcal{E} = \Phi(\mathrm{A})$ est connexe.

Comme A est commutative, on peut écrire

$$e^{a+h} - e^a = e^a(e^h - \mathbf{1}) = e^a h\Big(1 + \sum_2^\infty \frac{h^{n-1}}{n!}\Big),$$

et on en déduit sans difficulté que Φ est de classe $\mathcal{C}^1$, avec $\mathrm{D}\Phi(a) \cdot h \equiv e^a h$ pour tout $a \in \mathrm{A}$. Par suite, $\mathrm{D}\Phi(a)$ est inversible pour tout $a \in \mathrm{A}$, avec $\mathrm{D}\Phi(a)^{-1} \cdot h \equiv e^{-a} h$. D'après le théorème d'inversion locale, on en déduit que $\mathcal{E} = \Phi(\mathrm{A})$ est un ouvert de A, donc de $\mathcal{G}$.

Comme A est commutative, Φ définit un homomorphisme de $(\mathrm{A}, +)$ dans le groupe multiplicatif $\mathcal{G}$, donc $\mathcal{E} = \Phi(\mathrm{A})$ est un sous-groupe de $\mathcal{G}$. On peut donc écrire $\mathcal{G}\backslash\mathcal{E} = \bigcup_{g \in \mathcal{G}\backslash\mathcal{E}} g\mathcal{E}$, ce qui prouve que $\mathcal{G}\backslash\mathcal{E}$ est ouvert dans $\mathcal{G}$ par continuité des applications $a \mapsto g^{-1}a$. Ainsi, $\mathcal{E}$ est également un fermé de $\mathcal{G}$, ce qui termine la démonstration.

6.4. Théorème de Jordan

Dans cette section, la lettre K désignera toujours un compact de $\mathbb{C}$. On utilisera plusieurs fois la remarque suivante.

Remarque 6.4.1. *Si* O *est une composante connexe de* $\mathbb{C}\backslash\mathrm{K}$, *alors* $\partial\mathrm{O} \subset \mathrm{K}$.

Preuve. Comme O est connexe, tout ensemble A vérifiant $\mathrm{O} \subset \mathrm{A} \subset \overline{\mathrm{O}}$ est connexe, et comme O est ouvert, on a $\partial\mathrm{O} = \overline{\mathrm{O}}\backslash\mathrm{O}$. Si $\partial\mathrm{O}$ contenait un point $w \in \mathbb{C}\backslash\mathrm{K}$, l'ensemble $\mathrm{A} = \mathrm{O} \cup \{w\}$ serait donc un connexe de $\mathbb{C}\backslash\mathrm{K}$ strictement plus grand que O.

6.4.1. Les groupes $\mathcal{G}(K)$, $\mathcal{E}(K)$ et $\mathbf{G}(K)$

On note $\mathcal{G}(K)$ le groupe multiplicatif des fonctions continues $f : K \to \mathbb{C}^*$, et $\mathcal{E}(K)$ le sous-groupe de $\mathcal{G}(K)$ constitué par les fonctions admettant un logarithme continu. Enfin, on désigne par $\mathbf{G}(K)$ le groupe quotient $\mathcal{G}(K)/\mathcal{E}(K)$.

Notons que si K_1 et K_2 sont deux compacts homéomorphes, alors les groupes $\mathbf{G}(K_1)$ et $\mathbf{G}(K_2)$ sont isomorphes : en effet, si θ est un homéomorphisme de K_2 sur K_1, alors l'application $f \mapsto f \circ \theta$ est un isomorphisme de $\mathcal{G}(K_1)$ sur $\mathcal{G}(K_2)$ qui envoie $\mathcal{E}(K_1)$ sur $\mathcal{E}(K_2)$, et définit donc un isomorphisme de $\mathbf{G}(K_1)$ sur $\mathbf{G}(K_2)$ par passage au quotient.

Dans cette section, on va montrer que le groupe $\mathbf{G}(K)$ est entièrement déterminé par le nombre de composante connexes de $\mathbb{C}\backslash K$ et inversement. Par conséquent, si K_1 et K_2 sont deux compacts de $\mathbb{C}$ homéomorphes, alors $\mathbb{C}\backslash K_1$ et $\mathbb{C}\backslash K_2$ ont le même nombre de composantes connexes. La structure topologique « interne » d'un compact $K \subset \mathbb{C}$ influe donc sur celle de son complémentaire, ce qui n'avait rien d'évident a priori. En particulier, si K est une courbe de Jordan fermée, autrement dit si K est homéomorphe à un cercle, alors $\mathbb{C}\backslash K$ a exactement deux composantes connexes. Ce résultat constitue le **théorème de Jordan**.

Dans ce qui va suivre, un rôle essentiel sera joué par les fonction $z \mapsto z - p$, $p \in \mathbb{C}\backslash K$.

Définition 6.4.2. *Pour $p \in \mathbb{C}\backslash K$, on notera f_p la fonction de $\mathcal{G}(K)$ définie par $f_p(z) = z - p$.*

6.4.2. Un exemple

Lemme 6.4.3. *Soit $\Gamma \subset \mathbb{C}$ une courbe de Jordan fermée paramétrée par un lacet γ. Pour $f \in \mathcal{G}(\Gamma)$, posons $I_\gamma(f) = I(f \circ \gamma, 0)$. Alors $I_\gamma : \mathcal{G}(\Gamma) \to \mathbb{Z}$ est un homomorphisme surjectif, de noyau $\mathcal{E}(\Gamma)$.*

Preuve. Notons J l'intervalle de définition de γ, et $\mathcal{L}(J, \mathbb{C}^*)$ le groupe multiplicatif constitué par les lacets de J dans $\mathbb{C}^*$. Comme l'application quotient $\hat{\gamma}$ associée à γ est un homéomorphisme de $\mathbb{T}$ sur Γ, l'application $f \mapsto f \circ \gamma$ est un isomorphisme de $\mathcal{G}(\Gamma)$ sur $\mathcal{L}(J, \mathbb{C}^*)$, d'inverse $\lambda \mapsto \hat{\lambda} \circ \hat{\gamma}^{-1}$, et deux fonctions $f_0, f_1 \in \mathcal{G}(\Gamma)$ sont homotopes dans $\mathbb{C}^*$ si et seulement si les lacets $f_i \circ \gamma$ le sont. D'après la proposition 5.4.17, on en déduit que I_γ est un homomorphisme surjectif, et que $\mathrm{Ker}(I_\gamma)$ est l'ensemble des fonctions f homotopes dans $\mathbb{C}^*$ à la fonction $\mathbf{1}$, c'est-à-dire précisément $\mathcal{E}(\Gamma)$ d'après le théorème de Borsuk.

Autre preuve. Il n'est en fait pas nécessaire d'invoquer le théorème de Borsuk pour démontrer que le noyau de I_γ est égal à $\mathcal{E}(\Gamma)$. Soit $[a\,;b]$

l'intervalle de définition de γ. On notera $\hat{\lambda} : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ l'application quotient associée à un lacet $\lambda : [a;b] \to \mathbb{C}$. Si $f \in \mathcal{G}(\Gamma)$, alors $\mathrm{I}_\gamma(f) = l(b) - l(a)$, où l est une détermination continue du logarithme le long de $f \circ \gamma$ arbitrairement choisie. Si $f \in \mathcal{E}(\Gamma)$, $f = e^g$, on peut prendre $l = g \circ \gamma$ et on obtient $\mathrm{I}_\gamma(f) = g(\gamma(b)) - g(\gamma(a)) = 0$; inversement, si $l(b) - l(a) = 0$, alors l est un lacet et l'application $\hat{l} \circ \hat{\gamma}^{-1} : \Gamma \to \mathbb{C}$ est un logarithme continu de f.

Corollaire 6.4.4. *Si Γ est une courbe de Jordan fermée, alors $\mathbf{G}(\Gamma)$ est isomorphe à $\mathbb{Z}$.*

Corollaire 6.4.5. *Si V est un disque ou un rectangle de centre p, alors $\mathcal{G}(\partial\mathrm{V})$ est engendré par $\mathcal{E}(\partial\mathrm{V})$ et la fonction f_p.*

Preuve. On a $\mathrm{I}_{\partial\mathrm{V}}(f_p) = \mathrm{I}(\partial\mathrm{V}, p) = 1$, donc $\mathrm{I}_{\partial\mathrm{V}}(f_p)$ engendre $\mathrm{Im}(\mathrm{I}_{\partial\mathrm{V}}) = \mathbb{Z}$; par conséquent, $\mathcal{G}(\partial\mathrm{V})$ est engendré par f_p et $\mathrm{Ker}(\mathrm{I}_{\partial\mathrm{V}}) = \mathcal{E}(\partial\mathrm{V})$.

6.4.3. Étude du groupe G(K) dans le cas général

Remarque 6.4.6. *Si p et q sont deux points d'une même composante connexe de $\mathbb{C}\backslash\mathrm{K}$, alors $f_p/f_q \in \mathcal{E}(\mathrm{K})$. Si p est dans la composante connexe non bornée de $\mathbb{C}\backslash\mathrm{K}$, alors $f_p \in \mathcal{E}(\mathrm{K})$.*

Preuve. Si γ est un chemin reliant p et q dans $\mathbb{C}\backslash\mathrm{K}$, alors l'application $(s,z) \mapsto f_{\gamma(s)}(z)$ montre que f_p et f_q sont homotopes dans $\mathbb{C}^*$, donc $f_p/f_q \in \mathcal{E}(\mathrm{K})$ d'après le théorème de Borsuk.

Soit D un disque ouvert centré en 0 contenant K, et soit $p_0 \notin \overline{\mathrm{D}}$. L'application $(s,z) \mapsto sz - p_0$ montre que f_{p_0} est homotope dans $\mathbb{C}^*$ à une fonction constante, donc $f_{p_0} \in \mathcal{E}(\mathrm{K})$ d'après le théorème de Borsuk. Si maintenant p est dans la composante connexe non bornée de $\mathbb{C}\backslash\mathrm{K}$, alors $f_p/f_{p_0} \in \mathcal{E}(\mathrm{K})$ d'après la première partie car p_0 appartient lui-même à cette composante connexe, donc $f_p = f_{p_0} \times \frac{f_p}{f_{p_0}}$ appartient bien à $\mathcal{E}(\mathrm{K})$.

Autre preuve.

Si γ est un chemin reliant p et q dans $\mathbb{C}\backslash\mathrm{K}$, alors il existe une détermination holomorphe de $\log(\frac{z-p}{z-q})$ dans $\mathbb{C}\backslash\mathrm{Im}(\gamma)$ d'après le corollaire 5.4.21, donc $f_p/f_q \in \mathcal{E}(\mathrm{K})$.

Si p est dans la composante connexe non bornée de $\mathbb{C}\backslash\mathrm{K}$, alors on peut trouver un fermé connexe non borné F tel que $p \in \mathrm{F} \subset \mathbb{C}\backslash\mathrm{K}$: il suffit de poser $\mathrm{F} = \mathrm{Im}(\gamma) \cup \mathrm{L}$, où L est une demi-droite ne rencontrant pas K et γ un chemin dans $\mathbb{C}\backslash\mathrm{K}$ joignant p à l'origine de L. D'après le corollaire 5.4.21, il existe une détermination holomorphe de $\log(z-p)$ dans $\mathbb{C}\backslash\mathrm{F}$, donc $f_p \in \mathcal{E}(\mathrm{K})$.

Lemme 6.4.7. *Soient* $O_1, \dots, O_k$ *des composantes connexes bornées de* $\mathbb{C}\backslash K$ *deux à deux distinctes, et choisissons pour chaque* i *un point* $p_i \in O_i$. *Si* $n_1, \dots, n_k$ *sont des entiers non tous nuls, alors* $f = \prod f_{p_i}^{n_i} \notin \mathcal{E}(K)$.

Preuve. Supposons que $f = \prod_1^k f_{p_i}^{n_i}$ appartienne à $\mathcal{E}(K)$; d'après la partie « facile » du théorème de Borsuk, f admet alors un prolongement continu $F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$. On doit montrer qu'on a $n_i = 0$ pour tout $i \leqslant k$.

Fixons $i \leqslant k$. Comme O_i est une composante connexe de $\mathbb{C} \setminus K$, sa frontière est contenue dans K, donc $\overline{O_i}$ ne contient aucun point p_j pour $j \neq i$. Par conséquent, $G_i(z) = \prod_{j \neq i}(z - p_j)^{n_j}$ est bien défini et ne s'annule pas sur $\overline{O_i}$. En posant $F_i(z) = F(z)/G_i(z)$, on obtient donc une fonction continue $F_i : \overline{O_i} \to \mathbb{C}^*$, qui vérifie $F_i(z) \equiv f_{p_i}(z)^{n_i} \equiv (z - p_i)^{n_i}$ sur ∂O_i car $\partial O_i \subset K$ et $F_{|K} = f$.

Soit maintenant D un disque ouvert contenant $\overline{O_i}$. D'après ce qui précède, on définit une fonction continue $H_i : \overline{D} \to \mathbb{C}^*$ en posant $H_i(z) = F_i(z)$ pour $z \in \overline{O_i}$, et $H_i(z) = (z - p_i)^{n_i}$ pour $z \in \overline{D}\backslash\overline{O_i}$. Comme $\overline{D}$ est convexe, la fonction H_i est homotope à $\mathbf{1}$ dans $\mathbb{C}^*$, donc $I(H_i \circ \gamma, 0) = 0$ pour tout lacet γ dans $\overline{D}$; en particulier, $I(H_i \circ \partial D, 0) = 0$. Mais comme $H_i(z) \equiv (z - p_i)^{n_i}$ sur le bord de D, on a également

$$I(H_i \circ \partial D, 0) = n_i I(\partial D, p_i) = n_i \ .$$

Ainsi, $n_i = 0$ pour tout $i \leqslant k$, ce qui termine la démonstration.

Lemme 6.4.8. *Notons* $(O_i)_{i \in I}$ *la famille des composantes connexes bornées de* $\mathbb{C}\backslash K$, *et choisissons pour chaque* i *un point* $p_i \in O_i$. *Alors* $\mathcal{G}(K)$ *est engendré par* $\mathcal{E}(K)$ *et les fonctions* f_{p_i}.

Preuve. D'après 6.4.6, il suffit de montrer que $\mathcal{G}(K)$ est engendré par $\mathcal{E}(K)$ et les fonctions f_q, $q \in \mathbb{C}\backslash K$. Autrement dit, il s'agit de vérifier que pour toute fonction $f \in \mathcal{G}(K)$, on peut trouver des points $q_1, \dots, q_l \in \mathbb{C}\backslash K$ et des entiers $m_1, \dots, m_l$ tels que $f/f_{q_1}^{m_1} \dots f_{q_l}^{m_l} \in \mathcal{E}(K)$.

Comme K est compact, on peut supposer que K est contenu dans le carré $Q = [0\,;1] \times [0\,;1]$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, à choisir ultérieurement. En traçant les droites $\{x = k/n\}$ et $\{y = k/n\}$ $(0 \leqslant k \leqslant n)$, on subdivise Q en carrés fermés de côté $1/n$. On notera $Q_1, \dots, Q_l$ les carrés qui ne rencontrent pas K, et A la réunion des autres ; on a donc $K \subset A$ et $d(z, K) \leqslant \sqrt{2}/n$ pour tout $z \in A$.

Fixons à présent $f : K \to \mathbb{C}^*$ continue.

D'après le théorème de Tietze-Urysohn, la fonction f admet une extension continue $F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Comme l'ensemble $\{z \in \mathbb{C};\ F(z) \neq 0\}$ est un ouvert contenant K, on peut maintenant choisir n assez grand pour que la fonction F ne s'annule pas sur A ; la fonction f admet ainsi une extension continue $F_0 : A \to \mathbb{C}^*$.

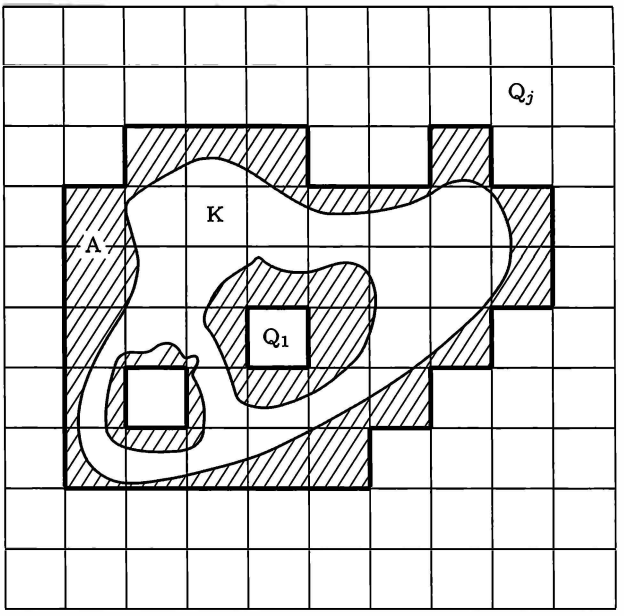


FIG. 35.

Par définition de A et des Q_j, $Q_1 \cap A$ est la réunion (éventuellement vide) d'un certain nombre de côtés de Q_1. Comme $\mathbb{C}^*$ est connexe par arcs, un instant de réflexion permet de se convaincre de l'existence d'une application continue $g_1 : \partial Q_1 \to \mathbb{C}^*$ qui coïncide avec F_0 sur $Q_1 \cap A$. Si on note q_1 le centre de Q_1, alors, d'après le corollaire 6.4.5 appliqué à $V = Q_1$ et la partie facile du théorème de Borsuk, il existe un entier m_1 tel que l'application $z \mapsto g_1(z)/(z-q_1)^{m_1}$ admette un prolongement continu $G_1 : Q_1 \to \mathbb{C}^*$. On définit alors une application continue F_1 en posant $F_1(z) = G_1(z)$ si $z \in Q_1$ et $F_1(z) = F_0(z)/(z-q_1)^{m_1}$ si $z \in A$. Ainsi, on a trouvé q_1 et m_1 tels que $f/f_{q_1}^{m_1}$ admette un prolongement continu $F_1 : A \cup Q_1 \to \mathbb{C}^*$.

En procédant par récurrence, on obtient des points $q_1, \dots, q_l \in \mathbb{C}\backslash K$ et des entiers $m_1, \dots, m_l$ tels que $f/f_{q_1}^{m_1} \dots f_{q_l}^{m_l}$ admet un prolongement continu $F_l : Q \to \mathbb{C}^*$. Comme Q est convexe, la fonction F_l admet un logarithme continu d'après le corollaire 6.3.4, donc $f/f_{q_1}^{m_1} \dots f_{q_l}^{m_l} \in \mathcal{E}(K)$.

On peut maintenant énoncer le résultat principal de cette section. Posons $\mathbb{Z}^0 = \{0\}$, et notons $\mathbb{Z}^\infty$ le groupe additif formé par les suites $(n_i)_{i\in\mathbb{N}}$, où $n_i \in \mathbb{Z}$ et tous les n_i sont nuls sauf un nombre fini d'entre eux.

Théorème 6.4.9. *Le groupe* $\mathbf{G}(\mathrm{K}) = \mathcal{G}(\mathrm{K})/\mathcal{E}(\mathrm{K})$ *est isomorphe à* $\mathbb{Z}^{\mathrm{N}}$, *où* N *est le nombre – fini ou infini – de composantes connexes bornées de* $\mathbb{C}\backslash\mathrm{K}$.

Preuve. Comme $\mathbb{C}$ est à base dénombrable d'ouverts, la famille des composantes connexes de $\mathbb{C}\backslash\mathrm{K}$ est au plus dénombrable. Notons $(\mathrm{O}_i)_{0\leqslant i<\mathrm{N}}$ la famille des composantes connexes bornées de $\mathbb{C}\backslash\mathrm{K}$, et choisissons pour tout i un point $p_i \in \mathrm{O}_i$.

Notons $\mathbf{f}$ l'image d'une fonction $f \in \mathcal{G}(\mathrm{K})$ par l'application quotient de $\mathcal{G}(\mathrm{K})$ sur $\mathbf{G}(\mathrm{K})$, et pour $\mathbf{n} = (n_i)_{0\leqslant i<\mathrm{N}} \in \mathbb{Z}^{\mathrm{N}}$, posons $\Phi(\mathbf{n}) = \prod_i \mathbf{f}_{p_i}^{n_i}$, un produit vide étant par convention égal à $\mathbf{1}$. Il est clair que Φ est un homomorphisme de $\mathbb{Z}^{\mathrm{N}}$ dans $\mathbf{G}(\mathrm{K})$. De plus, Φ est injectif d'après le lemme 6.4.7, et il est surjectif d'après le lemme 6.4.8.

Corollaire 6.4.10. *Si* K_1 *et* K_2 *sont deux compacts de* $\mathbb{C}$ *homéomorphes, alors* $\mathbb{C}\backslash\mathrm{K}_1$ *et* $\mathbb{C}\backslash\mathrm{K}_2$ *ont le même nombre de composantes connexes.*

Preuve. Si K_1 et K_2 sont homéomorphes, alors les groupes $\mathbf{G}(\mathrm{K}_1)$ et $\mathbf{G}(\mathrm{K}_2)$ sont isomorphes. Il suffit donc de montrer que $\mathbb{Z}^{\mathrm{N}_1}$ et $\mathbb{Z}^{\mathrm{N}_2}$ ne sont isomorphes que si $\mathrm{N}_1 = \mathrm{N}_2$.

Appelons *pseudo-dimension* d'un groupe abélien G le cardinal maximum (fini ou infini) d'une famille $\mathbb{Z}$-indépendante d'éléments de G. Pour tout $\mathrm{N} \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, la pseudo-dimension du groupe $\mathbb{Z}^{\mathrm{N}}$ est égale à N. En effet, une famille d'éléments de $\mathbb{Z}^{\mathrm{N}}$ est $\mathbb{Z}$-indépendante si et seulement si elle est libre dans le $\mathbb{Q}$-espace vectoriel $\mathbb{Q}^{\mathrm{N}}$. La pseudo-dimension de $\mathbb{Z}^{\mathrm{N}}$ est donc au plus égale à $\dim(\mathbb{Q}^{\mathrm{N}}) = \mathrm{N}$, et elle est d'autre part au moins égale à N car $\mathbb{Z}^{\mathrm{N}}$ contient la « base canonique » de $\mathbb{Q}^{\mathrm{N}}$. Comme deux groupes isomorphes ont évidemment la même pseudo-dimension, on en déduit que $\mathbb{Z}^{\mathrm{N}_1}$ et $\mathbb{Z}^{\mathrm{N}_2}$ ne sont pas isomorphes si $\mathrm{N}_1 \neq \mathrm{N}_2$.

Corollaire 6.4.11. *On a* $\mathcal{G}(\mathrm{K}) = \mathcal{E}(\mathrm{K})$ *si et seulement si* $\mathbb{C}\backslash\mathrm{K}$ *est connexe.*

6.4.4. Théorème de Jordan

Théorème 6.4.12. (Théorème de Jordan.)
Si Γ *est une courbe de Jordan fermée dans* $\mathbb{C}$, *alors* $\mathbb{C}\backslash\Gamma$ *a exactement deux composantes connexes. De plus, la frontière de chacune d'elles est égale à* Γ.

Preuve. Comme Γ est homéomorphe à $\mathbb{T}$, la première partie vient du corollaire 6.4.10.

Soit O une composante connexe de $\mathbb{C}\backslash\Gamma$. D'après la remarque 6.4.1, on sait déjà qu'on a $\partial\mathrm{O} \subset \Gamma$. Si $\partial\mathrm{O}$ était strictement contenu dans Γ,

alors ∂O serait homéomorphe à un compact de $\mathbb{R}$ car Γ privé d'un point est homéomorphe à $\mathbb{R}$, et $\mathbb{C}\backslash\partial O$ serait donc connexe d'après le corollaire 6.4.10. Mais O est ouvert et fermé dans $\mathbb{C}\backslash\partial O$, et $O \neq \mathbb{C}\backslash\partial O$ puisque O est strictement contenu dans $\mathbb{C}\backslash\Gamma$, donc $\mathbb{C}\backslash\partial O$ n'est pas connexe. On a donc nécessairement $\partial O = \Gamma$.

Définition 6.4.13. *L'***intérieur** *d'une courbe de Jordan fermée* $\Gamma \subset \mathbb{C}$ *est la composante connexe bornée de* $\mathbb{C}\backslash\Gamma$ *; on le note* $\mathrm{int}(\Gamma)$.

La proposition suivante complète le théorème de Jordan. Elle signifie géométriquement qu'un lacet de Jordan tourne exactement une fois autour de son intérieur.

Proposition 6.4.14. *Si* $\Gamma \subset \mathbb{C}$ *est une courbe de Jordan fermée paramétrée par un lacet* γ*, alors* $\mathrm{I}(\gamma, p)$ *vaut identiquement* 1 *ou* -1 *dans l'intérieur de* Γ.

Preuve. Soit $p \in \mathrm{int}(\Gamma)$. D'après le lemme 6.4.8, $\mathcal{G}(\Gamma)$ est engendré par $\mathcal{E}(\Gamma)$ et l'application f_p. Comme l'homomorphisme $\mathrm{I}_\gamma : \mathcal{G}(\Gamma) \to \mathbb{Z}$ introduit au lemme 6.4.3 est surjectif et qu'on a $\mathrm{I}_\gamma \equiv 0$ sur $\mathcal{E}(\Gamma)$, on en déduit que $\mathrm{I}(\gamma, p) = \mathrm{I}_\gamma(f_p)$ engendre $\mathbb{Z}$ et vaut donc nécessairement 1 ou -1.

6.5. Séparation de deux points du plan

Définition 6.5.1. *On dit qu'un ensemble* $\mathrm{X} \subset \mathbb{C}$ **sépare** *deux points* $p, q \in \mathbb{C}\backslash\mathrm{X}$ *si* p *et* q *ne sont pas dans la même composante connexe de* $\mathbb{C}\backslash\mathrm{X}$.

Le résultat suivant donne un critère « analytique » de séparation.

Proposition 6.5.2. (Critère d'Eilenberg.)
Soit K *un compact de* $\mathbb{C}$*, et soient* $p, q \in \mathbb{C}\backslash\mathrm{K}$*. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(1) K *sépare les points* p *et* q *;*

(2) *la fonction* $z \mapsto \dfrac{z-p}{z-q}$ *n'admet pas de logarithme continu sur* K.

Preuve. La remarque 6.4.6 montre que (2) entraîne (1). Inversement, si K sépare p et q, alors ou bien p et q sont dans deux composantes connexes bornées de $\mathbb{C}\backslash\mathrm{K}$ distinctes, ou bien l'un des deux est dans la composante non bornée de $\mathbb{C}\backslash\mathrm{K}$, et l'autre dans une composante bornée. Dans le premier cas, le lemme 6.4.7 montre que (2) est vérifiée ; dans le deuxième cas, ce même lemme et la remarque 6.4.6 entraînent que l'une des deux fonctions $z \mapsto z - p$ ou $z \mapsto z - q$ admet un logarithme continu sur K tandis que l'autre n'en admet pas, donc (2) est également vérifiée.

Corollaire 6.5.3. (Théorème de Janiszewski.)

Soient A *et* B *deux compacts de* $\mathbb{C}$, *et soient* $p, q \in \mathbb{C}\backslash(A \cup B)$. *On suppose que* $A \cap B$ *est connexe et que ni* A, *ni* B *ne sépare* p *et* q. *Alors* $A \cup B$ *ne sépare pas non plus* p *et* q.

Preuve. D'après le critère d'Eilenberg, on peut trouver deux fonctions continues $g_A : A \to \mathbb{C}$, $g_B : B \to \mathbb{C}$ telles que $e^{g_A(z)}$et $e^{g_B(z)}$ coïncident avec $\frac{z-p}{z-q}$ respectivement sur A et B. Comme $A \cap B$ est connexe, les fonctions g_A et g_B diffèrent d'une constante multiple de $2i\pi$ sur $A \cap B$; quitte à soustraire cette constante à g_A, on peut donc supposer que g_A et g_B coïncident sur $A \cap B$. On définit alors une fonction continue $g : A \cup B \to \mathbb{C}$ en posant $g(z) = g_A(z)$ si $z \in A$, et $g_B(z) = g(z)$ si $z \in B$. Par construction, on a $e^{g(z)} \equiv \frac{z-p}{z-q}$ sur $A \cup B$, donc $A \cup B$ ne sépare pas p et q d'après le critère d'Eilenberg.

Exercices

6.1. Montrer que deux applications continues $f_0, f_1 : \partial\mathbb{D} \to \mathbb{C}^*$ ont le même degré si et seulement si elles sont homotopes dans $\mathbb{C}^*$.

6.2. (Théorème de d'Alembert.)

1) Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ continue. On suppose qu'il existe un entier $n \geqslant 1$ tel que $f(z)/z^n$ admet une limite $l \neq 0$ quand $|z|$ tend vers l'infini.

a) Pour $r > 0$, on note Γ_r le cercle $\{|z| = r\}$. Montrer que si $a \in \mathbb{C}$, alors f ne prend pas la valeur a sur Γ_r et $\deg((f-a)_{|\Gamma_r}) = n$ dès que r est suffisamment grand.

b) Conclure que f est surjective.

2) Déduire de 1) une démonstration du théorème de d'Alembert.

6.3. Soient $D, D' \subset \mathbb{C}$ deux disques centrés en 0, et soit $f : \overline{D} \to \mathbb{C}$ continue.

1) On suppose qu'on a $f(\partial D) \subset \partial D'$ et $\deg(f_{|\partial D}) \neq 0$. Montrer que $f(D)$ contient D'.

2) Montrer que les hypothèses de 1) sont vérifiées si $f_{|\partial D}$ est injective et $f(\partial D) \subset \partial D'$.

6.4. Soit Γ un cercle de $\mathbb{C}$ et soit $f : \Gamma \to \partial\mathbb{D}$ une application continue vérifiant $\deg(f) \neq 0$. Montrer que f est surjective.

6.5. Soit $g : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ une application continue sans point fixe.

1) En appliquant l'exercice précédent à $f(\zeta) = g(\zeta)/\zeta$, montrer qu'on a $\deg(g) = 1$.

2) Conclure que g est surjective.

6.6. Soit Γ un cercle de $\mathbb{C}$, et soit $f : \Gamma \to \mathbb{C}^*$ vérifiant $\deg(f) \neq 0$. Montrer que toute demi-droite d'origine 0 rencontre $f(\Gamma)$.

6.7. Soit $g : \overline{\mathbb{D}} \to \mathbb{C}^*$ continue. En appliquant l'exercice précédent à $f(\zeta) = g(\zeta)/\zeta$, montrer qu'il existe $\zeta_1, \zeta_2 \in \partial\mathbb{D}$, $\lambda_1 > 0$ et $\lambda_2 < 0$ tels que $g(\zeta_1) = \lambda_1\zeta_1$ et $g(\zeta_2) = \lambda_2\zeta_2$.

6.8. Montrer qu'une application continue $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}^*$ possède un logarithme continu si et seulement si $\deg(f) = 0$.

6.9. Soit $f : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ vérifiant $\deg(f) = 0$. Montrer qu'il existe un point $\zeta \in \mathbb{T}$ tel que $f(\zeta) = f(-\zeta)$.

6.10. Soit $f : \partial\mathbb{D} \to \mathbb{C}^*$ continue et paire. Montrer que $\deg(f)$ est pair.

6.11. Soit $v : \overline{\mathbb{D}} \to \mathbb{C}$ une application continue vérifiant $\langle v(\zeta), \zeta\rangle > 0$ pour tout $\zeta \in \partial\mathbb{D}$, où $\langle\ ,\ \rangle$ est le produit scalaire usuel sur $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$. Le but de l'exercice est de montrer de deux façons différentes que v s'annule au moins une fois dans $\mathbb{D}$.

1) Montrer que $v_{|\partial\mathbb{D}}$ est homotope dans $\mathbb{C}^*$ à l'application $\zeta \mapsto \zeta$ et conclure.

2) *a*) Montrer que si $z \in \overline{\mathbb{D}}$, alors la demi-droite $z + \mathbb{R}^+ v(z)$ rencontre $\partial\mathbb{D}$ en un unique point $r(z)$, et exprimer $r(z)$ en fonction de z et $v(z)$.

b) Conclure à l'aide de *a*).

6.12. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ une application continue.

1) On suppose qu'on a

$$\lim_{|z|\to\infty} \frac{\langle f(z), z\rangle}{|z|} = +\infty\ ,$$

où $\langle\ ,\ \rangle$ est le produit scalaire usuel sur $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$, et $|\ |$ est la norme euclidienne.

a) Montrer que si $a \in \mathbb{C}$, alors il existe un disque $\mathrm{D} \subset \mathbb{C}$ tel que $\langle f(z) - a, z\rangle > 0$ pour tout $z \in \partial\mathrm{D}$.

b) En utilisant l'exercice précédent, conclure que f est surjective.

2) On suppose qu'il existe une constante $\mathrm{C} > 0$ telle que

$$\forall u, v \in \mathbb{R}^2 \quad \langle f(v) - f(u), v - u\rangle \geqslant \mathrm{C}\,|v - u|^2\ .$$

Montrer que f est un homéomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

6.13. Montrer que le théorème de non-rétraction peut se déduire du théorème de Borsuk.

6.14. Montrer que le théorème de Brouwer peut se déduire du théorème de non-rétraction.

6.15. Soit $f : \overline{\mathbb{D}} \to \mathbb{C}$ continue et vérifiant $f(\partial\mathbb{D}) \subset \overline{\mathbb{D}}$. Montrer que f admet un point fixe.

6.16. Montrer que toute application continue d'un intervalle compact $[a\,;b] \subset \mathbb{R}$ dans lui même admet un point fixe.

6.17. (Théorème de Brouwer dans $\mathbb{R}^n$.)

On note B la boule unité ouverte euclidienne de $\mathbb{R}^n$. Le but de l'exercice est de démontrer le théorème de Brouwer : *toute application continue* $f : \overline{\mathrm{B}} \to \overline{\mathrm{B}}$ *possède un point fixe.*

1) Soit $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application de classe $\mathcal{C}^1$. Pour $t \in [0;1]$, on définit $v_t : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ par $v_t(x) = (1-t)x + tg(x)$. Montrer qu'on peut trouver $\varepsilon_0 > 0$ tel que pour tout $t \leqslant \varepsilon_0$, l'application v_t est injective sur $\overline{\mathrm{B}}$ et vérifie $\mathrm{J}_{v_t}(x) > 0$ sur $\overline{\mathrm{B}}$, où la lettre J désigne le déterminant jacobien.

2) Soit $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose que g est à valeurs dans $\overline{\mathrm{B}}$ et qu'on a $g(x) = x$ pour tout $x \in \partial\mathrm{B}$.

a) Avec les notations de 1), montrer qu'on a $v_t(\mathrm{B}) \subset \mathrm{B}$ pour tout $t \in [0;1[$, et que si $t \leqslant \varepsilon_0$, alors $v_t(\mathrm{B})$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

b) Montrer que si $t \leqslant \varepsilon_0$, alors $v_t(\mathrm{B})$ est un fermé de B.

c) On note m la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$. Montrer que l'application $t \mapsto \int_{\mathrm{B}} \mathrm{J}_{v_t}(x)\, dm(x)$ est polynomiale.

d) Déduire de *a*), *b*) et *c*) que pour tout $t \in [0;1]$, on a $\int_{\mathrm{B}} \mathrm{J}_{v_t}(x) dm(x) = m(\mathrm{B})$.

3) *a*) Montrer que si $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et vérifie $g(\mathrm{B}) \subset \partial\mathrm{B}$, alors $\mathrm{J}_g(x) \equiv 0$ dans B.

b) En déduire, à l'aide de 2), qu'il n'existe pas d'application $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^1$ vérifiant $g(\mathrm{B}) \subset \partial\mathrm{B}$ et $g(\zeta) = \zeta$ pour tout $\zeta \in \partial\mathrm{B}$.

4) Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^1$ et vérifiant $\|f(x)\| < 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.

a) On suppose que f ne possède pas de point fixe. Pour $x \in \mathbb{R}^n$, on note $g(x)$ le point d'intersection de la demi-droite $\Delta_x = [f(x); x)$ avec $\partial\mathrm{B}$. Justifier la définition, et montrer que l'application g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$.

b) En utilisant 3), montrer que f possède un point fixe.

5) Montrer que si $f : \overline{\mathrm{B}} \to \overline{\mathrm{B}}$ est une application continue, alors il existe une suite (f_k) d'applications de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$ qui converge uniformément vers f sur $\overline{\mathrm{B}}$, avec de plus $\|f_k(x)\| < 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et pour tout k.

6) Conclure.

6.18. (Théorème du point fixe croissant.)

Soit $(\mathrm{X}, \leqslant)$ un ensemble ordonné. On suppose que X possède un plus petit et un plus grand élément, et que toute partie non vide de X possède une borne supérieure. Montrer que toute application croissante $\varphi : \mathrm{X} \to \mathrm{X}$ admet un point fixe.

6.19. (Théorème de Cantor-Bernstein.)

Soient X et Y deux ensembles. On suppose qu'il existe une injection $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ et une injection $g : \mathrm{Y} \to \mathrm{X}$.

1) On note $\mathcal{P}(\mathrm{X})$ l'ensemble des parties de X. En appliquant le théorème du point fixe croissant (exercice précédent), montrer qu'il existe $\mathrm{C} \in \mathcal{P}(\mathrm{X})$ telle que $g(\mathrm{Y} \backslash f(\mathrm{C})) = \mathrm{X} \backslash \mathrm{C}$.

2) Montrer que X et Y sont en bijection.

6.20. Soient X et Y deux espaces topologiques. On suppose qu'il existe une injection continue $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ et une injection continue $g : \mathrm{Y} \to \mathrm{X}$. Peut-on en déduire que X et Y sont homéomorphes ? Comparer avec l'exercice précédent.

6.21. On dit qu'un espace topologique X a la **propriété du point fixe** si toute application continue de X dans lui même admet un point fixe. Parmi les espaces suivants, déterminer lesquels ont la propriété la propriété du point fixe : un

rectangle fermé dans $\mathbb{R}^2$; un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$; le plan $\mathbb{R}^2$; un cercle de $\mathbb{C}$; une sphère de $\mathbb{R}^3$; la sphère unité de $l^2(\mathbb{N})$.

6.22. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ une application continue. On suppose qu'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$||f(v) - f(u)|| \geqslant C\,||v - u||$$

pour tous $u, v \in \mathbb{R}^2$, où $||\ ||$ est une norme quelconque sur $\mathbb{R}^2$.

1) Montrer que f est injective et que $f(\mathbb{R}^2)$ est une partie fermée de $\mathbb{R}^2$.

2) Montrer que f est un homéomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

6.23. (Théorème de Borsuk-Ulam.)

1) On note $\mathbf{S}^2$ la sphère unité euclidienne de $\mathbb{R}^3$, et on identifie le cercle unité $\partial\mathbb{D} \subset \mathbb{C}$ au cercle $\mathbf{S}^2 \cap \{x_3 = 0\} \subset \mathbb{R}^3$.

a) Montrer qu'il existe une application continue $i : \overline{\mathbb{D}} \to \mathbf{S}^2$ telle que $i(\zeta) = \zeta$ pour tout $\zeta \in \partial\mathbb{D}$.

b) En déduire que si X est un espace topologique et si $f : \mathbf{S}^2 \to X$ est continue, alors il existe une application continue $g : \overline{\mathbb{D}} \to X$ telle que $g(\zeta) = f(\zeta)$ pour tout $\zeta \in \partial\mathbb{D}$ et $g(\overline{\mathbb{D}}) \subset f(\mathbf{S}^2)$.

2) En utilisant 1), montrer que si $f : \mathbf{S}^2 \to \mathbb{C}$ est continue et impaire, alors f s'annule au moins une fois.

3) Soit S une sphère de $\mathbb{R}^3$; pour $p \in S$, on note p^* le point de S diamétralement opposé à p. Démontrer le **théorème de Borsuk-Ulam** : *si* $F : S \to \mathbb{R}^2$ *est une application continue, alors il existe un point* $p \in S$ *tel que* $F(p^*) = F(p)$.

6.24. Montrer qu'une sphère de $\mathbb{R}^3$ ne peut pas s'injecter continûment dans $\mathbb{R}^2$.

6.25. (Invariance de la dimension.)

1) Montrer que $\mathbb{R}$ n'est pas homéomorphe à $\mathbb{R}^n$ si $n \geqslant 2$.

2) En utilisant l'exercice précédent, montrer que si $n \geqslant 3$, alors $\mathbb{R}^n$ n'est pas homéomorphe à $\mathbb{R}^2$.

6.26. Montrer que si n et m sont deux entiers strictement positifs, alors les groupes additifs $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$ sont isomorphes. Comparer avec l'exercice précédent.

6.27. (Théorème de Stone-Tukey.)

1) Soit U un ouvert borné de $\mathbb{R}^3$.

a) Montrer que si L est une droite de $\mathbb{R}^3$, alors il existe un unique point $q \in L$ tel que le plan perpendiculaire à L passant par q partage U en deux parties de même volume.

b) Soit $B \subset \mathbb{R}^3$ une boule centrée en 0 contenant U, et soit S la sphère correspondante. Pour $p \in S$, on note $\varphi_U(p)$ le point q associé par *a*) à la droite $L = (0p)$. Montrer que l'application $\varphi_U : S \to \mathbb{R}^3$ est continue.

c) Vérifier qu'on a $\varphi_U(-p) = d - \varphi_U(p)$ pour tout $p \in S$, où d est le diamètre de S.

2) Soient U, V, W trois ouverts bornés de $\mathbb{R}^3$.

a) Soit S une sphère centrée en 0 telle que U, V, W soient contenus dans la boule ouverte correspondante. On définit $f : S \to \mathbb{R}^2$ par

$f(p) = (\varphi_U(p) - \varphi_W(p), \varphi_V(p) - \varphi_W(p))$. En utilisant le théorème de Borsuk-Ulam – exercice 6.23 – montrer que f s'annule au moins une fois.

b) Conclure qu'il existe un plan Π qui partage chacune des 3 ouverts U, V, W en deux parties de même volume.

6.28. (Théorème de Lusternik-Schnirelman-Borsuk.)

Soit $\mathbf{S}^2$ la sphère unité euclidienne de $\mathbb{R}^3$, et soient A, B, C trois fermés de $\mathbf{S}^2$ vérifiant $A \cup B \cup C = \mathbf{S}^2$. En appliquant le théorème de Borsuk-Ulam – exercice 6.23 – à l'application $f : \mathbf{S}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$f(p) = (d(p, A) - d(p, C), d(p, B) - d(p, C)),$$

montrer que l'un des fermés A, B, C contient deux points diamétralement opposés.

6.29. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, et soit B un fermé d'un espace métrique Y. Montrer que toute application continue $f : B \to \Omega$ admet une extension continue $F : W \to \Omega$, où W est un ouvert de Y.

6.30. (Critère de Borsuk.)

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, soit A un fermé d'un espace métrique X, et soient $f_0, f_1 : A \to \Omega$ continues. On suppose que f_0 et f_1 sont homotopes dans Ω, et que f_0 admet une extension continue $F_0 : X \to \Omega$. Le but de l'exercice est de montrer que f_1 admet également une extension continue $F_1 : X \to \Omega$.

1) Soit $\varphi : [0\,;1] \times A \to \Omega$ une homotopie de f_0 à f_1. En utilisant l'exercice précédent, montrer qu'il existe un ouvert $V \subset X$ contenant A et une application continue $\Phi : (\{0\} \times X) \cup ([0\,;1] \times V) \to \Omega$ tels que

$$\begin{cases} \Phi((0,x)) = F_0(x) & \text{pour tout } x \in V \\ \Phi((t,a)) = \varphi(t,a) & \text{pour } (t,a) \in [0\,;1] \times A \end{cases}$$

2) Justifier l'existence d'une application continue $p : X \to [0\,;1]$ telle que $p \equiv 1$ sur A et $p \equiv 0$ sur $X \backslash V$.

3) Conclure.

6.31. Soit A un fermé de $\mathbb{R}^n$, et soient $f_0, f_1 : A \to \mathbb{C}^*$ continues. En utilisant l'exercice précédent, montrer que f_0 et f_1 sont homotopes dans $\mathbb{C}^*$ si et seulement si f_0/f_1 admet un prolongement continu $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}^*$.

6.32. Que devient le lemme 6.3.7 lorsque l'algèbre A n'est pas commutative ?

6.33. Le but de l'exercice est de montrer que toute matrice inversible à coefficients complexes est l'exponentielle d'une matrice $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

1) Pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on note $\mathbb{C}[M]$ la sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ engendrée par M.

a) Montrer que si $M \in GL_n(\mathbb{C})$, alors $M^{-1} \in \mathbb{C}[M]$.

b) Montrer que si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, alors $GL_n(\mathbb{C}) \cap \mathbb{C}[M]$ est connexe par arcs.

2) Conclure.

6.34. Soit K un compact convexe de $\mathbb{C}$. Montrer que $\mathbb{C} \backslash K$ est connexe.

6.35. Soit D un disque ouvert de $\mathbb{C}$ et soit $f : \overline{\mathrm{D}} \to \mathbb{C}$ une application continue injective.

1) Constater que $f(\mathrm{D})$ et $\mathbb{C}\backslash f(\overline{\mathrm{D}})$ forment une partition de $\mathbb{C}\backslash f(\partial \mathrm{D})$, et montrer que ces deux ensembles sont connexes.

2) Montrer que l'intérieur de la courbe de Jordan $f(\partial \mathrm{D})$ est égal à $f(\mathrm{D})$.

6.36. Utiliser l'exercice précédent pour donner une démonstration du théorème de l'image ouverte pour les fonctions continues injectives.

6.37. Utiliser l'exercice 6.35 pour redémontrer le fait qu'une sphère de $\mathbb{R}^3$ ne peut pas s'injecter continûment dans $\mathbb{R}^2$ (exercice 6.24). On pourra observer qu'une demi-sphère fermée de $\mathbb{R}^3$ est homéomorphe à $\overline{\mathbb{D}}$.

6.38. Soit Ω l'intérieur d'un lacet de Jordan régulier de classe $\mathcal{C}^2$. Montrer que $\mathrm{K} = \overline{\Omega}$ est un compact à bord régulier. On pourra utiliser l'exercice 2.25.

6.39. Montrer que si $\mathrm{K} \subset \mathbb{C}$ est un compact à bord régulier et si $\partial \mathrm{K}$ est connexe, alors $\mathring{\mathrm{K}} = \mathrm{int}(\partial \mathrm{K})$.

6.40. On dit qu'un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$ est un **domaine de Jordan** si Ω est l'intérieur d'une courbe de Jordan fermée.

1) Montrer que si $\mathrm{K} \subset \mathbb{C}$ est un compact à bord régulier et si $\mathring{\mathrm{K}}$ est connexe, alors on peut écrire $\mathrm{K} = \overline{\Omega}\backslash \bigcup_1^k \Omega_i$, où Ω et les Ω_i sont des domaines de Jordan et $\overline{\Omega_i} \subset \Omega$ pour tout i. On pourra d'abord observer que si deux domaines de Jordan ont leurs frontières disjointes, alors ou bien ces domaines sont disjoints, ou bien l'un est contenu dans l'autre.

2) Que dire si $\mathring{\mathrm{K}}$ n'est pas connexe ?

6.41. Soit $\mathrm{K} \subset \mathbb{C}$ un compact à bord régulier. Montrer sans utiliser la formule de Stokes qu'on a $\int_{\partial \mathrm{K}} \frac{dz}{z-p} = 1$ si $p \in \mathring{\mathrm{K}}$ et $\int_{\partial \mathrm{K}} \frac{dz}{z-p} = 0$ si $p \notin \mathrm{K}$. On pourra commencer par le cas où $\partial \mathrm{K}$ est connexe en utilisant 6.39, puis conclure à l'aide de l'exercice précédent.

6.42. Essayer de donner une démonstration directe du théorème de Jordan dans le cas d'un lacet régulier de classe $\mathcal{C}^1$. On pourra s'inspirer de l'exercice 5.29.

6.43. Soit R un carré de $\mathbb{R}^2$, $\mathrm{R} = abcd$, et soient γ_1, γ_2 deux chemins dans R, l'un d'extrémités a et c, l'autre d'extrémités b et d. Le but de l'exercice est de montrer que $\mathrm{Im}(\gamma_1)$ et $\mathrm{Im}(\gamma_2)$ ont au moins un point en commun.

1) On suppose que γ_1 est un chemin de Jordan et ne passe par aucun point de $\partial \mathrm{R}$ hormis a et c. On note Ω_1 l'intérieur de la courbe de Jordan fermée définie par γ_1 et les deux segments $[a\,;b], [b;c]$.

a) Montrer que tout point de $\mathring{\mathrm{R}}$ suffisamment proche de b appartient à Ω_1. Montrer également que le point d n'appartient pas à Ω_1.

b) Montrer que $\mathrm{Im}(\gamma_1)$ et $\mathrm{Im}(\gamma_2)$ ont au moins un point en commun.

2) On ne fait plus d'hypothèse sur γ_1.

a) Montrer que γ_1 peut s'approcher uniformément par des chemins de a vers c vérifiant les hypothèses de la question 1).

b) En raisonnant par l'absurde, montrer que $\mathrm{Im}(\gamma_1)$ et $\mathrm{Im}(\gamma_2)$ ont au moins un point en commun.

6.44. (Inégalité isopérimétrique.)

Dans tout l'exercice, Γ est une courbe de Jordan fermée régulière de classe $\mathcal{C}^2$, d'intérieur Ω.

0) Montrer que Γ admet un unique paramétrage $\gamma : [0\,;l(\Gamma)] \to \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^2$, positivement orienté relativement à Ω et vérifiant $|\gamma'(t)| \equiv 1$ (voir les exercices 1.30 et 1.25).

1) Montrer que pour tout point $a \in \mathbb{C}$, on a

$$m(\Omega) = \frac{1}{2i}\int_\gamma \bar{z}\,dz = \frac{1}{2i}\int_\gamma (\bar{z}-a)\,dz\ .$$

2) Soit $\mathrm{T} > 0$ et soit $f : [0\,;\mathrm{T}] \to \mathbb{C}$ vérifiant $f(\mathrm{T}) = f(0)$ et $\int_0^{\mathrm{T}} f(t)\,dt = 0$. Montrer qu'on a

$$\int_0^{\mathrm{T}} |f(t)|^2 dt \leqslant \frac{\mathrm{T}^2}{4\pi^2}\int_0^{\mathrm{T}} |f'(t)|^2 dt\ ,$$

et caractériser les cas d'égalité.

3) Déduire de 1) et 2) qu'on a

$$m(\Omega) \leqslant \frac{1}{4\pi}\,l(\Gamma)^2\ ,$$

avec égalité si et seulement si Γ est un cercle.

6.45. Le théorème de Janiszewski est-il encore valable si K_1 et K_2 sont seulement supposés fermés ?

6.46. Soient $\mathrm{F}_1, \mathrm{F}_1 \subset \mathbb{C}$ deux fermés disjoints, et soient $a, b \in \mathbb{C}$. On suppose que ni F_1, ni F_2 ne sépare a et b. Montrer que $\mathrm{F}_1 \cup \mathrm{F}_2$ ne sépare pas non plus a et b. Suggestion : appliquer le théorème de Janiszewski à $\mathrm{K}_i = (\mathrm{F}_i \cap \overline{\mathrm{D}}) \cup \partial\mathrm{D}$, où D est un disque bien choisi.

6.47. Soient $\Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbb{C}$ deux ouverts connexes disjoints tels que $\partial\Omega_1 \subset \partial\Omega_2$. En utilisant l'exercice précédent, montrer que $\partial\Omega_1$ est connexe.

6.48. Soient K_1 et K_2 deux compacts de $\mathbb{C}$. On suppose que K_1 et K_2 sont connexes, mais que $\mathrm{K}_1 \cap \mathrm{K}_2$ ne l'est pas.

1) Pour $\varepsilon > 0$ et $i = 1, 2$, on pose $\mathrm{V}_i(\varepsilon) = \{z \in \mathbb{C};\ d(z, \mathrm{K}_i) < \varepsilon\}$. Montrer que les $\mathrm{V}_i(\varepsilon)$ sont connexes.

2) *a*) Soient a, b deux points de $\mathrm{K}_1 \cap \mathrm{K}_2$ n'appartenant pas à la même composante connexe de $\mathrm{K}_1 \cap \mathrm{K}_2$. Montrer que si ε est assez petit, alors a et b n'appartiennent pas à la même composante connexe de $\mathrm{V}_1(\varepsilon) \cap \mathrm{V}_2(\varepsilon)$.

b) En appliquant convenablement le théorème de Janiszewski, montrer que que si ε est assez petit, alors $\mathbb{C}\backslash(\mathrm{V}_1(\varepsilon) \cup \mathrm{V}_2(\varepsilon))$ n'est pas connexe.

3) Montrer que $\mathbb{C}\backslash(\mathrm{K}_1 \cup \mathrm{K}_2)$ n'est pas connexe.

6.49. 1) Soit K un compact connexe de $\mathbb{C}$ séparant deux points $p, q \in \mathbb{C}$. On note $\mathcal{F}$ l'ensemble de tous les compacts connexes $\mathrm{L} \subset \mathrm{K}$ séparant p et q. Montrer que $\mathcal{F}$ possède un élément minimal pour l'inclusion.

2) Soit $\Gamma \subset \mathbb{C}$ une courbe de Jordan simple. Utiliser 1) et le théorème de Janiszewski pour prouver que $\mathbb{C}\backslash\Gamma$ est connexe.

6.50. Soit Ω un ouvert connexe de $\mathbb{C}$, et soit Γ une courbe de Jordan simple contenue dans Ω.

1) En appliquant l'exercice 6.46 à Γ et $\mathbb{C}\backslash\Omega$, montrer que $\Omega\backslash\Gamma$ est connexe.

2) Démontrer directement Le résultat de 1) lorsque Γ est polygonale.

6.51. Soit $\Gamma \subset \mathbb{C}$ une courbe de Jordan fermée, et soient a, b deux points de Γ distincts. Soit également C une courbe de Jordan simple d'extrémités a et b telle que $C\backslash\{a\,;b\} \subset \mathrm{int}(\Gamma)$.

1) Constater que a et b déterminent deux courbes simples $\Gamma_1, \Gamma_2 \subset \Omega$, et que $J_1 = \Gamma_1 \cup C$ et $J_2 = \Gamma_2 \cup C$ sont des courbes de Jordan fermées.

2) Montrer qu'on a $\mathrm{int}(\Gamma)\backslash C = \mathrm{int}(J_1) \cup \mathrm{int}(J_2)$.

6.52. Soit $\Gamma \subset \mathbb{C}$ une courbe de Jordan fermée d'intérieur Ω, et soit $a \in \Gamma$. Soit également $\varepsilon > 0$.

1) Soit $\gamma : [-1;1] \to \mathbb{C}$ un paramétrage de Γ, avec $\gamma(0) = a$. On choisit $t_0 > 0$ tel que $\gamma([-t_0\,;t_0]) \subset D(a,\varepsilon)$ et on pose

$$J_1 = \gamma([-t_0\,;t_0])\,, \quad J_2 = \Gamma\backslash\gamma(\,]-t_0\,;t_0[\,)\,.$$

a) Montrer qu'on peut trouver $\delta \in]0\,;\varepsilon[$ tel que $D(a,\delta) \cap J_2 = \emptyset$.

b) Montrer que si p et q sont deux points de $D(a,\delta) \cap \Omega$, alors p et q ne sont séparés ni par Γ, ni par $J_2 \cup \partial D(a,\varepsilon)$.

2) Montrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que deux points quelconques de $D(a,\delta)\cap\Omega$ peuvent être joints par un chemin dans $D(a,\varepsilon)\cap\Omega$, un tel chemin pouvant être choisi injectif et polygonal.

6.53. Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ l'intérieur d'une courbe de Jordan fermée. En utilisant l'exercice précédent, montrer qu'on peut relier tout point $p \in \Omega$ à tout point $a \in \partial\Omega$ par une courbe simple L vérifiant $L\backslash\{a\} \subset \Omega$. Plus précisément, montrer que si $a \in \partial\Omega$ et si (w_n) est une suite de points de Ω convergeant vers a, alors on peut trouver une courbe vérifiant ces propriétés et passant de plus par une infinité de points w_n.

6.54. Si Ω est un ouvert connexe de $\mathbb{C}$, est-il toujours possible de relier un point $p \in \Omega$ à un point $a \in \partial\Omega$ donné par une courbe L vérifiant $L\backslash\{a\} \subset \Omega$? On pourra considérer les segments $[0\,;P_n]$, $n \in \mathbb{N}$, où P_n est le point de coordonnées $(1/2\,, 2^{-n})$.

Chapitre 7

Théorème de Cauchy homologique

Comme d'habitude, Ω est un ouvert de $\mathbb{C}$.

On sait que si $K \subset \Omega$ est un compact à bord régulier, alors $\int_{\partial K} f dz = 0$ pour toute fonction f holomorphe dans Ω : c'est le théorème de Cauchy. On sait également que si γ est un lacet dans Ω homotope dans Ω à un lacet constant, alors $\int_\gamma f dz = 0$ pour toute fonction $f \in \mathcal{H}(\Omega)$: c'est le théorème de Cauchy *homotopique*. Le **théorème de Cauchy homologique**, que l'on va démontrer dans ce très court chapitre, peut être considéré comme une généralisation de ces deux résultats.

7.1. Cycles, homologie

On appellera **cycle dans** Ω toute suite finie $((n_1, \gamma_1), \dots, (n_m, \gamma_m))$, où les n_j sont des entiers, et les γ_j sont des lacets dans Ω. Un tel cycle se note $\Gamma = \sum_j n_j \gamma_j$, pour indiquer qu'on le considère comme une « combinaisons de lacets à coefficients entiers » ; et on dit que Γ est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux si les γ_j le sont. On identifie un lacet γ avec le cycle $((1, \gamma))$.

La **somme** de deux cycles $\Gamma_1 = ((n_1, \gamma_1), \dots, (n_m, \gamma_m))$ et $\Gamma_2 = ((p_1, \lambda_1), \dots, (p_k, \lambda_k))$ est par définition le cycle

$$((n_1, \gamma_1), \dots, (n_m, \gamma_m), (p_1, \lambda_1), \dots, (p_k, \lambda_k)) \,,$$

que l'on note $\Gamma_1 + \Gamma_2$; en d'autres termes, et en changeant les notations : si $\Gamma_1 = \sum_1^m n_j \gamma_j$ et $\Gamma_2 = \sum_{m+1}^{m+k} n_j \gamma_j$, alors $\Gamma_1 + \Gamma_2 = \sum_1^{m+k} n_j \gamma_j$. On définit de même l'opposé d'un cycle et le produit d'un cycle par un entier.

On définit l'**intégrale** d'une 1-forme ω sur un cycle $\Gamma = \sum_j n_j \gamma_j$ par la formule

$$\int_\Gamma \omega = \sum_j n_j \int_{\gamma_j} \omega \,,$$

cette formule ayant un sens pour toute 1-forme continue si Γ est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, et pour toute 1-forme fermée si Γ est un cycle arbitraire.

Notons que l'addition des cycles devient commutative si on ne considère les cycles que par leur action sur les 1-formes : si Γ_1 et Γ_2 sont deux cycles, alors

$$\int_{\Gamma_1+\Gamma_2} \omega = \int_{\Gamma_1} \omega + \int_{\Gamma_2} \omega = \int_{\Gamma_2+\Gamma_1} \omega$$

pour toute 1-forme ω. Cela justifie les notations « additives » employées pour désigner un cycle et la somme de deux cycles.

L'**image** d'un cycle $\Gamma = \sum_j n_j\gamma_j$ est par définition le compact $\mathrm{Im}(\Gamma) = \bigcup_j \mathrm{Im}(\gamma_j)$. Si p est un point de $\mathbb{C}\backslash\mathrm{Im}(\Gamma)$, on définit l'**indice** de Γ par rapport à p par la formule

$$\mathrm{I}(\Gamma,p) = \frac{1}{2i\pi}\int_\Gamma \frac{dz}{z} = \sum_j n_j \mathrm{I}(\gamma_j,p)\,.$$

Définition 7.1.1. *On dit qu'un cycle Γ dans Ω est* **homologue à 0 dans** Ω *si on a $\mathrm{I}(\Gamma,p)=0$ pour tout point $p\in\mathbb{C}\backslash\Omega$; et on dit que deux cycles Γ_0,Γ_1 sont* **homologues dans** Ω *si $\Gamma_1-\Gamma_0$ est homologue à 0 dans Ω, autrement dit si on a $\mathrm{I}(\Gamma_1,p)=\mathrm{I}(\Gamma_0,p)$ pour tout point $p\in\mathbb{C}\backslash\Omega$.*

Exemples. 1) Deux lacets homotopes dans Ω sont homologues dans Ω. Cela découle de l'invariance de l'indice par homotopie, elle-même conséquence du théorème de Cauchy homotopique ou des résultats du chapitre 6 concernant les logarithmes continus.

2) Si $\mathrm{K}\subset\Omega$ est un disque à trous, $\mathrm{K}=\overline{\mathrm{D}}\backslash\bigcup_{j=1}^k \overline{\mathrm{D}}_j$, alors $\Gamma=\partial\mathrm{D}-\sum_j\partial\mathrm{D}_j$ est homologue à 0 dans Ω : cela découle du théorème de Cauchy, ou simplement du lemme 3.6.1.

3) Plus généralement, si $\mathrm{K}\subset\Omega$ est un compact à bord régulier et si on paramètre $\partial\mathrm{K}$ par des lacets $\gamma_1,\dots,\gamma_m$ positivement orientés relativement à $\mathring{\mathrm{K}}$, alors le cycle $\Gamma=\sum_1^m\gamma_j$ est homologue à 0 dans Ω. Cela découle à nouveau du théorème de Cauchy, mais on peut également le démontrer sans utiliser la formule de Stokes (voir l'exercice 6.41).

4) Soient $a_1,\dots,a_k\in\mathbb{C}$, et soit $\Omega=\mathbb{C}\backslash\{a_1;\dots;a_k\}$; soient également $\overline{\mathrm{D}}_1,\dots,\overline{\mathrm{D}}_k$ des disques deux à deux disjoints de centres respectifs $a_1,\dots,a_k$. Si Γ est un cycle dans Ω, alors Γ est homologue dans Ω au cycle $\sum_i n_i\partial\mathrm{D}_i$, où $n_i=\mathrm{I}(\Gamma,a_i)$.

7.2. Théorème de Cauchy homologique

Le résultat principal du chapitre est le théorème suivant.

Théorème 7.2.1. *Si Γ est un cycle homologue à 0 dans Ω, alors $\int_\Gamma\omega=0$ pour toute 1-forme fermée $\omega\in\mathcal{A}^1_0(\Omega)$. Par conséquent, si Γ_0 et Γ_1 sont deux cycles homologues dans Ω, alors $\int_{\Gamma_1}\omega=\int_{\Gamma_0}\omega$ pour toute 1-forme fermée ω.*

Pour la preuve, on aura besoin d'un résultat préliminaire, qui est une deuxième version de la formule de Stokes.

Pour tout cycle Γ de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, on notera μ_Γ la mesure de Radon sur $\mathrm{Im}(\Gamma)$ définie par

$$\langle \mu_\Gamma, \varphi \rangle = \int_\Gamma \varphi \, dz \, .$$

On notera également μ_Γ la mesure borélienne associée à μ_Γ, considérée comme mesure sur $\mathbb{C}$.

Comme Γ est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, $\mathrm{Im}(\Gamma)$ est de mesure de Lebesgue nulle (voir la preuve de la remarque 2.3.3). La fonction $z \mapsto \mathrm{I}(\Gamma, z)$ est donc définie presque partout, et elle est localement intégrable sur $\mathbb{C}$ car localement constante sur $\mathbb{C} \backslash \mathrm{Im}(\Gamma)$. On posera

$$\mathrm{I}_\Gamma(z) = \mathrm{I}(\Gamma, z) \, ,$$

et on notera $[\mathrm{I}_\Gamma]$ la distribution associée à la fonction I_Γ.

Enfin, on posera

$$\mathrm{K}_\Gamma = \mathrm{Im}(\Gamma) \cup \{ z \in \mathbb{C} \backslash \mathrm{Im}(\Gamma);\ \mathrm{I}_\Gamma(z) \neq 0 \} \, .$$

Il est clair que le support de la distribution $[\mathrm{I}_\Gamma]$ est contenu dans K_Γ. De plus, K_Γ est un *compact* de $\mathbb{C}$. En effet, $\mathbb{C} \setminus \mathrm{K}_\Gamma = \{ z;\ \mathrm{I}_\Gamma(z) = 0 \}$ est un ouvert de $\mathbb{C}$ car I_Γ est localement constante sur $\mathbb{C} \setminus \mathrm{Im}(\Gamma)$, donc K_Γ est fermé ; et K_Γ est borné car $\mathrm{Im}(\Gamma)$ est borné et $\mathrm{I}_\Gamma(z) = 0$ pour $|z|$ suffisamment grand.

Proposition 7.2.2. *Si Γ est un cycle de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux dans $\mathbb{C}$, alors*

$$\frac{\partial \mathrm{I}_\Gamma}{\partial \bar{z}} = -\frac{1}{2i} \, \mu_\Gamma$$

au sens des distributions.

Preuve. Soit $\hat{\mu}_\Gamma$ la transformée de Cauchy de la mesure μ_Γ (voir 3.7). Par définition de l'indice, on a $\hat{\mu}_\Gamma(z) \equiv -2i \, \mathrm{I}_\Gamma(z)$ sur $\mathbb{C} \backslash \mathrm{Im}(\Gamma)$, donc presque partout. Ainsi $[\hat{\mu}_\Gamma] = -2i \, [\mathrm{I}_\Gamma]$, d'où le résultat puisque $\frac{\partial \hat{\mu}_\Gamma}{\partial \bar{z}} = \mu_\Gamma$ au sens des distributions.

Comme conséquence de cette proposition, voici une version « homologique » de la formule de Stokes.

Corollaire 7.2.3. *Soit Γ un cycle de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux dans $\mathbb{C}$. Si $\omega \in \mathcal{A}^1(\mathbb{C})$ est une 1-forme de classe $\mathcal{C}^\infty$ à support compact, alors*

$$\int_\Gamma \omega = \int_{\mathrm{K}_\Gamma} \mathrm{I}_\Gamma \, d\omega \, .$$

En particulier, on a $\int_\Gamma \omega = 0$ pour toute 1-forme fermée ω de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{C}$ à support compact.

Preuve. Écrivons $\omega = A dz + B d\bar{z}$. D'après la proposition précédente, on a

$$\int_\Gamma A\, dz = \langle \mu_\Gamma, A \rangle = 2i \int_{\mathbb{C}} I_\Gamma \frac{\partial A}{\partial \bar{z}}\, dm\,,$$

et

$$\int_\Gamma B\, d\bar{z} = \overline{\int_\Gamma \overline{B}\, dz} = \overline{\langle \mu_\Gamma, \overline{B} \rangle} = -2i \int_{\mathbb{C}} I_\Gamma \frac{\partial B}{\partial z}\, dm$$

car I_Γ est réelle et $\overline{\frac{\partial \overline{B}}{\partial \bar{z}}} = \frac{\partial B}{\partial z}$. Comme I_Γ est nulle en dehors de K_Γ, on obtient donc

$$\int_\Gamma \omega = 2i \int_{K_\Gamma} I_\Gamma \Big(\frac{\partial A}{\partial \bar{z}} - \frac{\partial B}{\partial z} \Big)\, dm\,,$$

d'où le résultat.

Preuve du théorème 7.2.1.

Soit $\Gamma = \sum n_j \gamma_j$ un cycle homologue à 0 dans Ω. On veut montrer qu'on a $\int_\Gamma \omega = 0$ pour toute 1-forme fermée continue $\omega \in \mathcal{A}^1_0(\Omega)$, et comme chaque lacet γ_j est homotope dans Ω à un lacet de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux d'après 5.3.4, on peut supposer que Γ est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux.

Par hypothèse sur Γ, le compact K_Γ est contenu dans Ω. Il suffit donc de montrer que si ω est une 1-forme fermée au voisinage de K_Γ, alors $\int_\Gamma \omega = 0$; et comme l'intégrale $\int_\Gamma \omega$ est inchangée si multiplie ω par une fonction de $\mathcal{D}(\mathbb{C})$ valant 1 au voisinage de K_Γ, on peut de plus supposer que ω est continue sur $\mathbb{C}$ tout entier et à support compact.

Si ω était de classe $\mathcal{C}^\infty$, alors la formule de Stokes homologique 7.2.3 donnerait immédiatement le résultat.

Pour traiter le cas général, choisissons une fonction $\rho \in \mathcal{D}(\mathbb{C})$ à support contenu dans le disque unité et vérifiant $\int \rho\, dm = 1$. Pour $\varepsilon > 0$, posons $\rho_\varepsilon(z) = 1/\varepsilon^2 \rho(z/\varepsilon)$, et $\omega_\varepsilon = \omega * \rho_\varepsilon$; en écrivant $\omega = A dz + B d\bar{z}$, on a donc $\omega_\varepsilon = A_\varepsilon dz + B_\varepsilon d\bar{z}$, où $A_\varepsilon = A * \rho_\varepsilon$ et $B_\varepsilon = B * \rho_\varepsilon$.

Les fonctions A_ε et B_ε convergent uniformément vers A et B quand ε tend vers 0. On a donc $\int_\Gamma \omega = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_\Gamma \omega_\varepsilon$. Comme A_ε et B_ε sont dans $\mathcal{D}(\mathbb{C})$, il suffit donc, d'après le cas déjà traité, de montrer que si ε est assez petit, alors ω_ε est fermée au voisinage de K_Γ.

Pour $\varepsilon > 0$, notons Ω_ε l'ouvert $K_\Gamma + D(0, \varepsilon)$. Pour tout rectangle $R \subset \Omega_\varepsilon$, le théorème de Fubini permet d'écrire

$$\int_{\partial R} \omega_\varepsilon = \int_{D(0,\varepsilon)} \rho_\varepsilon(w) \left(\int_{\partial R_w} \omega \right) dm(w)\,,$$

où R_w est le rectangle $R - w$, qui est contenu dans $\Omega_{2\varepsilon}$ pour chaque $w \in D(0,\varepsilon)$. Si ε est assez petit, alors ω est fermée sur $\Omega_{2\varepsilon}$ et on obtient $\int_{\partial R} \omega_\varepsilon = 0$ pour tout rectangle $R \subset \Omega_\varepsilon$. Ainsi, ω_ε est fermée au voisinage de K_Γ dès que ε est suffisamment petit. Cela termine la démonstration.

Voici finalement le théorème de Cauchy homologique. Compte tenu des exemples donnés au début du chapitre, on peut considérer qu'il généralise à la fois le théorème de Cauchy et le théorème de Cauchy homotopique, même si la preuve de cette affirmation repose sur des résultats non triviaux.

Théorème 7.2.4. (Théorème de Cauchy homologique.)
Si Γ est un cycle homologue à 0 dans Ω, alors $\int_\Gamma f dz = 0$ pour toute fonction f holomorphe dans Ω.

Preuve. C'est une conséquence immédiate de 7.2.1.

Corollaire 7.2.5. (Formule de Cauchy homologique.)
Si Γ est un cycle homologue à 0 dans Ω et si $a \in \Omega \backslash \mathrm{Im}(\Gamma)$, alors, pour toute fonction $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, on a

$$\frac{1}{2i\pi} \int_\Gamma \frac{f(z)}{z-a}\, dz = I(\Gamma, a) f(a)\ .$$

Preuve. On procède exactement comme pour la formule de Cauchy homotopique 5.4.12.

7.3. Remarques

7.3.1. Densité des fonctions rationnelles

Le théorème de Cauchy homologique peut s'interpréter comme un théorème de « densité » : en effet, il affirme exactement que si $\int_\Gamma f dz = 0$ pour les fonctions f du type $z \mapsto \frac{1}{(z-a)}$, $a \in \mathbb{C} \backslash \Omega$, alors $\int_\Gamma f dz = 0$ pour toute fonction f holomorphe dans Ω.

De fait, on va voir qu'il est possible de *démontrer* le théorème de Cauchy homologique par un argument de densité. Le raisonnement repose sur le lemme suivant.

Lemme 7.3.1. *Pour un cycle Γ dans Ω, les propriétés suivantes sont équivalentes :*
(1) *Γ est homologue à 0 dans Ω ;*
(2) *$\int_\Gamma R\, dz = 0$ pour toute fonction rationnelle R sans pôles dans Ω.*

Preuve. Sans hypothèse sur Γ, on a d'une part $\int_\Gamma \frac{dz}{(z-a)^n} = 0$ si $a \notin \Omega$ et $n \geqslant 2$ car la forme $\frac{dz}{(z-a)^n}$ est exacte $\left(\text{c'est la différentielle de la fonction } z \mapsto -\frac{1}{(n-1)(z-a)^{n-1}}\right)$ et d'autre part $\int_\Gamma P\,dz = 0$ pour toute fonction polynomiale P, pour la même raison. Il est donc clair que (1) et (2) sont équivalentes.

Comme l'application $f \mapsto \int_\Gamma f dz$ est continue sur $\mathcal{H}(\Omega)$ d'après le corollaire 5.3.7, le lemme permettrait de conclure que si Γ est un cycle homologue à 0 dans Ω, alors $\int_\Gamma f dz = 0$ pour toute fonction $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, *si* on savait démontrer que les fonctions rationnelles sans pôles dans Ω sont denses dans $\mathcal{H}(\Omega)$. Ce dernier point est une conséquence du **théorème de Runge**, qui fera l'objet du chapitre 9.

7.3.2. Homologie et cohomologie

Notons $C_1(\Omega)$ l'ensemble des cycles dans Ω, et $\sim$ la relation d'homologie entre cycles. Il est clair que $\sim$ est une relation d'équivalence ; on note $H_1(\Omega)$ l'ensemble quotient $C_1(\Omega)/\sim$, et $[\Gamma]$ la classe d'un cycle $\Gamma \in C_1(\Omega)$.

L'opération d'addition définie sur $C_1(\Omega)$ est associative et « passe au quotient » : si $\Gamma_1 \sim \Gamma_1'$ et $\Gamma_2 \sim \Gamma_2'$, alors $\Gamma_1 + \Gamma_2 \sim \Gamma_1' + \Gamma_2'$. De plus, on a $\Gamma_1 + \Gamma_2 \sim \Gamma_2 + \Gamma_1$ pour tous cycles $\Gamma_1, \Gamma_2 \in C_1(\Omega)$, et si Γ_0 est un cycle associé à un lacet constant, alors $\Gamma_0 + \Gamma \sim \Gamma \sim \Gamma + \Gamma_0$ pour tout cycle Γ. Par passage au quotient, on en déduit qu'on munit $H_1(\Omega)$ d'une structure de groupe commutatif en posant $[\Gamma_1] + [\Gamma_2] = [\Gamma_1 + \Gamma_2]$. Le groupe $H_1(\Omega)$ est appelé le **premier groupe d'homologie** de l'ouvert Ω.

Si ω est une 1-forme fermée sur Ω, alors, d'après le théorème 7.2.1, l'application $\Gamma \mapsto \int_\Gamma \omega$ passe au quotient, et on a $\int_{\Gamma_1+\Gamma_2} \omega = \int_{\Gamma_1} \omega + \int_{\Gamma_2} \omega$ pour tous cycles $\Gamma_1, \Gamma_2 \in C_1(\Omega)$. Par conséquent, on définit un homomorphisme $I_\omega : H_1(\Omega) \to \mathbb{K}$ en posant $I_\omega([\Gamma]) = \int_\Gamma \omega$.

En notant $B^1(\Omega)$ l'espace vectoriel des 1-formes fermées sur Ω et $H_1(\Omega)^*$ l'espace vectoriel constitué par les homomorphismes de $H_1(\Omega)$ dans $\mathbb{K}$, l'application $I : \omega \mapsto I_\omega$ est visiblement une application linéaire de $B^1(\Omega)$ dans $H_1(\Omega)^*$. De plus, le noyau de I est l'ensemble des 1-formes ω vérifiant $\int_\Gamma \omega = 0$ pour tout cycle Γ dans Ω, c'est à dire l'ensemble des formes *exactes* sur Ω, qu'on a noté $Z^1(\Omega)$ au chapitre 2. On obtient donc le résultat suivant.

Lemme 7.3.2. *L'accouplement* $\langle \omega, \Gamma \rangle = \int_\Gamma \omega$ *définit, après passages aux quotients, un plongement linéaire de* $H^1(\Omega) = B^1(\Omega)/Z^1(\Omega)$ *dans* $H_1(\Omega)^*$.

Il se trouve que le plongement ainsi défini est en fait *surjectif* : tout homomorphisme de $H_1(\Omega)$ dans $\mathbb{K}$ provient d'une 1-forme fermée sur Ω. Ce résultat est tout à fait non trivial, et on ne le démontrera pas ici. Il découle de ce résultat que $H^1(\Omega)$ est « canoniquement » isomorphe à l'espace vectoriel « dual » $H_1(\Omega)^*$. Cela explique que l'on qualifie $H^1(\Omega)$ de groupe de *co*-homologie.

Exercices

7.1. Essayer de trouver un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$ et deux lacets dans Ω qui soient homologues dans Ω mais non homotopes dans Ω.

7.2. Le corollaire 7.2.3 est-il encore valable pour une 1-forme seulement supposée de classe $\mathcal{C}^1$ au voisinage de K_Γ ?

7.3. En utilisant l'exercice 6.41, montrer qu'on peut déduire la formule de Stokes de sa version homologique 7.2.3.

7.4. Si $\Gamma = \sum n_i\gamma_i$ est un cycle dans Ω et si f est une fonction continue sur Ω, on note $f \circ \Gamma$ le cycle $\sum n_i(f \circ \gamma_i)$. Montrer que si Γ_0 et Γ_1 sont deux cycles homologues dans Ω, alors $I(f \circ \Gamma_0, 0) = I(f \circ \Gamma_1, 0)$ pour toute fonction continue $f : \Omega \to \mathbb{C}^*$. On pourra commencer par supposer f de classe $\mathcal{C}^2$, en remarquant que dans ce cas, on a $I(f \circ \Gamma, 0) = \displaystyle\int_\Gamma \frac{df}{f}$ pour tout cycle Γ dans Ω.

7.5. Soient $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{C}$, et soit $\Omega = \mathbb{C}\backslash\{a_1; \dots; a_k\}$.

1) Soient $\overline{D}_1, \dots, \overline{D}_k$ des disques deux à deux disjoints de centres respectifs $a_1, \dots, a_k$. En utilisant l'exercice précédent et la proposition 5.4.23, montrer que si $f : \Omega \to \mathbb{C}^*$ est une application continue vérifiant $I(f \circ \partial D_i, 0) = 0$ pour tout $i \leqslant k$, alors f admet un logarithme continu.

2) Montrer que si $f : \Omega \to \mathbb{C}^*$ est continue, alors on peut trouver des entiers $n_1, \dots, n_k$ et une application continue $g : \Omega \to \mathbb{C}$ tels que

$$f(z) \equiv e^{g(z)} \prod_{i=1}^{k} (z - a_i)^{n_i} \ .$$

7.6. Soient $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$, et soit $\Omega = \mathbb{C}\backslash\{a_1; \dots; a_k\}$.

1) Montrer que le groupe $H_1(\Omega)$ est isomorphe à $\mathbb{Z}^n$ et exhiber une base de $H_1(\Omega)$ considéré comme $\mathbb{Z}$-module ; autrement dit, trouver $e_1, \dots, e_n \in H_1(\Omega)$ tels que $H_1(\Omega) = \mathbb{Z}e_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}e_n$.

2) Montrer que l'espace vectoriel $H^1(\Omega)$ est isomorphe à $\mathbb{K}^n$, et exhiber une base de $H^1(\Omega)$.

Chapitre 8

Résidus

8.1. Théorème des résidus

On sait que si f est une fonction holomorphe au voisinage d'un compact à bord régulier $K \subset \mathbb{C}$, alors l'intégrale de f sur le bord de K est nulle. Si on ne suppose plus f holomorphe au voisinage de K, mais seulement sur un ouvert contenant $K \setminus S$, où S est une partie finie de $\mathring{K}$, alors l'intégrale de f sur le bord de K n'est plus nécessairement nulle, mais elle peut cependant s'exprimer par une formule très simple faisant intervenir les points de S. C'est le contenu du **théorème des résidus**, que l'on va démontrer dans cette section.

Lemme 8.1.1. *Si f une fonction holomorphe dans une couronne $V = \{r_1 < |z| < r_2\}$, et si γ est un lacet dans V, alors*

$$\int_\gamma f dz = 2i\pi \, \mathrm{I}(\gamma, 0) \, c_{-1} \, ,$$

où c_{-1} est le coefficient de $\frac{1}{z}$ dans le développement de Laurent de f.

Preuve. Soit $f \in \mathcal{H}(V)$, $f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n z^n$, et soit γ un lacet dans V. Comme l'application $g \mapsto \int_\gamma g dz$ est continue sur $\mathcal{H}(V)$, on peut « intégrer terme à terme » pour obtenir $\int_\gamma f dz = \sum c_n \int_\gamma z^n dz$. Comme la forme $z^n dz$ est exacte sur $\mathbb{C}$ pour $n \neq -1$ $\left(\text{c'est la différentielle de la fonction } z \mapsto \frac{z^{n+1}}{n+1}\right)$ on en déduit $\int_\gamma f dz = c_{-1} \int_\gamma z^{-1} dz = c_{-1} \times 2i\pi \, \mathrm{I}(\gamma, 0)$.

Définition 8.1.2. *Soit $a \in \mathbb{C}$. Si f est une fonction holomorphe dans une couronne centrée en a, le* **résidu** *de f en a est le coefficient de $\frac{1}{z-a}$ dans le développement de Laurent de f au point a ; on le note* $\mathrm{Res}\,(f, a)$.

Théorème 8.1.3. (Théorème des résidus.)

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et soit f une fonction holomorphe dans $\Omega \setminus S$ où S est un sous-ensemble de Ω sans point d'accumulation dans Ω. Soit également $K \subset \Omega$ un compact à bord régulier, et supposons que ∂K ne

contienne aucun point de S. *Alors* S *n'a qu'un nombre fini de points dans* K, *et on a*

$$\int_{\partial K} f dz = 2i\pi \sum_{a \in S \cap K} \mathrm{Res}\,(f, a)\,.$$

Preuve. Comme S n'a pas de point d'accumulation dans Ω, $S \cap K$ est fini par compacité de K.

Par hypothèse, les points de $S \cap K$ sont tous dans $\mathring{K}$. On peut donc trouver $r > 0$ tel que les disques fermés $\overline{D}(a, r)$, $a \in S \cap K$, sont deux à deux disjoints et tous contenus dans $\mathring{K}$. Posons alors $L = K \backslash \bigcup_{a \in S \cap K} D(a, r)$. Par définition, L est un compact à bord régulier, avec $\partial L = \partial K \bigcup \left(\bigcup_{a \in S \cap K} \partial D(a, r)\right)$. Comme f est holomorphe au voisinage de L, on a $\int_{\partial L} f dz = 0$ d'après le théorème de Cauchy, autrement dit

$$\int_{\partial K} f dz - \sum_{a \in S \cap K} \int_{\partial D(a,r)} f dz = 0\,,$$

d'où le résultat puisque $\int_{\partial D(a,r)} f dz = 2i\pi\,\mathrm{Res}\,(f, a)$ pour tout $a \in S \cap K$ d'après 8.1.1.

En utilisant le théorème de Cauchy homologique plutôt que le théorème de Cauchy et en reprenant la démonstration précédente, on obtient une autre version du théorème des résidus.

Théorème 8.1.4. (Théorème des résidus « homologique ».)

Soit Ω *un ouvert de* $\mathbb{C}$, *et soit* f *une fonction holomorphe dans* $\Omega \backslash F$, *où* F *est un ensemble fini. Soit également* Γ *un cycle dans* $\Omega \backslash F$, *et supposons que* Γ *soit homologue à* 0 *dans* Ω. *Alors on a*

$$\int_{\Gamma} f dz = 2i\pi \sum_{a \in F} I(\Gamma, a)\,\mathrm{Res}\,(f, a)\,.$$

Preuve. Choisissons des disques fermés $\overline{D}_a$, $a \in F$ deux à deux disjoints, disjoints de $\mathrm{Im}(\Gamma)$ et contenus dans Ω, chaque D_a étant bien sûr centré en a. Pour $a \in F$, posons $n_a = I(\Gamma, a)$. Alors le cycle $\Lambda = \Gamma - \sum_{a \in F} n_a \partial D_a$ est homologue à 0 dans $\Omega \backslash F$, donc $\int_\Lambda f dz = 0$, ce qui donne le résultat souhaité.

8.2. Calcul pratique d'un résidu

Soit $a \in \mathbb{C}$, et soit f une fonction holomorphe dans un voisinage épointé de a.

Supposons que a soit un pôle simple de f. On peut alors écrire

$$f(z) = \frac{g(z)}{z - a}\,,$$

où g est holomorphe au voisinage de a et $g(a) \neq 0$.

En notant $\sum_{n\geqslant 0} c_n(z-a)^n$ le développement en série entière de g au voisinage de a, le coefficient de $\frac{1}{z-a}$ dans le développement de Laurent de f est égal à $c_0 = g(a)$. On a donc

$$\operatorname{Res}(f,a) = g(a) = \lim_{z\to a}(z-a)f(z)\ .$$

Si f est donnée au voisinage de a par

$$f(z) = \frac{u(z)}{v(z)}\ ,$$

avec u et v holomorphes au voisinage de a, $u(a) \neq 0$ et a zéro simple de v, cela s'écrit encore :

$$\operatorname{Res}(f,a) = \frac{u(a)}{v'(a)}\ .$$

Supposons, plus généralement, que a soit un pôle d'ordre k de f, $k \geqslant 1$. On a alors

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-a)^k}\ ,$$

où g est une fonction holomorphe au voisinage de a et $g(a) \neq 0$. En écrivant comme précédemment $g(z) = \sum_{n\geqslant 0} c_n(z-a)^n$, on constate que le coefficient de $\frac{1}{z-a}$ dans le développement de Laurent de f est égal à $c_{k-1} = \frac{g^{(k-1)}(a)}{(k-1)!}$. Ainsi,

$$\operatorname{Res}(f,a) = c_{k-1}(g)\ .$$

Pour calculer $c_{k-1}(g)$, on peut bien sûr essayer de dériver $(k-1)$ fois la fonction g puisque $c_{k-1}(g) = \frac{g^{k-1}(a)}{(k-1)!}$. Ce n'est toutefois pas toujours la méthode la plus économique, en particulier si k est grand. Il est souvent beaucoup plus rapide de calculer $c_{k-1}(g)$ en déterminant directement le développement en série entière de $g(z) = (z-a)^k f(z)$ au voisinage de a.

8.3. Dénombrement de zéros et de pôles ; applications

8.3.1. Principe de l'argument, théorème de Rouché

Supposons que f soit une fonction méromorphe dans un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$ et que $a \in \Omega$ soit un zéro d'ordre fini ou un pôle de f, avec multiplicité m. En posant $n = m$ si a est un zéro de f, et $n = -m$ si a est un pôle, on peut écrire

$$f(z) = (z-a)^n g(z)\ ,$$

où g est holomorphe au voisinage de a et $g(a) \neq 0$. On a alors

$$\frac{f'}{f} = \frac{n}{z-a} + \frac{g'}{g} ,$$

ce qui prouve que a est un pôle simple de $\frac{f'}{f}$, avec $\mathrm{Res}\left(\frac{f'}{f}, a\right) = n$. En résumé :

Remarque 8.3.1. *Si f est une fonction méromorphe dans Ω et si a est un zéro d'ordre fini ou un pôle de f, alors a est un pôle simple de la dérivée logarithmique $\frac{f'}{f}$, et $\mathrm{Res}\left(\frac{f'}{f}, a\right)$ est égal à la multiplicité de a comme zéro ou comme pôle de f, comptée positivement si a est un zéro et négativement si a est un pôle.*

En appliquant le théorème des résidus à la fonction $\frac{f'}{f}$, on en déduit le résultat suivant, qui porte le nom de **principe de l'argument** car en paramétrant $\partial \mathrm{K}$ par des lacets $\gamma_1, \ldots, \gamma_m$ positivement orientés relativement à $\mathring{\mathrm{K}}$, le premier membre de la formule s'interprète comme la somme des variations de l'argument le long des lacets $f \circ \gamma_j$.

Proposition 8.3.2. (Principe de l'argument.)
Soit Ω un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et soit f une fonction méromorphe non constante dans Ω. Soit également $\mathrm{K} \subset \Omega$ un compact à bord régulier, et supposons que f n'ait aucun zéro et aucun pôle sur $\partial \mathrm{K}$. Alors on a

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\partial \mathrm{K}} \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = \mathrm{Z} - \mathrm{P} ,$$

où Z désigne la somme des multiplicités des zéros de f contenus dans K et P désigne la somme des multiplicités des pôles de f contenus dans K.

Corollaire 8.3.3. *Soit Ω un ouvert connexe de $\mathbb{C}$, et soit $\mathrm{K} \subset \Omega$ un compact à bord régulier. Posons*

$$\mathcal{U} = \{(f, w) \in \mathcal{H}(\Omega) \times \mathbb{C};\ f \text{ est non constante et } w \notin f(\partial \mathrm{K})\ \}$$

et pour $(f, w) \in \mathcal{U}$, notons $n_{\mathrm{K}}(f, w)$ le nombre de solutions de l'équation $f(z) = w$ dans K, comptées avec leurs multiplicités. Alors l'application $(f, w) \mapsto n_{\mathrm{K}}(f, w)$ est continue sur $\mathcal{U}$.

Preuve. Pour $(f, w) \in \mathcal{U}$, le principe de l'argument appliqué à $f - w$ donne

$$n_{\mathrm{K}}(f, w) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial \mathrm{K}} \frac{f'(z)}{f(z) - w}\, dz .$$

Il suffit donc de remarquer que si (f_n, w_n) tend vers (f, w) dans $\mathcal{U}$, alors $\frac{f_n'(z)}{f_n(z) - w_n}$ tend vers $\frac{f'(z)}{f(z) - w}$ uniformément sur $\partial \mathrm{K}$.

Corollaire 8.3.4. *Avec les notations de* 8.3.3, *paramétrons* K *par des lacets* $\gamma_1, \dots, \gamma_m$ *positivement orientés relativement à* $\mathring{\mathrm{K}}$. *Si* $(f, w) \in \mathcal{U}$, *alors*

$$n_{\mathrm{K}}(f, w) = \sum_{j=1}^{m} \mathrm{I}(f \circ \gamma_j, w) \ .$$

Ainsi, le nombre de solutions de l'équation $f(z) = w$ *dans* K *est égal au nombre de tours effectués par* $f(\zeta)$ *autour de* w *quand* ζ *décrit le bord de* K.

Preuve. On a $n_{\mathrm{K}}(f, w) = \frac{1}{2i\pi} \sum_j \int_{\gamma_j} \frac{f'(z)}{f(z)-w}\, dz$, et $\int_{\gamma_j} \frac{f'(z)}{f(z)-w}\, dz = \int_{f\circ\gamma_j} \frac{d\zeta}{\zeta - w}$ pour tout $j \leqslant m$.

Corollaire 8.3.5. (Théorème de Rouché.)
Soient f, g *deux fonctions holomorphes non constantes dans un ouvert connexe* $\Omega \subset \mathbb{C}$, *et soit* $\mathrm{K} \subset \Omega$ *un compact à bord régulier. On suppose qu'on a* $|f(z) - g(z)| < |f(z)| + |g(z)|$ *sur* $\partial\mathrm{K}$. *Alors* f *et* g *ont le même nombre de zéros dans* K *(comptés avec leurs multiplicités).*

Preuve. La condition $|f(z) - g(z)| < |f(z)| + |g(z)|$ entraîne que ni f, ni g ne s'annule sur $\partial\mathrm{K}$. Paramétrons $\partial\mathrm{K}$ par des lacets $\gamma_1, \dots, \gamma_m$, et posons $\lambda_j = f \circ \gamma_j$, $\nu_j = g \circ \gamma_j$ $(1 \leqslant j \leqslant m)$. D'après le corollaire précédent, on a $n_{\mathrm{K}}(f, 0) = \sum_j \mathrm{I}(\lambda_j, 0)$ et $n_{\mathrm{K}}(g, 0) = \sum_j \mathrm{I}(\nu_j, 0)$. D'autre part, comme $|\nu_j - \lambda_j| < |\lambda_j| + |\nu_j|$, les lacets λ_j et ν_j sont homotopes dans $\mathbb{C}^*$ (corollaire 5.3.3), donc $\mathrm{I}(\lambda_j, 0) = \mathrm{I}(\nu_j, 0)$ pour tout $j \leqslant m$. Cela termine la démonstration.

8.3.2. Comportement local d'une fonction holomorphe

Si k est un entier strictement positif, on sait que pour tout nombre complexe $w \neq 0$, l'équation $z^k = w$ admet exactement k solutions distinctes, et que de plus ces solutions sont proches de 0 si w est proche de 0 car elles ont pour module $|w|^{1/k}$. Le théorème suivant généralise ce fait, et montre qu'au voisinage d'un zéro de multiplicité k, toute fonction holomorphe se comporte comme la fonction $z \mapsto z^k$.

Théorème 8.3.6. *Soit* f *une fonction holomorphe au voisinage d'un point* $a \in \mathbb{C}$, *et supposons que* a *soit une racine d'ordre fini* $k \geqslant 0$ *de l'équation* $f(z) = b$. *Alors, pour tout voisinage* U *de* a, *on peut trouver un voisinage* V *de* a *contenu dans* U *et un voisinage* W *de* b *vérifiant la propriété suivante : pour tout point* $w \in \mathrm{W}$, *l'équation* $f(z) = w$ *possède exactement* k *solutions dans* V, *ces solutions étant toutes simples si* $w \neq b$.

Preuve. D'après le principe des zéros isolés, on peut trouver un disque ouvert $V \subset U$ centré en a vérifiant les propriétés suivantes : f est holomorphe au voisinage de $\overline{V}$, a est la seule racine de l'équation $f(z) = b$ dans $\overline{V}$ et f' ne s'annule pas dans $V\backslash\{a\}$.

Par le choix de V, le point b n'appartient pas à $f(\partial V)$; soit W la composante connexe de $\mathbb{C}\backslash f(\partial V)$ contenant b. D'après le corollaire 8.3.3, $n_{\overline{V}}(f, w)$ dépend continûment de $w \in W$, et reste donc constant sur W par connexité ; autrement dit, pour $w \in W$, l'équation $f(z) = w$ a exactement k racines dans $\overline{V}$, si on les compte avec leur multiplicité. Ces solutions appartiennent en fait à V puisque $w \notin f(\partial V)$; et si $w \neq b$, elles sont différentes de a, et sont donc toutes simples car f' ne s'annule pas sur $V\backslash\{a\}$.

Corollaire 8.3.7. (Théorème de l'image ouverte.)
Une fonction holomorphe non constante sur un ouvert connexe est une application ouverte.

Preuve. On a déjà démontré ce résultat au chapitre 4 comme application du principe du maximum ; en voici une autre preuve.

Soit Ω un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorphe non constante ; soit également U un ouvert de Ω. Si $a \in U$, alors a est racine de l'équation $f(z) = f(a)$ avec multiplicité au moins égale à 1. D'après le théorème précédent, pour tout point w voisin de $f(a)$, l'équation $f(z) = w$ admet au moins une solution dans U ; autrement dit, $f(a)$ est intérieur à $f(U)$.

Corollaire 8.3.8. *Si $f : \Omega \to \mathbb{C}$ est holomorphe et injective, alors f' ne s'annule jamais et f^{-1} est holomorphe sur l'ouvert $\Omega' = f(\Omega)$.*

Preuve. Le fait que Ω' soit ouvert découle du théorème de l'image ouverte car la fonction f n'est constante sur aucune composante connexe de Ω.

L'injectivité de f signifie que pour tout point $w \in \mathbb{C}$, l'équation $f(z) = w$ ne peut pas admettre plusieurs racines différentes. D'après le théorème 8.3.6, on en déduit qu'aucun point $a \in \Omega$ ne peut être racine de l'équation $f(z) = f(a)$ avec multiplicité strictement plus grande que 1. Autrement dit, f' ne s'annule jamais.

Posons $g = f^{-1}$. Comme f' ne s'annule jamais, il découle du théorème d'inversion locale que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω'. On a $f \circ g(z) \equiv z$ dans Ω', et donc $d(f \circ g) = dz$, ce qui s'écrit $(f' \circ g)\, dg = dz$, ou encore $dg = \dfrac{dz}{f' \circ g}$. La fonction g est donc holomorphe, avec $g' = \dfrac{1}{f' \circ g}$.

8.3.3. Suites de fonctions holomorphes

Comme applications du corollaire 8.3.3, on va maintenant prouver deux résultats importants concernant les suites de fonctions holomorphes.

Théorème 8.3.9. *Soit Ω un ouvert connexe de $\mathbb{C}$, et soit (f_n) une suite de fonctions holomorphes dans Ω convergeant dans $\mathcal{H}(\Omega)$ vers une fonction f. On suppose que les fonctions f_n ne s'annulent pas dans Ω. Alors ou bien f ne s'annule pas dans Ω, ou bien f est identiquement nulle.*

Preuve. On peut visiblement supposer f non constante, ce qui entraîne que les f_n sont également non constantes pour n assez grand.

Fixons un point $a \in \Omega$. D'après le principe des zéros isolés, on peut trouver un disque ouvert D centré en a tel que $\overline{\mathrm{D}} \subset \Omega$ et f ne s'annule pas sur $\partial\mathrm{D}$. Comme f_n tend vers f dans $\mathcal{H}(\Omega)$, le corollaire 8.3.3 permet de trouver un entier n_0 tel que f et f_{n_0} ont le même nombre de zéros dans $\overline{\mathrm{D}}$, à savoir 0. Ainsi, f ne s'annule en aucun point $a \in \Omega$.

Autre preuve. La démonstration qui suit n'utilise pas le théorème des résidus.

Supposons f non identiquement nulle, fixons un point $a \in \Omega$, et choisissons un disque ouvert D centré en a tel que $\overline{\mathrm{D}} \subset \Omega$ et f ne s'annule pas sur $\partial\mathrm{D}$. Alors $\varepsilon = \inf_{\partial\mathrm{D}} |f(\zeta)|$ est strictement positif, et comme $f_n(\zeta)$ tend vers $f(\zeta)$ uniformément sur $\partial\mathrm{D}$, on peut trouver un entier N tel que $\inf_{\partial\mathrm{D}} |f_n(\zeta)| \geqslant \varepsilon/2$ pour $n \geqslant \mathrm{N}$. D'après le principe du maximum appliqué à $1/f_n$, on en déduit $|f_n(a)| \geqslant \varepsilon/2$ pour $n \geqslant \mathrm{N}$, et donc $f(a) \neq 0$.

Corollaire 8.3.10. *(Ω connexe.) Soit X une partie quelconque de $\mathbb{C}$, et soit $\mathcal{F} = \{f \in \mathcal{H}(\Omega);\ f(\Omega) \subset \mathrm{X}\}$. Si $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ est dans l'adhérence de $\mathcal{F}$ pour la topologie de $\mathcal{H}(\Omega)$, alors ou bien f est constante, ou bien $f \in \mathcal{F}$.*

Preuve. Pour chaque point $b \in \mathbb{C}\backslash\mathrm{X}$, on applique le théorème précédent à la fonction $f - b$.

Théorème 8.3.11. (Théorème de Hurwitz.)
Soit Ω un ouvert connexe de $\mathbb{C}$, et soit (f_n) une suite de fonctions holomorphes injectives convergeant dans $\mathcal{H}(\Omega)$ vers une fonction f. Alors, ou bien f est injective, ou bien f est constante.

Preuve. Supposons que f ne soit pas injective, et fixons $a_1, a_2 \in \Omega$, $a_1 \neq a_2$, tels que $f(a_1) = f(a_2) = b$. On est alors dans la situation suivante : l'ouvert $\Omega\backslash\{a_1\}$ est connexe car Ω est connexe, les fonctions $f_n - f_n(a_1)$ ne s'annulent jamais sur $\Omega\backslash\{a_1\}$ par injectivité des f_n, et ces

fonctions convergent dans $\mathcal{H}(\Omega\backslash\{a_1\})$ vers la fonction $f-b$ qui s'annule en a_2. D'après le théorème 8.3.9, on a $f \equiv b$ dans $\Omega\backslash\{a_1\}$, et donc dans Ω tout entier par continuité.

8.4. Exemples de calculs d'intégrales

Le théorème des résidus peut se révéler redoutablement efficace pour calculer des intégrales. On va donner ici quelques exemples d'illustration de la « méthode des résidus ».

8.4.1. Intégrales trigonométriques

Soit $\mathrm{R}(\mathrm{X},\mathrm{Y})$ une fraction rationnelle à deux indéterminées dont le dénominateur ne s'annule pas sur le cercle unité $x^2+y^2=1$, et considérons l'intégrale

$$\mathrm{I} = \int_0^{2\pi} \mathrm{R}(\cos t, \sin t)\, dt\ .$$

Si on pose $z = z(t) = e^{it}$, alors $\cos t = \frac{1}{2}(z+\frac{1}{z})$, $\sin t = \frac{1}{2i}(z-\frac{1}{z})$ et $dz = ie^{it}dt = izdt$. On peut donc écrire $\mathrm{I} = \int_{\partial\mathbb{D}} f dz$, où f est la fonction rationnelle sans pôles sur $\partial\mathbb{D}$ définie par

$$f(z) = \frac{1}{iz}\,\mathrm{R}\left(\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right)\right)\ .$$

En notant $\mathcal{P}$ l'ensemble des pôles de f, on obtient donc, d'après le théorème des résidus :

$$\mathrm{I} = 2i\pi \sum_{a\in\mathcal{P}\cap\mathbb{D}} \mathrm{Res}(f,a)\,.$$

Exemple. Calculons $\mathrm{I} = \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a+\sin t}$, $a>1$.

Avec les notations précédentes, on a $a+\sin t = \frac{z^2+2iaz-1}{2iz}$, et donc $f(z) = \frac{2}{z^2+2iaz-1}$.

L'équation $z^2+2iaz-1=0$ a pour solutions $p = -ia+i\sqrt{a^2-1}$ et $q = -ia-i\sqrt{a^2-1}$; le seul pôle de f contenu dans $\mathbb{D}$ est donc p. Comme $f(z) = \frac{2}{(z-p)(z-q)}$, on a $\mathrm{Res}(f,p) = \frac{2}{p-q} = \frac{1}{i\sqrt{a^2-1}}$, et on en déduit la valeur de I :

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a+\sin t} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}\ .$$

8.4.2. Intégrale d'une fonction rationnelle sans pôles réels

Soit $f = \mathrm{P}/\mathrm{Q}$ une fonction rationnelle sans pôles réels, avec $\deg(\mathrm{Q}) \geqslant 2+\deg(\mathrm{P})$. L'intégrale

$$\mathrm{I} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$$

est alors absolument convergente.

Pour $r > 0$, notons D_r le disque $\mathrm{D}(0,r)$, et soit Γ_r un paramétrage (positif) du demi-cercle $\partial\mathrm{D}_r \cap \{\mathrm{Im}(z) \geqslant 0\}$. Si r est suffisamment grand, D_r contient tous les pôles de f. D'après le théorème des résidus, on a donc

$$\int_{-r}^{+r} f(t)\,dt + \int_{\Gamma_r} f(z)\,dz = 2i\pi \sum_{a\in\mathcal{P}^+} \mathrm{Res}\,(f,p)$$

pour tout r suffisamment grand, où on a noté $\mathcal{P}^+$ l'ensembles des pôles de f à partie imaginaire strictement positive.

La première intégrale tend vers I quand r tend vers $+\infty$.

D'autre part, on a $|\int_{\Gamma_r} f(z)\,dz| \leqslant \int_{\Gamma_r} |f(z)||dz| \leqslant \pi r \mathrm{M}(r)$, où $\mathrm{M}(r) = \sup\{|f(z)|;\ |z| = r\}$. Comme $\deg(\mathrm{Q}) \geqslant 2 + \deg(\mathrm{P})$, on a $\mathrm{M}(r) = \mathrm{O}(1/r^2)$, et on en déduit que $\int_{\Gamma_r} f(z)\,dz$ tend vers 0 quand r tend vers $+\infty$. Au total, on obtient donc

$$\mathrm{I} = 2i\pi \sum_{a\in\mathcal{P}^+} \mathrm{Res}\,(f,a).$$

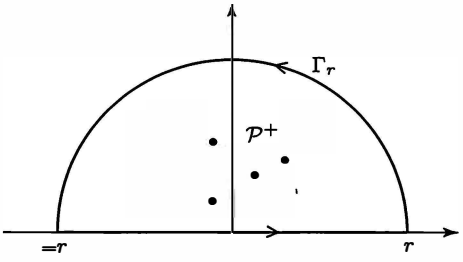


FIG. 36.

Exemple. Calculons $\mathrm{I} = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^6} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{1+t^6}$.

Les pôles de $f(z) = \frac{1}{1+z^6}$ sont les racines sixièmes de -1, et ceux situés dans le demi-plan supérieur sont $e^{i\pi/6}, e^{i\pi/2}$ et $e^{i5\pi/6}$; de plus, si a est un pôle de f, alors $\mathrm{Res}\,(f,a) = \dfrac{1}{6a^5} = -\dfrac{a}{6}$. On obtient donc $\mathrm{I} = -\dfrac{i\pi}{6}(e^{i\pi/6} + e^{i\pi/2} + e^{i5\pi/6}) = \dfrac{\pi}{6}(2\sin\dfrac{\pi}{6} + 1)$. Ainsi :

$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^6} = \frac{\pi}{3}\,.$$

8.4.3. Intégrales de Fourier

Soit f une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$, et soit φ sa transformée de Fourier inverse, définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\varphi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{ixt}\, dt\,.$$

Sous certaines hypothèses, le théorème des résidus permet de calculer très facilement $\varphi(\alpha)$ pour $\alpha > 0$.

Notons $\mathbf{U}$ le demi-plan supérieur $\{\mathrm{Im}(z) > 0\}$, et supposons que f se prolonge en une fonction – encore notée f – holomorphe au voisinage de $\overline{\mathbf{U}}\backslash \mathrm{A}$, où A est une partie finie de $\mathbf{U}$. On fait de plus l'hypothèse que $f(z)$ tend vers 0 quand $|z|$ tend vers l'infini, $z \in \overline{\mathbf{U}}$. On va montrer que sous ces hypothèses, on a

$$\varphi(\alpha) = 2i\pi \sum_{a\in \mathrm{A}} \mathrm{Res}\,(f(z)e^{i\alpha z},\, a)$$

pour tout $\alpha > 0$. Dans la suite, on fixe un tel α

Si $\mathrm{R} > 0$ est suffisamment grand, alors tous les points de A sont contenus dans le demi-disque $\mathrm{D}(0,\mathrm{R}) \cap \mathbf{U}$. D'après le théorème des résidus, on a alors

$$2i\pi \sum_{a\in \mathrm{A}} \mathrm{Res}\,(f(z)e^{i\alpha z},\, a) = \int_{-\mathrm{R}}^{\mathrm{R}} f(t)e^{i\alpha t}\, dt + \int_{\Gamma_{\mathrm{R}}} f(z)e^{i\alpha z}\, dz\,,$$

où on a noté Γ_{R} le demi-cercle $\partial\mathrm{D}(0,\mathrm{R}) \cap \overline{\mathbf{U}}$, orienté dans le sens trigonométrique.

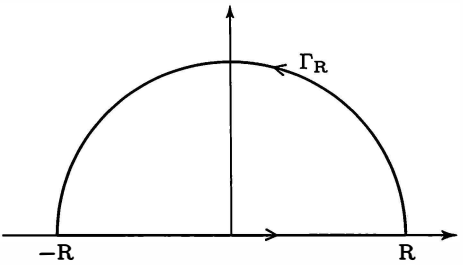


FIG. 37.

Si $z = \mathrm{R}e^{i\theta} \in \Gamma_{\mathrm{R}}$, alors $|e^{i\alpha z}| = e^{-\alpha \mathrm{Im}(z)} = e^{-\alpha \mathrm{R}\sin\theta}$. On a donc

$$\left|\int_{\Gamma_{\mathrm{R}}} f(z)e^{i\alpha z}dz\right| \leqslant \int_0^{\pi} \left|f(\mathrm{R}e^{i\theta})\right| e^{-\mathrm{R}\sin\theta}\mathrm{R}\, d\theta \leqslant \mathrm{R}M_f(\mathrm{R}) \int_0^{\pi} e^{-\mathrm{R}\sin\theta}\, d\theta\,,$$

où $M_f(R) = \sup\{|f(z)|;\ z \in \Gamma_R\}$.

On a $\int_0^\pi e^{-\alpha R \sin\theta} d\theta = 2\int_0^{\pi/2} e^{-\alpha R \sin\theta} d\theta$, et comme $\sin\theta \geqslant \frac{2}{\pi}\theta$ si $\theta \in [0\,;\pi/2]$, on en déduit $\int_0^\pi e^{-\alpha R \sin\theta} d\theta \leqslant 2\int_0^{\pi/2} e^{-2\alpha R\theta/\pi} d\theta = \frac{\pi}{2\alpha R}(1-e^{-R})$. Au total, on obtient

$$\left| \int_{\Gamma_R} f(z)\, e^{i\alpha z} dz \right| \leqslant \frac{\pi M_f(R)}{2\alpha}\,.$$

Par hypothèse sur f, on a donc $\lim_{R\to\infty}(\int_{\Gamma_R} f(z)e^{i\alpha z}dz) = 0$, d'où la formule souhaitée :

$$\varphi(\alpha) = 2i\pi \sum_{a\in A} \mathrm{Res}\,(f(z)e^{i\alpha z},\, a)\,.$$

Exemple. Calculons $I(x) = \displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos xt}{1+t^2}\, dt$ pour $x \in \mathbb{R}$.

La fonction I est visiblement paire, et $I(0) = \int_0^\infty \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{2}$.

Pour $x = \alpha > 0$, on a $I(\alpha) = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\alpha t}}{1+t^2}\, dt\right)$. La fonction $t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$ vérifie les hypothèses précédentes, et comme $\mathrm{Res}(\frac{e^{i\alpha z}}{1+z^2}, i) = \frac{e^{-\alpha}}{2i}$, on en déduit $I(\alpha) = \frac{\pi}{2}e^{-\alpha}$. Au total,

$$I(x) = \frac{\pi}{2}\, e^{-|x|}$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$.

8.4.4. Formule des compléments ; prolongement méromorphe de ζ à $\mathbb{C}$

On a vu chapitre 4 que la fonction Γ vérifie l'équation fonctionnelle

$$\Gamma(z)\,\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}$$

pour $0 < \mathrm{Re}(z) < 1$.

On va donner ici une autre preuve de ce résultat, basée sur le lemme suivant.

Lemme 8.4.1. *Pour tout $\alpha \in]0\,;1[$, on a* $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dt}{t^\alpha(1+t)} = \frac{\pi}{\sin \pi\alpha}\,.$

Preuve. Fixons $\alpha \in]0\,;1[$ et posons $I_\alpha = \int_0^\infty \frac{dt}{t^\alpha(1+t)}$; I_α est bien définie comme intégrale d'une fonction mesurable positive, et on a $I_\alpha < +\infty$ car la fonction $u : t \mapsto \frac{t}{t^\alpha(1+t)}$ est continue sur $]0\,;+\infty[$ (donc localement intégrable), $u(t) \sim \frac{1}{t^\alpha}$ au voisinage de 0, et $u(t) \sim \frac{1}{t^{\alpha+1}}$ en $+\infty$.

Soit $\Omega = \mathbb{C}\backslash[0;+\infty[$, et soit f la fonction définie sur $\Omega\backslash\{-1\}$ par

$$f(z) = \frac{1}{z^\alpha(1+z)},$$

où $z^\alpha = r^\alpha e^{i\alpha\theta}$ si $z = re^{i\theta}$, $0 < \theta < 2\pi$.

La fonction f est holomorphe dans $\Omega\backslash\{-1\}$ et possède un pôle simple en -1, avec

$$\operatorname{Res}(f,-1) = \frac{1}{(-1)^\alpha} = e^{-i\pi\alpha}.$$

Pour ε, R vérifiant $0 < \varepsilon < 1 < R$, notons $K_{\varepsilon R}$ le compact à bord régulier délimité par le demi-cercle $C_\varepsilon = \{|z| = \varepsilon,\ \operatorname{Re}(z) \leqslant 0\}$, les deux segments $I^+_{\varepsilon R} = [i\varepsilon; i\varepsilon + \sqrt{R^2-\varepsilon^2}]$, $I^-_{\varepsilon R} = [-i\varepsilon; -i\varepsilon + \sqrt{R^2-\varepsilon^2}]$, et l'arc de cercle $\Gamma_{\varepsilon R} = \{Re^{i\theta};\ \theta \in [-\pi;\pi],\ |\theta| \geqslant \theta_{\varepsilon R}\}$, où $\theta_{\varepsilon R} = \arctan(\varepsilon/\sqrt{R^2-\varepsilon^2})$.

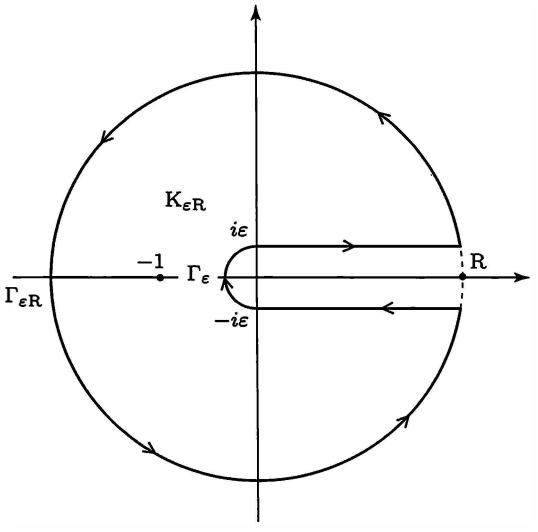


FIG. 38.

Comme $-1 \in \mathring{K}_{\varepsilon R}$, le théorème des résidus donne

$$\int_{\partial K_{\varepsilon R}} f(z)\,dz = 2i\pi\, e^{-i\pi\alpha}$$

pour tout couple (ε, R).

Quand ε tend vers 0, l'intégrale $\int_{C_\varepsilon} f(z)\,dz$ tend vers 0 car

$$\left|\int_{C_\varepsilon} f(z)\,dz\right| \leqslant \frac{1}{\varepsilon^\alpha(1-\varepsilon)} \times \pi\varepsilon = \frac{\pi\varepsilon^{1-\alpha}}{1-\varepsilon}$$

et $\alpha < 1$; l'intégrale $\int_{\Gamma_{\varepsilon R}} f(z)\,dz$, qui est égale à $\int_{\theta_{\varepsilon R}}^{2\pi-\theta_{\varepsilon R}} iR^{1-\alpha}\frac{e^{i(1-\alpha)\theta}}{1+Re^{i\theta}}\,d\theta$, tend pour sa part vers $\int_0^{2\pi} iR^{1-\alpha}\frac{e^{i(1-\alpha)\theta}}{1+Re^{i\theta}}\,d\theta$ d'après le théorème de convergence dominée.

Si $t \in]0;+\infty[$, alors $(t+i\varepsilon)^\alpha$ tend vers t^α et $(t-i\varepsilon)^\alpha$ tend vers $e^{2i\pi\alpha}t^\alpha$ quand ε tend vers 0^+, car l'argument de $t+i\varepsilon$ tend vers 0 et celui de $t-i\varepsilon$ tend vers 2π. Comme de plus $|f(t+iy)| \leqslant \frac{1}{t^\alpha(1+t)}$ pour tout $y \in \mathbb{R}$ et comme la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha(1+t)}$ est intégrable sur $]0;R]$, on en déduit, à l'aide du théorème de convergence dominée, que les intégrales $\int_{I_{\varepsilon R}^+} f(z)\,dz$ et $\int_{I_{\varepsilon R}^-} f(z)\,dz$ tendent respectivement vers $\int_0^R \frac{dt}{t^\alpha(1+t)}$ et $e^{-2i\pi\alpha}\int_0^R \frac{dt}{t^\alpha(1+t)}$ quand ε tend vers 0.

Compte tenu des conventions d'orientation, on obtient donc

$$(1-e^{-2i\pi\alpha})\int_0^R \frac{dt}{t^\alpha(1+t)} + i\int_0^{2\pi} \frac{R^{1-\alpha}e^{i(1-\alpha)\theta}}{1+Re^{i\theta}}\,d\theta = 2i\pi\, e^{-i\pi\alpha}$$

pour tout $R > 1$.

Si $\theta \in [0;2\pi]$, alors $|\frac{R^{1-\alpha}e^{i(1-\alpha)\theta}}{1+Re^{i\theta}}| \leqslant \frac{R^{1-\alpha}}{R-1}$. Comme $\alpha > 0$, on en déduit que la deuxième intégrale du membre de gauche tend vers 0 quand R tend vers $+\infty$, et on obtient ainsi

$$(1-e^{-2i\pi\alpha})I_\alpha = 2i\pi\, e^{-i\pi\alpha}\,,$$

d'où finalement $I_\alpha = \frac{\pi}{\sin\pi\alpha}$.

Démontrons maintenant la formule des compléments. D'après le principe des zéros isolés, il suffit de vérifier qu'on a $\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)}$ pour tout $\alpha \in]0;1[$; fixons un tel α.

D'après le théorème de Fubini, on a

$$\Gamma(\alpha)\,\Gamma(1-\alpha) = \int_U t^{\alpha-1}s^{-\alpha}e^{-s-t}\,dt\,ds = \int_U \left(\frac{t}{s}\right)^\alpha e^{-(s+t)}\,ds\,\frac{dt}{t}\,,$$

où U est le quart de plan $\{(t\,,s) \in \mathbb{R}^2;\ s>0\,, t>0\}$.

L'application $\varphi : (t\,,s) \mapsto (u\,,v) = (s+t\,,\frac{t}{s})$ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de U sur U, d'inverse $(u\,,v) \mapsto (\frac{uv}{1+v}\,,\frac{u}{1+v})$. Un calcul laissé en exercice montre que le jacobien de φ^{-1} en un point $(u\,,v) = \varphi(t\,,s)$ vaut $-\frac{u}{(1+v)^2} = -\frac{t}{v(1+v)}$. D'après le théorème de changement de variables, on a donc

$$\Gamma(\alpha)\,\Gamma(1-\alpha) = \int_U \frac{1}{v^{1-\alpha}(1+v)}\,e^{-u}\,du\,dv = \int_0^{+\infty} \frac{dv}{v^{1-\alpha}(1+v)}\,,$$

d'où $\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = \frac{\pi}{\sin\pi(1-\alpha)} = \frac{\pi}{\sin\pi\alpha}$ d'après le lemme 8.4.1.

Grâce à la formule des compléments, on va maintenant montrer que la fonction ζ se prolonge méromorphiquement au plan tout entier.

Théorème 8.4.2. *La fonction ζ se prolonge en une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$, avec comme seul pôle le point $s = 1$. Ce pôle est simple, et on a* $\mathrm{Res}(\zeta, 1) = 1$.

La démonstration utilise le prolongement méromorphe de la fonction Γ dont on a démontré l'existence au chapitre 4. On notera encore Γ ce prolongement.

Remarque 8.4.3. *Si $\alpha > 0$, alors la fonction $t \mapsto \frac{t^\alpha}{e^t-1}$ est intégrable sur* $]0;+\infty[$.

Preuve. On a $\frac{t^\alpha}{e^t-1} \sim t^{\alpha-1}$ au voisinage de 0, et $\frac{t^\alpha}{e^t-1} = o(\frac{1}{t^2})$ en $+\infty$.

Lemme 8.4.4. *Si $s > 1$, alors* $\Gamma(s)\,\zeta(s) = \displaystyle\int_0^\infty \frac{t^{s-1}}{e^t-1}\,dt$.

Preuve. Le changement de variables $u = nt$ montre que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\frac{\Gamma(s)}{n^s} = \int_0^\infty u^{s-1}e^{-nu}\,du$. Par conséquent :

$$\Gamma(s)\zeta(s) = \int_0^\infty u^{s-1}\Big(\sum_1^\infty e^{-nu}\Big)\,du = \int_0^\infty \frac{u^{s-1}}{e^u-1}\,du\,,$$

l'interversion de la somme et de l'intégrale étant licite car les fonctions $u \mapsto e^{-nu}$ sont positives.

Pour $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}^+$ et $\alpha \geqslant 0$, on posera $z^\alpha = r^\alpha e^{i\alpha\theta}$ si $z = re^{i\theta}$, $0 < \theta < 2\pi$. La fonction $z \mapsto z^\alpha$ est holomorphe dans $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}^+$, et pour $t > 0$, on a

$$\begin{cases} \lim\limits_{\varepsilon\to 0^+} (t+i\varepsilon)^\alpha = t^\alpha \\ \lim\limits_{\varepsilon\to 0^+} (t-i\varepsilon)^\alpha = e^{2i\pi\alpha}\,t^\alpha \end{cases}$$

Pour $\varepsilon > 0$, on notera Γ_ε le « contour » constitué par les deux demi-droites $i\varepsilon + \mathbb{R}^+$, $-i\varepsilon + \mathbb{R}^+$ et le demi-cercle $\mathrm{C}_\varepsilon = \{|z| = \varepsilon,\ \mathrm{Re}(z) \leqslant 0\}$.

Si f est une fonction continue sur Γ_ε, on pose

$$\int_{\Gamma_\varepsilon} f dz = -\int_0^\infty f(t+i\varepsilon)\,dt + \int_{\mathrm{C}_\varepsilon} f dz + \int_0^\infty f(t-i\varepsilon)\,dt$$

lorsque les deux intégrales extrêmes ont un sens. C'est le cas en particulier pour $f(z) = \frac{z^\alpha}{e^z-1}$, $\alpha \geqslant 0$. En effet, on a $|f(z)| \leqslant \frac{|z|^\alpha}{|e^z|-1} = \frac{|z|^\alpha}{e^{\mathrm{Re}(z)}-1}$, donc $|f(t+i\varepsilon)|$ et $|f(t-i\varepsilon)|$ sont négligeables devant $\frac{1}{t^2}$ quand t tend vers $+\infty$.

Lemme 8.4.5. *Si $\varepsilon < 2\pi$, alors*

$$\int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{dz}{e^z-1} = 2i\pi\,,$$

et pour tout $\alpha > 0$, *on a*

$$\int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{z^\alpha}{e^z - 1}\, dz = \left(e^{2i\pi\alpha} - 1\right) \int_0^\infty \frac{t^\alpha}{e^t - 1}\, dt\,.$$

Preuve. Fixons $\varepsilon_0 < 2\pi$. La fonction $z \mapsto \frac{1}{e^z - 1}$ est méromorphe sur $\mathbb{C}$ et ses pôles sont les multiples entiers de $2i\pi$. De plus, $\frac{1}{e^{R+iy}-1}$ tend vers 0 quand R tend vers $+\infty$, uniformément par rapport à $y \in [-\varepsilon_0; \varepsilon_0]$. En appliquant le théorème des résidus au compact à bord régulier délimité par Γ_{ε_0} et le segment $[R - i\varepsilon_0; R + i\varepsilon_0]$ puis en faisant tendre R vers l'infini, on obtient donc

$$\int_{\Gamma_{\varepsilon_0}} \frac{dz}{e^z - 1} = 2i\pi \operatorname{Res}\left(\frac{1}{e^z - 1}, 0\right) = 2i\pi\,.$$

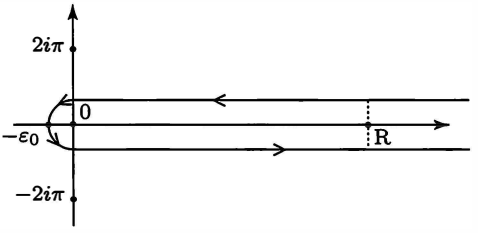


FIG. 39.

Soit maintenant $\alpha > 0$. Si $\varepsilon \leqslant \varepsilon_0$, alors, comme $\varepsilon_0 < 2\pi$, la fonction f définie par

$$f(z) = \frac{z^\alpha}{e^z - 1}$$

est holomorphe au voisinage du domaine compris entre les deux contours Γ_ε et Γ_{ε_0}. De plus, on a $\lim_{R\to\infty} f(R+iy) = 0$ uniformément par rapport à $y \in [-\varepsilon_0; -\varepsilon] \cup [\varepsilon; \varepsilon_0]$ car $|f(R + iy)| \leqslant \frac{(R+\varepsilon_0)^\alpha}{e^R - 1}$. En appliquant le théorème de Cauchy au compact à bord régulier délimité par Γ_ε, Γ_{ε_0} et les deux segments $[R+i\varepsilon; R+i\varepsilon_0]$, $[R-i\varepsilon_0; R-i\varepsilon]$ puis en faisant tendre R vers l'infini, on en déduit

$$\int_{\Gamma_\varepsilon} f dz = \int_{\Gamma_{\varepsilon_0}} f dz$$

pour tout $\varepsilon \leqslant \varepsilon_0$, autrement dit

$$\int_{\Gamma_{\varepsilon_0}} f dz = -\int_0^{+\infty} f(t + i\varepsilon)\, dt + \int_{C_\varepsilon} f dz + \int_0^{+\infty} f(t - i\varepsilon)\, dt\,.$$

Comme $\frac{(e^z-1)}{z}$ tend vers 1 quand z tend vers 0, on peut trouver une constante $A > 0$ telle que $|e^z - 1| \geqslant A|z|$ au voisinage de 0 ; on a

donc $|f(z)| \leqslant \frac{1}{A}|z|^{\alpha-1}$ au voisinage de 0. On en déduit la majoration $|\int_{C_\varepsilon} f dz| \leqslant \frac{\varepsilon^{\alpha-1}}{A} \times \pi\varepsilon$, ce qui montre que $\int_{C_\varepsilon} f dz$ tend vers 0 quand ε tend vers 0. D'autre part, $(t+i\varepsilon)^\alpha$ et $(t-i\varepsilon)^\alpha$ tendent respectivement vers t^α et $e^{2i\pi\alpha}t^\alpha$ quand ε tend vers 0^+. Comme $|f(t+iy)| \leqslant \frac{(t+\varepsilon_0)^\alpha}{e^t-1}$ pour tout $t > 0$ et pour tout $y \in [-\varepsilon_0;\varepsilon_0]$, on peut majorer $|f(t+iy)|$ par une fonction $u(t)$ intégrable sur $]0;+\infty[$ et indépendante de $y \in [-\varepsilon_0;\varepsilon_0]$, et en appliquant le théorème de convergence dominée, on en déduit que $\int_0^\infty f(t+i\varepsilon)\,dt$ et $\int_0^\infty f(t-i\varepsilon)\,dt$ tendent respectivement vers $\int_0^\infty \frac{t^\alpha}{e^t-1}\,dt$ et $e^{2i\pi\alpha}\int_0^\infty \frac{t^\alpha}{e^t-1}\,dt$ quand ε tend vers 0. En passant à la limite, on obtient donc bien

$$\int_{\Gamma_{\varepsilon_0}} \frac{z^\alpha}{e^z-1}\,dz = \left(e^{2i\pi\alpha}-1\right)\int_0^\infty \frac{t^\alpha}{e^t-1}\,dt\,.$$

Preuve du théorème 8.4.2. Fixons $\varepsilon_0 < 2\pi$. D'après les deux lemmes précédents, on a, pour tout $s > 1$:

$$\int_{\Gamma_{\varepsilon_0}} \frac{z^{s-1}}{e^z-1}\,dz = \left(e^{2i\pi(s-1)}-1\right)\Gamma(s)\,\zeta(s)\,.$$

D'autre part, l'identité $e^{2i\pi(s-1)}-1 = 2ie^{i\pi(s-1)}\sin\pi(s-1)$ et la formule des compléments permettent d'écrire

$$\left(e^{2i\pi(s-1)}-1\right)\Gamma(s) = 2i\pi\,\frac{e^{i\pi s}}{\Gamma(1-s)}$$

pour tout $s \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}$. On obtient ainsi

$$\zeta(s) = \frac{e^{-i\pi s}\Gamma(1-s)}{2i\pi}\int_{\Gamma_{\varepsilon_0}} \frac{z^{s-1}}{e^z-1}\,dz\,,$$

identité valable par exemple pour tout $s \in]1;2[$.

Une application du théorème d'holomorphie pour les intégrales à paramètres montre que l'intégrale apparaissant au second membre a un sens pour tout $s \in \mathbb{C}$ et définit une fonction entière. Par conséquent, le second membre définit une fonction φ méromorphe dans $\mathbb{C}$, dont les pôles éventuels sont à chercher parmi les pôles de la fonction $s \mapsto \Gamma(1-s)$, c'est à dire parmi les entiers strictement positifs. Comme ζ n'a pas de singularités aux points entiers supérieurs à 2, le seul pôle possible pour φ est le point 1. D'autre part, il découle de la preuve du théorème 4.6.6 qu'on a $\Gamma(z) \sim \frac{1}{z}$ au voisinage de 0, et compte tenu du lemme 8.4.5, on en déduit que 1 est un pôle simple pour φ, avec $\mathrm{Res}\,(\varphi,1) = 1$.

Comme φ et ζ coïncident sur $]1;2[$, on a $\varphi(s) \equiv \zeta(s)$ sur $\{\mathrm{Re}(s) > 0\}$ d'après le principe des zéros isolés, et la démonstration est terminée.

Exercices

8.1. Soit f une fonction rationnelle, $f = P/Q$, avec $\deg(P) \leqslant \deg(Q) - 2$. On note S l'ensemble des pôles de f. Montrer qu'on a $\sum_{a\in S} \mathrm{Res}\,(f,a) = 0$.

8.2. (Interpolation de Lagrange.)

Soit $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, et soient $a_0, \dots, a_N \in \Omega$ deux à deux distincts.

1) Rappeler pourquoi il existe un unique polynôme P vérifiant $\deg(P) \leqslant N$ et $P(a_i) = f(a_i)$ pour tout $i \in \{0; \dots; N\}$.

2) Soit $K \subset \Omega$ un compact à bord régulier contenant les points a_i dans son intérieur. Montrer que pour $z \in \mathring{K}$, on a

$$P(z) = f(z) - \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial K} \left(\prod_0^N \frac{z - a_i}{\zeta - a_i} \right) \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta\,.$$

8.3. Soit f une fonction méromorphe non constante sur $\mathbb{C}$. On note S l'ensemble des pôles de f, et R_a la partie principale de f en un point $a \in S$.

1) Soit K est un compact à bord régulier tel que $\partial K \cap S = \emptyset$. Montrer que pour tout $z \in \mathring{K}$, on a

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\partial K} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = f(z) - \sum_{K\cap S} R_a(z)\,.$$

2) On suppose qu'il existe une suite de courbes de Jordan fermées régulières (Γ_n) telle que $\Gamma_n \subset \mathrm{int}(\Gamma_{n+1})$ pour tout n, $\bigcup_n \mathrm{int}(\Gamma_n) = \mathbb{C}$, $S \cap \Gamma_n = \emptyset$ pour tout n, et $\lim_{n\to\infty} \int_{\Gamma_n} \frac{|f(z)|}{|z|}\,|dz| = 0$. Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}\backslash S$, on peut écrire

$$f(z) = \sum_{a\in S} R_a(z)\,,$$

où la série converge « par paquets », chaque paquet correspondant aux pôles de f situés entre Γ_n et Γ_{n+1}.

3) En prenant $f(z) = \dfrac{\operatorname{cotan} z}{z}$ et $\Gamma_n = \partial D(0, r_n)$, où $r_n = (2n+1)\dfrac{\pi}{2}$, retrouver la formule

$$\operatorname{cotan} z = \frac{1}{z} + 2z \sum_1^\infty \frac{1}{z^2 - n^2\pi^2}\,.$$

8.4. Le but de l'exercice est de montrer que pour $|z| < 2\pi$, on a

$$\frac{z}{e^z - 1} = 1 - \frac{z}{2} + \sum_1^\infty (-1)^{n-1} \frac{\zeta(2n)}{2^{2n-1}\pi^{2n}}\, z^{2n}\,.$$

1) *a*) Montrer que le développement en série entière de la fonction $z \mapsto \dfrac{z}{e^z - 1}$ dans le disque $D(0, 2\pi)$ est de la forme $1 - \dfrac{z}{2} + \sum_1^\infty a_n z^{2n}$.

b) Constater que pour $n \geqslant 1$, on a $a_n = \mathrm{Res}\Big(\dfrac{1}{z^{2n}(e^z-1)}, 0\Big)$.

2) Démontrer le résultat souhaité en intégrant $\dfrac{dz}{z^{2n}(e^z-1)}$ sur le bord du rectangle $\mathrm{R_N}$ de sommets $\pm 1 \pm i\,(2\mathrm{N}+1)\pi$, pour tout $\mathrm{N} \in \mathbb{N}^*$.

8.5. Trouver le nombre de solutions de l'équation $z^5+12z^3+3z^2+20z+3=0$ dans la couronne $\{1 < |z| < 2\}$.

8.6. Montrer que l'équation $z^7 - 5z^3 + 2 = 0$ a le même nombre de solutions dans le disque unité $\mathbb{D}$ et dans la couronne $\{1 < |z| < 2\}$.

8.7. Soit $a \in \mathbb{R}$, $a > e$, et soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $f(z) = az^n - e^z$ admet n zéros simples dans $\mathbb{D}$.

8.8. Montrer que $\mathrm{P}(z) = z^4 + z^3 + 4z^2 + 2z + 3$ n'a aucune racine réelle et aucune racine imaginaire pure. Montrer que P a 2 racines dans le quart de plan $\{\mathrm{Re}(z) < 0\,,\ \mathrm{Im}(z) > 0\}$, et également 2 racines dans $\{\mathrm{Re}(z) > 0\,,\ \mathrm{Im}(z) < 0\}$.

8.9. Soient $a, b \in \mathbb{D}$, et soient $m, n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $f(z) = z^m\Big(\dfrac{a-z}{1-\overline{a}z}\Big)^n - b$ admet $n+m$ zéros dans $\mathbb{D}$.

8.10. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note P_n le n-ième polynôme de Taylor de la fonction exponentielle,

$$\mathrm{P}_n(z) = \sum_0^n \frac{z^k}{k!}\,,$$

et on note Z_n l'ensemble des zéros de P_n.

1) Montrer que $\mathrm{R}_n = \inf\{|z|;\ z \in \mathrm{Z}_n\}$ tend vers l'infini avec n.

2) En appliquant convenablement le théorème de Rouché, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\mathrm{Z}_n \subset \mathrm{D}(0, 2n)\,.$$

8.11. (Fonctions elliptiques.)

Soient a_1, a_2 deux nombres complexes non nuls linéairement indépendants sur $\mathbb{R}$; on note $\mathbf{A}$ le « réseau » $\mathbb{Z}a_1 \oplus \mathbb{Z}a_2$. On dit qu'une fonction f méromorphe sur $\mathbb{C}$ est **elliptique** pour le réseau $\mathbf{A}$ si on a $f(z+a) \equiv f(z)$ pour tout $a \in \mathbf{A}$; autrement dit si $f(z+a_1) \equiv f(z) \equiv f(z+a_2)$. D'autre part, on appelle **parallélogramme fondamental** associé à $\mathbf{A}$ tout parallélogramme de sommets z_0, z_0+a_1, $z_0+a_1+a_2$, z_0+a_2, où $z_0 \in \mathbb{C}$.

1) Montrer qu'une fonction *entière* elliptique pour le réseau $\mathbf{A}$ est nécessairement constante.

2) Montrer que si f est une fonction elliptique pour le réseau $\mathbf{A}$ et si $\mathcal{P}$ est un parallélogramme fondamental tel que $\partial\mathcal{P}$ ne contient aucun zéro et aucun pôle de f, alors $\int_{\partial\mathcal{P}} f(z)\,dz = 0$.

3) Soit f une fonction non constante elliptique pour le réseau $\mathbf{A}$. En utilisant 2), montrer que si $\mathcal{P}$ est un parallélogramme fondamental tel que $\partial\mathcal{P}$ ne contient aucun zéro et aucun pôle de f, alors le nombre de zéros de f dans $\mathcal{P}$ est égal au nombre de pôles de f dans $\mathcal{P}$.

4) Soit f une fonction non constante elliptique pour le réseau $\mathbf{A}$, et soit $\mathcal{P}$ un parallélogramme fondamental défini par un point z_0, dont le bord ne contient ni zéro ni pôle de f.

a) Montrer que $\mathrm{I}_1 = \displaystyle\int_{[z_0\,;z_0+a_1]} \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz$ et $\mathrm{I}_2 = \displaystyle\int_{[z_0\,;z_0+a_2]} \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz$ sont des multiples entiers de $2i\pi$.

b) Exprimer l'intégrale $\displaystyle\int_{\partial\mathcal{P}} \frac{zf'(z)}{f(z)}\,dz$ à l'aide de a_1, a_2, I_1 et I_2.

c) On note Z la somme des zéros de f contenus dans $\mathcal{P}$ et P la somme des pôles de f contenus dans $\mathcal{P}$, zéros et pôles étant comptés selon leur multiplicité. Montrer que $\mathrm{Z} - \mathrm{P}$ appartient au réseau $\mathbf{A}$.

8.12. (Fonction $\wp$ de Weierstrass.)

Soient a_1, a_2 deux nombres complexes non nuls linéairement indépendants sur $\mathbb{R}$. On note $\mathbf{A}$ le réseau $\mathbb{Z}\omega_1 \oplus \mathbb{Z}\omega_2$, et on pose $\mathbf{A}^* = \mathbf{A}\backslash\{0\}$.

1) Montrer qu'on a $\sum_{a\in\mathbf{A}^*} \dfrac{1}{|a|^3} < +\infty$.

2) Montrer que la formule

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{a\in\mathbf{A}^*} \left(\frac{1}{(z-a)^2} - \frac{1}{a^2}\right)$$

définit une fonction méromorphe dans $\mathbb{C}$ dont les pôles sont les points de $\mathbf{A}$.

3) *a*) Montrer que la fonction $\wp'$ est elliptique pour le réseau $\mathbf{A}$ (voir l'exercice précédent).

b) Observer que $\wp$ est une fonction paire, puis montrer que $\wp$ est elle-même elliptique pour le réseau $\mathbf{A}$.

4) Soit $\mathcal{P}$ le parallélogramme de sommets $\pm a_1 \pm a_2$. Déterminer le nombre de zéros de $\wp'$ situés à l'intérieur du parallélogramme $\mathcal{P}$, puis trouver les zéros en question.

5) *a*) Montrer qu'il existe deux constantes $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ telles que

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \lambda z^2 + \mu z^4 + \mathrm{O}(z^6)$$

au voisinage de 0.

b) Montrer que $\wp'(z)^2 - 4\wp(z)^3 + 20\lambda\wp(z)$ admet une limite en 0, que l'on déterminera.

c) Montrer que $\wp$ vérifie l'équation différentielle

$$\wp'^2 - 4\wp^3 + 20\lambda\wp + 28\mu = 0\ .$$

8.13. Soit f une fonction holomorphe au voisinage d'un disque $\overline{\mathrm{D}}(0,r)$ et ne s'annulant pas sur $\partial\mathrm{D}(0,r)$.

1) Soit φ une autre fonction holomorphe au voisinage de $\overline{\mathrm{D}}(0,r)$. Exprimer l'intégrale

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{\partial\mathrm{D}(0,r)} \frac{f'(z)}{f(z)}\,\varphi(z)\,dz$$

à l'aide des zéros de f situés dans le disque $\mathrm{D}(0,r)$.

2) On suppose que f admet un seul zéro a dans le disque $\mathrm{D}(0,r)$, et que ce zéro est simple. Exprimer a par une formule intégrale.

8.14. Soit $r = 1/\sqrt{3}$, et soit V le disque $\mathrm{D}(0, 2r/3)$.

1) Montrer que si $\lambda \in \mathrm{V}$, alors il existe un unique $z \in \mathbb{C}$ vérifiant $|z| < r$ et $z^3 + z = \lambda$. On pose $z = f(\lambda)$.

2) Montrer que pour $\lambda \in \mathrm{V}$, on a

$$f(\lambda) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial \mathrm{D}(0,r)} \frac{\zeta(3\zeta^2 + 1)}{\zeta^3 + \zeta - \lambda}\, d\zeta\ .$$

En déduire que la fonction f est holomorphe dans V, et trouver son développement en série entière.

8.15. Montrer que si λ est assez proche de 1, alors l'équation $z^4 - 5z + \lambda = 0$ admet une unique solution $z = \varphi(x)$ dans le disque unité $\mathbb{D}$. Montrer que la fonction φ ainsi définie est holomorphe au voisinage de 1, et trouver son développement en série entière au voisinage de 1.

8.16. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1) Pour $\mathbf{a} = (a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$, on note $\mathrm{P}_{\mathbf{a}}$ le polynôme $\sum_0^n a_i \mathrm{X}^i$. En utilisant 8.3.3, montrer que

$$\mathcal{U} = \{\mathbf{a} \in \mathbb{C}^{n+1};\ \mathrm{P}_{\mathbf{a}} \text{ admet } n \text{ racines distinctes}\}$$

est un ouvert de $\mathbb{C}^{n+1}$.

2) Montrer que les racines de $\mathrm{P}_{\mathbf{a}}$ dépendent régulièrement de $\mathbf{a} \in \mathcal{U}$. De façon précise, montrer qu'il existe une application $\Lambda : \mathcal{U} \to \mathbb{C}^{n+1}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ telle que pour tout $\mathbf{a} \in \mathcal{U}$, $\Lambda(\mathbf{a})$ est énumération des racines du polynôme $\mathrm{P}_{\mathbf{a}}$. On pourra utiliser l'exercice 8.13.

3) Redémontrer les résultats de 1) et 2) en utilisant le théorème des fonctions implicites.

8.17. Soit f une fonction holomorphe dans le disque unité $\mathbb{D}$, $f(z) = \sum_0^\infty a_n z^n$. On suppose qu'on a

$$\sum_2^\infty n\,|a_n| < |a_1|\ .$$

1) En utilisant convenablement le théorème de Rouché et l'inégalité des accroissements finis, montrer que f prend exactement une fois la valeur a_0 dans $\mathbb{D}$.

2) Montrer que f est injective.

8.18. Soit $f : \overline{\mathbb{D}} \to \mathbb{C}$ continue sur $\overline{\mathbb{D}}$ et holomorphe dans $\mathbb{D}$. On suppose que la restriction de f à $\partial\mathbb{D}$ est injective.

0) Observer que $\Gamma = f(\partial\mathbb{D})$ est une courbe de Jordan fermée. On note Ω l'intérieur de Γ.

1) Soit $b \in \mathbb{C} \setminus \Gamma$. Montrer que si $r < 1$ est suffisamment proche de 1, alors $f(z) - b$ ne s'annule pas sur $\{|z| \geqslant r\}$ et $\mathrm{I}(f \circ \partial\mathrm{D}(0,r), b) = \mathrm{I}(f \circ \partial\mathbb{D}, b)$.

2) Déduire de 1) que la restriction de f à $\mathbb{D}$ est une bijection de $\mathbb{D}$ sur Ω.

3) Conclure que f est un homéomorphisme de $\overline{\mathbb{D}}$ sur $\overline{\Omega}$.

8.19. Soit f une fonction holomorphe injective dans un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$. On veut redémontrer que f' ne s'annule pas dans Ω. Pour cela, on raisonne par l'absurde en supposant qu'on a $f'(z_0) = 0$ pour un certain point $z_0 \in \Omega$.

1) Montrer qu'il existe un entier $k \geqslant 2$ et une fonction h holomorphe au voisinage de z_0 tels que $h(z_0) = 0$, $h'(z_0) \neq 0$ et

$$f(z) = f(z_0) + h(z)^k$$

au voisinage de z_0.

2) Obtenir une contradiction à l'aide du théorème d'inversion locale.

8.20. (Principe de subordination.)

Soient f et F deux fonctions holomorphes dans $\mathbb{D}$. On suppose qu'on a $f(0) = \mathrm{F}(0)$, $f(\mathbb{D}) \subset \mathrm{F}(\mathbb{D})$, et que F est injective. En utilisant le lemme de Schwarz, montrer que pour tout $r < 1$, on a $f(\overline{\mathrm{D}}(0,r)) \subset \mathrm{F}(\overline{\mathrm{D}}(0,r))$, et donc $\sup_{|z|=r} |f(z)| \leqslant \sup_{|z|=r} |\mathrm{F}(z)|$.

8.21. Soit (f_n) une suite de fonctions holomorphes dans un ouvert connexe $\Omega \subset \mathbb{C}$. On suppose que (f_n) est bornée dans $\mathcal{H}(\Omega)$, que les f_n ne s'annulent jamais, et qu'on a $\lim_{n\to\infty} f_n(z_0) = 0$ pour un certain point $z_0 \in \Omega$. Montrer que la suite (f_n) converge vers 0 uniformément sur tout compact.

8.22. Pour $r \in [0\,;1[$, calculer $\mathrm{I}_r = \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 - 2r\cos\theta + r^2}$.

8.23. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, calculer l'intégrale $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{1+\lambda^2\cos^2 t}$. En déduire les valeurs du paramètre α pour lesquelles la fonction $x \mapsto \frac{1}{1+x^\alpha \cos^2 x}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

8.24. Déterminer la transformée de Cauchy de la mesure $\mathbf{1}_{\mathrm{D}} m$. On pourra passer en coordonnées polaires et utiliser le théorème des résidus pour calculer les « intégrales en θ ».

8.25. Calculer $\mathrm{I}_1 = \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^4}$ et $\mathrm{I}_2 = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+x+1)^2}$.

8.26. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer la transformée de Fourier de la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{1+t^{2n}}$.

8.27. Calculer les intégrales $\mathrm{I}_1 = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2+x+1}\,dx$ et $\mathrm{I}_2 = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^4 x}{1+x^2}\,dx$.

8.28. Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2}\,dx$.

8.29. Soit $\mathrm{R} = \mathrm{P}/\mathrm{Q}$ une fonction rationnelle, avec $\deg(\mathrm{Q}) > \deg(\mathrm{P})$. On suppose que les éventuels pôles réels de R sont tous simples. Montrer que pour

tout réel $x \neq 0$, on peut donner un sens à l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixt}\,\mathrm{R}(t)\,dt$, et donner une formule permettant de calculer cette intégrale. Retrouver ainsi la valeur de $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt$.

8.30. Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{(\log x)^2}{1+x^2}\,dx$.

8.31. Soit n un entier au moins égal à 2, et soit α vérifiant $1-n < \alpha < 1$. Calculer

$$\mathrm{I} = \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}(1+x^n)}\,.$$

8.32. Pour $\alpha \in]-1\,;1\,[$, calculer l'intégrale

$$\mathrm{I}_{\alpha} = \int_0^{\infty} \frac{x^{\alpha}\log x}{x^2-1}\,dx$$

après avoir justifié son existence.

8.33. On rappelle que d'après le corollaire 5.4.21, il existe une détermination holomorphe de $\log(\dfrac{1-z}{1+z})$ dans $\mathbb{C}\backslash[-1\,;1]$.

1) Montrer qu'il existe dans $\mathbb{C}\backslash[-1\,;1]$ une unique détermination holomorphe de $\sqrt{1-z^2}$ valant $i\sqrt{3}$ au point $z=2$; on note F cette détermination.

2) Pour $x \in [-1\,;1]$, déterminer $\lim_{\varepsilon\to 0+} \mathrm{F}(x+i\varepsilon)$ et $\lim_{\varepsilon\to 0+} \mathrm{F}(x-i\varepsilon)$.

3) En intégrant $\dfrac{dz}{(1+z^2)\mathrm{F}(z)}$ sur des lacets bien choisis, calculer l'intégrale

$$\mathrm{I} = \int_{-1}^{1} \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}\,.$$

8.34. On note f la détermination holomorphe de $(z-1)^{2/3}(z+1)^{1/3}$ dans $\mathbb{C}\backslash[-1;1]$ vérifiant $f(2) = 3^{1/3}$ (voir l'exercice 5.39). En intégrant $\dfrac{dz}{(1+z^2)f(z)}$ sur des lacets bien choisis, calculer l'intégrale

$$\mathrm{I} = \int_{-1}^{1} \frac{dx}{(x^2+1)(1-x)^{2/3}(1+x)^{1/3}}\,.$$

8.35. 1)*a*) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note k_n l'entier le plus proche de $n\sqrt{2}$. Montrer qu'il existe une constante C strictement positive telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \left|n\sqrt{2} - k_n\right| \geqslant \frac{\mathrm{C}}{n}\,.$$

b) Montrer que la série $\sum \dfrac{1}{n^3 \sin(n\pi\sqrt{2})}$ est absolument convergente.

2) En considérant des intégrales du type $\displaystyle\int_\gamma \frac{dz}{z^3[\sin(\pi z)\sin(\sqrt{2}-1)\pi z]}$ pour γ convenablement choisi, établir la formule

$$\sum_1^\infty \frac{1}{n^3\sin(n\pi\sqrt{2})} = -\frac{13\pi^2}{360\sqrt{2}}\,.$$

8.36. Soit $F = P/Q$ une fonction rationnelle n'ayant aucun pôle entier, avec de plus $\deg(Q) \geqslant \deg(P) + 2$.

1) Pour $n \in \mathbb{N}$, on note R_n le carré de sommets $(\pm(n+\frac{1}{2}), \pm(n+\frac{1}{2}))$. Montrer qu'on a

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\partial R_n}\frac{F(z)}{\tan(\pi z)}\,dz = 0 = \lim_{n\to\infty}\int_{\partial R_n}\frac{F(z)}{\sin(\pi z)}\,dz\,.$$

2) On note $\mathcal{P}$ l'ensemble des pôles de F. Établir les formules

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{-\infty}^{+\infty} F(n) = -\sum_{p\in\mathcal{P}} \operatorname{Res}\left(\frac{F(z)}{\tan(\pi z)}\,,\,p\right) \\ \displaystyle\sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^n F(n) = -\sum_{p\in\mathcal{P}} \operatorname{Res}\left(\frac{F(z)}{\sin(\pi z)}\,,\,p\right) \end{cases}$$

8.37. Utiliser l'exercice 8.36 pour calculer les sommes suivantes.

$$\begin{cases} S_1 = \displaystyle\sum_1^\infty \frac{1}{n^2} \\ S_2 = \displaystyle\sum_0^\infty \frac{1}{n^2+a^2}\,,\ 0<a<1 \\ S_3 = \displaystyle\sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+a^2}\,,\ 0<a<1 \\ S_4 = \displaystyle\sum_0^\infty \frac{1}{n^2-a^2}\,,\ a\in\mathbb{C}\backslash\mathbb{Z} \\ S_5 = \displaystyle\sum_1^\infty \frac{1}{n^{2k}} = \zeta(2k)\,,\ k\in\mathbb{N}^* \end{cases}$$

8.38. 1)*a*) Montrer que pour $k, n \in \mathbb{N}$, $k \leqslant n$, on a

$$C_n^k = \frac{1}{2i\pi}\int_{\partial\mathbb{D}}\frac{(1+z)^n}{z^{k+1}}\,dz\,.$$

b) En déduire la majoration $C_{2n}^n \leqslant 4^n$.

2) Calculer l'intégrale

$$I = \int_{\partial\mathbb{D}}\frac{dz}{z^2-3z+1}\,.$$

3) En utilisant 1) et 2), établir la formule

$$\sum_0^\infty 5^{-n} C_{2n}^n = \sqrt{5}\,.$$

8.39. Dans tout l'exercice, n est un entier strictement positif.

1) Soient ε, R vérifiant $0 < \varepsilon < 1/2$ et $\varepsilon < R$. On note $Q_{\varepsilon,R}$ le rectangle de sommets $\pm i R$, $\frac{n}{2} \pm iR$, et on pose $K_{\varepsilon,R} = \{z \in Q_{\varepsilon,R};\ |z| \geqslant \varepsilon\,,\ |z - \frac{n}{2}| \geqslant \varepsilon\}$. Constater que $K_{\varepsilon,R}$ est un compact à bord régulier, et montrer qu'on a

$$\int_{\partial K_{\varepsilon,R}} \frac{e^{2i\pi z^2/n}}{e^{2i\pi z} - 1}\, dz = \sum_{0<k<n/2} e^{2i\pi k^2/n}\,.$$

2) Comparer les deux sommes $\displaystyle\sum_{0<k<n/2} e^{2i\pi k^2/n}$ et $\displaystyle\sum_0^{n-1} e^{2i\pi k^2/n}$.

3) Déduire de 1) et 2) le calcul de la n-ième **somme de Gauss** :

$$\sum_0^{n-1} e^{2i\pi k^2/n} = \sqrt{n}\,\frac{1 + (-i)^n}{1 - i}\,.$$

8.40. Le but de l'exercice est de montrer que si a est un nombre réel strictement positif, alors, pour $\mathrm{Re}(z) > 2$, on a

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{a+iu}}{(a+iu)^z}\, du\,.$$

1) Pour $a > 0$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on pose

$$I_a(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{\lambda(a+iu)}}{(a+iu)^2}\, du\,.$$

a) Montrer que $I_a(\lambda)$ est indépendant de a.

b) En utilisant le théorème des résidus, calculer $I_a(\lambda)$ lorsque $\lambda \geqslant 0$.

c) Montrer que si $\lambda < 0$, alors $I_a(\lambda) = 0$.

2) Soit $a > 0$. Pour $\mathrm{Re}(z) > 2$, montrer qu'on peut écrire

$$\Gamma(z) \times \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{a+iu}}{(a+iu)^z}\, du = (z-1)(z-2) \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^\infty t^{z-3} e^{-(a+iu)t}\, \frac{e^{a+iu}}{(1+iu)^2}\, dt\, du\,.$$

3) Conclure.

8.41. (Théorème des nombres premiers.)

On définit $\Lambda : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}$ par $\Lambda(n) = \log p$ si n est une puissance d'un nombre premier p, et $\Lambda(n) = 0$ sinon. Pour $x > 1$, on pose

$$\psi(x) = \sum_{n \leqslant x} \Lambda(n)\,, \quad \Psi(x) = \int_1^x \psi(t)\, dt\,.$$

1) Montrer que pour tout $x \geqslant 1$, on a

$$\Psi(x) = \sum_{n \leqslant x} (x - n)\,\Lambda(n)\ .$$

2) En utilisant le développement de la fonction ζ en produit infini, montrer que dans le demi-plan $\{\mathrm{Re}(s) > 1\}$, on a

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \equiv -\sum_{1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s}\ .$$

3) *a*) Soit $\alpha > 0$, soit $\mathrm{T} \in \mathbb{R}$, et soit $\mathrm{R} = \mathrm{P}/\mathrm{Q}$ une fonction rationnelle sans pôle sur la droite $\{\mathrm{Re}(s) = \mathrm{T}\}$, avec $\deg(\mathrm{Q}) \geqslant \deg(\mathrm{P}) + 2$. Justifier l'existence de l'intégrale

$$\mathrm{I} = \int_{\mathrm{T}+i\mathbb{R}} \alpha^s \mathrm{R}(s)\,ds\ ,$$

et exprimer I à l'aide des pôles de la fonction R.

b) Montrer que pour tout $\mathrm{T} > 1$, on peut écrire

$$\Psi(x) = -\frac{1}{2i\pi} \int_{\mathrm{T}+i\mathbb{R}} \frac{x^{s+1}}{s(s+1)}\,\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\,ds\ .$$

c) Montrer que pour tout $\mathrm{T} > 1$, on a

$$\frac{\Psi(x)}{x^2} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{x}\right)^2 - \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathrm{T}+i\mathbb{R}} \frac{x^{s-1}}{s(s+1)} \left(\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} + \frac{1}{s-1}\right) ds\ .$$

4) *a*) D'après l'exercice 4.77, le prolongement méromorphe de ζ ne s'annule pas sur la droite $\{\mathrm{Re}(s) = 1\}$. Montrer que la fonction

$$s \mapsto \frac{1}{s(s+1)} \left(\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} + \frac{1}{s-1}\right)$$

est continue sur $\{\mathrm{Re}(s) \geqslant 1\}$. On note f sa restriction à la droite $\{\mathrm{Re}(s) = 1\}$.

b) On *admet* que la fonction $\tau \mapsto f(1 + i\tau)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ et que la formule établie en 3) *c*) est encore valable pour $\mathrm{T} = 1$. Quel renseignement peut-on en déduire sur le comportement de $\psi(x)/x^2$ au voisinage de $+\infty$?

5) *a*) Soit $\varphi : [1\,;+\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction croissante positive, et soit $\lambda \geqslant 0$. Montrer que si $\int_1^x \varphi(t)\,dt$ est équivalent à $\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ en $+\infty$, alors $\varphi(x)$ est équivalent à x^α.

b) Montrer qu'on a $\psi(x) \sim x$ quand x tend vers $+\infty$.

6) Pour $x \geqslant 1$, on note $\pi(x)$ le nombre de nombres premiers inférieurs à x.

a) Montrer qu'on a $\psi(x) \leqslant \pi(x)\,\log x$ pour tout $x \geqslant 1$.

b) Montrer que si $y < x$, alors $\psi(y) \geqslant \log y\,(\pi(x) - \pi(y))$. En déduire que pour tout $\lambda \in [0\,;1[$ et pour tout $x \geqslant 1$, on a $\pi(x)\,\log x \leqslant \frac{1}{\lambda}\,\psi(x) + x^\lambda \log x$.

c) Conclure qu'on a

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}\ .$$

Ce résultat est le **théorème des nombres premiers**. Il a été démontré (indépendamment) par Hadamard et de la Vallée Poussin en 1896.

8.42. (Division euclidienne.)

Soient A et B deux polynômes à coefficients complexes. On note Q et R le quotient et le reste de la division euclidienne de A par B.

1) Montrer que si D est un disque ouvert contenant tous les zéros de B, alors, pour tout point $z \in D$, on a

$$Q(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial D} \frac{A(\zeta)}{B(\zeta)} \frac{d\zeta}{\zeta - z} .$$

2) En déduire que le reste R est donné par la formule

$$R(z) = \sum_{a \in Z(B)} \operatorname{Res}\left(\frac{A(\zeta)}{B(\zeta)} \frac{A(\zeta) - A(z)}{\zeta - z} , a \right) .$$

8.43. (Équation de Bezout.)

Soient f_1, f_2 deux fonctions holomorphes au voisinage d'un disque $\overline{D} = \overline{D}(0, R)$, sans zéros communs dans le disque D, et sans zéros sur le cercle ∂D.

1) On pose $F = f_1 f_2$, et on définit $G : D \to \mathbb{C}$ par

$$G(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial D} \frac{1}{F(\zeta)} \frac{F(\zeta) - F(z)}{\zeta - z} \, d\zeta .$$

a) Montrer que G est holomorphe, puis, en utilisant convenablement le théorème des résidus, montrer que G appartient à l'idéal de $\mathcal{H}(D)$ engendré par f_1 et f_2.

b) Montrer que pour tout $z \in D$, on a

$$1 - G(z) = \frac{F(z)}{2i\pi} \int_{\partial D} \frac{d\zeta}{F(\zeta)(\zeta - z)} .$$

c) Conclure qu'il existe des fonctions $g_1, g_2 \in \mathcal{H}(D)$ telles que

$$f_1 g_1 + f_2 g_2 \equiv 1$$

dans D.

2) On suppose que f_1 et f_2 sont polynomiales, $f_1 = P_1$, $f_2 = P_2$, avec $\deg(P_1) > 0$ et P_1, P_2 sans zéros communs. On pose

$$Q_1(z) = \sum_{a \in Z(P_1)} \operatorname{Res}\left(\frac{1}{P_1(\zeta) P_2(\zeta)} \frac{P_2(\zeta) - P_2(z)}{z - \zeta} , a \right) ,$$

$$Q_2(z) = \sum_{a \in Z(P_1)} \operatorname{Res}\left(\frac{1}{P_1(\zeta) P_2(\zeta)} \frac{P_1(z) - P_1(\zeta)}{z - \zeta} , a \right) .$$

Montrer qu'on a $P_1 Q_1 + P_2 Q_2 = 1$. Les fonctions Q_1 et Q_2 sont-elles polynomiales ?

Chapitre 9

Théorème de Runge et applications

9.1. Théorème de Runge

On sait qu'une fonction holomorphe au voisinage du disque unité fermé $\overline{\mathbb{D}}$ peut être approchée uniformément sur $\overline{\mathbb{D}}$ par des fonctions polynomiales, par exemple par les sommes partielles de son développement en série entière au voisinage de $\overline{\mathbb{D}}$.

En revanche, la fonction $z \mapsto 1/z$, qui est holomorphe au voisinage du cercle unité $\partial\mathbb{D}$, ne peut pas être approchée uniformément sur $\partial\mathbb{D}$ par des fonctions entières. En effet, supposons qu'il existe une fonction entière f telle que $|f(\zeta) - 1/\zeta| \leqslant 1/2$ sur $\partial\mathbb{D}$. On a alors $|\zeta f(\zeta) - 1| \leqslant |\zeta|/2 = 1/2$ sur $\partial\mathbb{D}$, donc $|zf(z) - 1| \leqslant 1/2$ pour tout $z \in \mathbb{D}$ d'après le principe du maximum, et on obtient une contradiction en prenant $z = 0$. L'argument est en fait très général, et fournit presque sans aucune modification le résultat suivant.

Lemme 9.1.1. *Soit* O *un ouvert borné de* $\mathbb{C}$. *Si* a *est un point quelconque de* O, *alors la fonction* $z \mapsto 1/(z-a)$ *n'est pas uniformément approchable sur* ∂O *par des fonctions continues sur* $\overline{\mathrm{O}}$ *et holomorphe dans* O.

Preuve. Soit $a \in \mathrm{O}$. Fixons $\varepsilon > 0$, et supposons qu'il existe une fonction f continue sur $\overline{\mathrm{O}}$ et holomorphe dans O telle que $|f(z) - 1/(z-a)| < \varepsilon$ sur ∂O. On a alors $|(z-a)f(z) - 1| < \varepsilon \mathrm{R}$ sur ∂O où $\mathrm{R} = \sup_{\partial \mathrm{O}} |z-a|$, et d'après le principe du maximum, on en déduit qu'on a aussi $|(z-a)f(z) - 1| < \varepsilon \mathrm{R}$ dans O. On obtient alors une contradiction en choisissant $\varepsilon < 1/\mathrm{R}$ et en prenant $z = a$.

Corollaire 9.1.2. *Soit* K *un compact de* $\mathbb{C}$. *On suppose que l'ouvert* $\mathbb{C} \setminus \mathrm{K}$ *possède au moins une composante connexe bornée* O. *Si* a *est un point quelconque de* O, *alors la fonction* $z \mapsto 1/(z-a)$ *n'est pas uniformément approchable sur* K *par des fonctions polynomiales.*

Preuve. Comme O est une composante connexe de $\mathbb{C} \setminus \mathrm{K}$, sa frontière ∂O est contenue dans K. Le résultat découle donc directement du lemme.

On montrerait de la même façon que si K est un compact de $\mathbb{C}$ et si O est une composante connexe bornée de $\mathbb{C}\backslash K$, alors aucune fonction rationnelle possédant un pôle dans O n'est uniformément approchable sur K par des fonctions polynomiales. Ainsi, les « trous » du compact K apparaissent comme une obstruction naturelle à l'approximation par des polynômes.

On peut alors se demander si en « bouchant les trous », on élimine le problème. De façon précise : en combinant fonctions polynomiales et fonctions rationnelles à pôles dans les composantes connexes bornées de $\mathbb{C}\backslash K$, peut-on approcher uniformément sur K n'importe quelle fonction holomorphe au voisinage de K ? Le théorème suivant répond à cette question.

Théorème 9.1.3. (Théorème de Runge.)
Soit K *un compact de* $\mathbb{C}$. *Si* S *est une partie de* $\mathbb{C}$ *rencontrant chacune des éventuelles composantes connexes bornées de* $\mathbb{C}\backslash K$, *alors toute fonction holomorphe au voisinage de* K *est uniformément approchable sur* K *par des fonctions rationnelles dont les pôles éventuels sont dans l'ensemble* S.

On va donner une preuve « non constructive » de ce résultat, basée sur le théorème de Hahn-Banach.

Dans la suite, on note $\mathcal{M}(K)$ l'ensemble des mesures boréliennes complexes sur K. Rappelons que $\mathcal{M}(K)$ s'identifie, via le théorème de représentation de Riesz, au dual de l'espace de Banach $\mathcal{C}(K) = (\mathcal{C}^0(K), ||\ ||_\infty)$.

Si $\mathcal{A}$ est une famille de fonctions définies et continues sur K, on dira qu'une mesure $\mu \in \mathcal{M}(K)$ est **orthogonale** à $\mathcal{A}$ si on a $\int f d\mu = 0$ pour toute fonction $f \in \mathcal{A}$.

Enfin, on notera $\mathcal{O}(K)$ la famille des fonctions holomorphes au voisinage de K

Lemme 9.1.4. *Pour une mesure* $\mu \in \mathcal{M}(K)$, *les propriétés suivantes sont équivalentes.*
(i) μ *est orthogonale à* $\mathcal{O}(K)$.
(ii) *La transformée de Cauchy de* μ *est identiquement nulle sur* $\mathbb{C}\backslash K$.

Preuve. Rappelons (cf. 3.7) que la transformée de Cauchy d'une mesure $\mu \in \mathcal{M}(K)$ est définie presque partout par la formule

$$\hat{\mu}(z) = -\frac{1}{\pi} \int \frac{d\mu(\zeta)}{\zeta - z} \cdot$$

Si $z \in \mathbb{C}\backslash K$, alors la fonction $\zeta \mapsto \frac{1}{(\zeta - z)}$ est holomorphe au voisinage de K. Il est donc clair que (i) entraîne (ii).

Inversement, fixons $\mu \in \mathcal{M}(K)$ et supposons que $\hat{\mu}$ soit identiquement nulle sur $\mathbb{C}\backslash K$.

Soit f une fonction holomorphe dans un ouvert V contenant K, et choisissons une fonction $\chi \in \mathcal{D}(\mathbb{C})$ à support contenu dans V et valant 1 au voisinage de K. La fonction χf se prolonge en une fonction de $\mathcal{D}(\mathbb{C})$ encore notée χf, et comme $f \equiv \chi f$ sur K, on a $\int f\,d\mu = \int (\chi f)\,d\mu$. D'autre part, on sait qu'on a $\mu = \frac{\partial \hat{\mu}}{\partial \bar{z}}$ au sens des distributions, et on peut donc écrire $\int (\chi f)\,d\mu = -\int \frac{\partial (\chi f)}{\partial \bar{z}}\,\hat{\mu}\,dm$. Mais $\chi f \equiv f$ au voisinage de K, donc on a $\frac{\partial (\chi f)}{\partial \bar{z}} \equiv 0$ au voisinage de K puisque $f \in \mathcal{O}(K)$. Comme de plus $\hat{\mu}$ est nulle sur $\mathbb{C}\backslash K$, on obtient donc $\int f\,d\mu = 0$. Cela termine la démonstration.

Variante abrégée pour « (ii) entraîne (i) ». On *admettra* que si V est un ouvert contenant K, alors il est possible de construire un cycle Γ dont l'image est contenue dans $V \setminus K$ et qui « encercle » K au sens suivant : la formule de Cauchy $f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta$ est valable pour toute fonction $f \in \mathcal{H}(V)$ et pour tout point $z \in K$. On renvoie à [62] pour les détails.

Supposons que $\hat{\mu}$ soit identiquement nulle dans $\mathbb{C} \setminus K$, et soit f une fonction holomorphe dans un ouvert V contenant K. Si le cycle Γ est choisi comme plus haut, alors le théorème de Fubini permet d'écrire

$$\int_K f\,d\mu = \int_K \left(\frac{1}{2i\pi} \int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta \right) d\mu(z) = \frac{1}{2i} \int_\Gamma f(\zeta)\hat{\mu}(\zeta)\,d\zeta = 0\ ,$$

ce qui prouve que μ est orthogonale à $\mathcal{O}(K)$.

Preuve du théorème de Runge. Soit S un ensemble rencontrant toutes les éventuelles composantes connexes bornées de $\mathbb{C}\backslash K$.

Notons $\mathcal{A}$ la famille des fonctions rationnelles dont les pôles éventuels appartiennent à S, et $\mathcal{A}_K$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}(K)$ constitué par les restrictions à K des fonctions de $\mathcal{A}$. Il s'agit de montrer que l'adhérence de $\mathcal{A}_K$ dans $\mathcal{C}(K)$ contient toutes les restrictions à K de fonctions de $\mathcal{O}(K)$. D'après le théorème de Hahn-Banach et le théorème de représentation de Riesz, cela revient à montrer que toute mesure $\mu \in \mathcal{M}(K)$ orthogonale à $\mathcal{A}_K$ est également orthogonale à $\mathcal{O}(K)$. Fixons une telle mesure μ.

D'après le lemme 9.1.4, il suffit de montrer que $\hat{\mu}$ est identiquement nulle sur $\mathbb{C}\backslash K$. On va pour ce faire appliquer le principe du prolongement analytique à $\hat{\mu}$, qui est holomorphe dans $\mathbb{C} \setminus K$.

Si $a \in S$, alors les fonctions $z \mapsto \frac{1}{(z-a)^{k+1}}$ $(k \in \mathbb{N})$ appartiennent toutes à $\mathcal{A}$. On a donc $\int \frac{1}{(z-a)^{k+1}}\,d\mu(z) = 0$ pour tout $a \in S$ et pour tout entier $k \geqslant 0$. Autrement dit, $\hat{\mu}$ et toutes ses dérivées s'annulent en tous les points de S. Comme S rencontre toutes les composantes connexes

bornées de $\mathbb{C}\backslash K$, il découle du théorème 3.4.4 que $\hat{\mu}$ est identiquement nulle dans chacune de ces composantes connexes.

Choisissons maintenant $R > 0$ tel que $K \subset D(0,R)$. Si $z \in \mathbb{C}$ vérifie $|z| > R$, alors on peut écrire $\frac{1}{z-\zeta} = \sum_0^\infty \frac{\zeta^n}{z^{n+1}}$, où la série converge uniformément par rapport à $\zeta \in K$. On a donc $\hat{\mu}(z) = \sum_0^\infty \frac{1}{\pi z^{n+1}} \int \zeta^n \, d\mu(\zeta)$, et donc $\hat{\mu}(z) = 0$ puisque μ est orthogonale à toutes les fonctions polynomiales. Ainsi, $\hat{\mu}$ est identiquement nulle dans l'ouvert $\{|z| > R\}$, lequel est contenu dans la composante connexe non bornée de $\mathbb{C}\backslash K$. D'après le principe du prolongement analytique, $\hat{\mu}$ est donc identiquement nulle dans cette composante connexe.

Au total, on a bien $\hat{\mu} \equiv 0$ dans $\mathbb{C}\backslash K$, et la démonstration est terminée.

Corollaire 9.1.5. *Si* K *est un compact de* $\mathbb{C}$ *et si* $\mathbb{C}\backslash K$ *est connexe, alors toute fonction holomorphe au voisinage de* K *peut s'approcher uniformément sur* K *par des fonctions polynomiales.*

Le corollaire 9.1.5 est spectaculaire, mais il existe un résultat beaucoup plus fort (et optimal) : *si* $\mathbb{C}\backslash K$ *est connexe, alors toute fonction continue sur* K *et holomorphe dans l'intérieur de* K *peut s'approcher uniformément sur* K *par des fonctions polynomiales.* C'est le **théorème de Mergelyan**. On renvoie à Rudin [62] ou Gamelin [33] pour la démonstration. Voir aussi les exercices 9.2, 9.3 et 9.4 pour des résultats (plus faibles) du même type.

Voici maintenant une version un peu différente du théorème de Runge.

Théorème 9.1.6. *Soit* Ω *un ouvert de* $\mathbb{C}$. *Si* S *est une partie de* $\mathbb{C}$ *rencontrant toutes les éventuelles composantes connexes bornées de* $\mathbb{C}\backslash\Omega$. *Alors toute fonction holomorphe dans* Ω *peut s'approcher uniformément sur les compacts par des fonctions rationnelles dont les pôles éventuels sont dans l'ensembles* S.

On va déduire ce résultat du théorème de Runge grâce au lemme suivant.

Lemme 9.1.7. *Soit* Ω *un ouvert de* $\mathbb{C}$ *et soit* K *un compact de* Ω. *Notons* L *la réunion de* K *et des composantes connexes bornées de* $\mathbb{C}\backslash K$ *contenues dans* Ω. *Alors* L *est un compact de* Ω, *et toute composante connexe bornée de* $\mathbb{C}\backslash L$ *contient une composante connexe de* $\mathbb{C}\backslash\Omega$.

Preuve. Il est clair que L est contenu dans Ω. D'autre part, $\mathbb{C}\backslash L$ est une réunion de composantes connexes de l'ouvert $\mathbb{C}\backslash K$: la composante non bornée, et les composantes bornées qui ne sont pas contenue dans Ω. En particulier, $\mathbb{C}\backslash L$ est un ouvert de $\mathbb{C}$, donc L est un fermé de $\mathbb{C}$.

Enfin, si $R > 0$ vérifie $K \subset D(0,R)$, alors $\mathbb{C} \setminus D(0,R)$ est contenu dans la composante connexe non bornée de $\mathbb{C} \setminus K$. Par conséquent, toutes les composantes connexes bornées de $\mathbb{C}\setminus K$ sont contenues dans $D(0,R)$, et donc $L \subset D(0,R)$. L'ensemble L est donc borné, et au total, L est un compact de Ω.

Par définition de L, les composantes connexes bornées de $\mathbb{C} \setminus L$ sont exactement les composantes connexes bornées de $\mathbb{C} \setminus K$ qui ne sont pas contenues dans Ω. Ainsi, toute composante connexe bornée de $\mathbb{C}\setminus L$ rencontre $\mathbb{C}\setminus\Omega$, et contient donc une composante connexe de $\mathbb{C}\setminus\Omega$. Cela termine la preuve du lemme.

Preuve du théorème 9.1.6. Soit $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, et soit K un compact de Ω. Notons L la réunion de K et des composantes connexes bornées de $\mathbb{C}\setminus K$ contenues dans Ω. D'après le lemme 9.1.7, L est un compact de Ω et toute composante connexe bornée de $\Omega \setminus L$ contient un point de S. D'après le théorème de Runge, on peut donc approcher f uniformément sur L, donc sur K, par des fonctions rationnelles dont les pôles éventuels sont dans S.

Corollaire 9.1.8. *Si $\mathbb{C}\setminus\Omega$ n'a pas de composantes connexes bornées, alors les fonctions polynomiales sont denses dans $\mathcal{H}(\Omega)$.*

Corollaire 9.1.9. *Si Ω est un ouvert quelconque de $\mathbb{C}$, alors les fonctions rationnelles sans pôles dans Ω sont denses dans $\mathcal{H}(\Omega)$.*

Comme expliqué à la fin du chapitre 7, ce dernier résultat permet de retrouver le théorème de Cauchy homologique.

9.2. Enveloppe d'holomorphie

Dans cette section, Ω est un ouvert de $\mathbb{C}$ et la lettre K désigne un compact de Ω.

Dans le cas où $\Omega = \mathbb{C}$, il découle du théorème de Runge (corollaire 9.1.5) que si $\mathbb{C} \setminus K$ est connexe, alors toute fonction holomorphe au voisinage de K peut s'approcher uniformément sur K par des fonctions entières. Inversement, si $\mathbb{C} \setminus K$ n'est pas connexe, alors $\mathbb{C} \setminus K$ possède une composante connexe bornée O. Si a est un point de O, alors la fonction $z \mapsto 1/(z-a)$, qui est holomorphe au voisinage de K, n'est pas uniformément approchable sur K par des fonctions entières d'après le lemme 9.1.1. Ainsi, $\mathbb{C} \setminus K$ est connexe *si et seulement si* toute fonction holomorphe au voisinage de K est uniformément approchable sur K par des fonctions holomorphes dans $\mathbb{C}$ tout entier. Le théorème suivant généralise ce résultat.

Théorème 9.2.1. *Les conditions suivantes sur* Ω *et* K *sont équivalentes.*

(a) *Toute fonction holomorphe au voisinage de* K *peut être approchée uniformément sur* K *par des fonctions holomorphes dans* Ω.

(b) *L'ouvert* $\Omega\backslash K$ *n'a pas de composante connexe relativement compacte dans* Ω.

(c) *Pour tout point* $z_0 \in \Omega\backslash K$, *on peut trouver une fonction* $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ *telle que* $|f(z_0)| > \sup_K |f|$.

Rappelons qu'une partie A de Ω est dit **relativement compacte dans** Ω si son adhérence relative à Ω est compacte. Il revient au même de dire que l'adhérence de A dans $\mathbb{C}$ est compacte et contenue dans Ω, ou encore que A est borné et que son adhérence est contenue dans Ω.

La remarque suivante sera plusieurs fois utilisée.

Remarque 9.2.2. *Les composantes connexes de* $\Omega\backslash K$ *relativement compactes dans* Ω *sont exactement les composantes connexes bornées de* $\mathbb{C}\backslash K$ *contenues dans* Ω. *De plus, l'adhérence (dans* $\mathbb{C}$*) d'une telle composante est contenue dans* Ω.

Preuve. Observons d'abord que si O est une composante connexe de $\mathbb{C}\setminus K$ contenue dans Ω, alors son adhérence est également contenue dans Ω. En effet, on a $\partial O \subset K$, donc $\overline{O} = O \cup \partial O \subset \Omega$.

Soit O une composante connexe bornée de $\mathbb{C}\backslash K$ contenue dans Ω. Alors O est une composante connexe de $\Omega\backslash K$. De plus, $\overline{O}$ est compacte, et contenue dans Ω d'après ce qui précède. Donc O est bien une composante connexe de $\Omega \setminus K$ relativement compacte dans Ω.

Inversement, soit O une composante connexe de $\Omega\backslash K$ relativement compacte dans Ω. Alors O est bornée et son adhérence dans $\mathbb{C}$ est contenue dans Ω. Il reste à voir que O est une composante connexe de $\mathbb{C} \setminus K$. Comme $\Omega \setminus K$ est un ouvert de $\mathbb{C}$, O est un ouvert de $\mathbb{C}$, donc de $\mathbb{C} \setminus K$; de plus, O est fermée dans $\Omega \setminus K$, donc dans $\mathbb{C} \setminus K$ puisque son adhérence dans $\mathbb{C}$ est contenue dans Ω. Ainsi, O est une partie connexe, ouverte et fermée de $\mathbb{C} \setminus K$, donc une composante connexe de $\mathbb{C} \setminus K$.

Preuve du théorème 9.2.1. Montrons d'abord que (a) entraîne (b).

Supposons que (b) ne soit pas vérifiée. D'après 9.2.2, l'ouvert $\mathbb{C} \setminus K$ possède donc une composante connexe bornée O dont l'adhérence est contenue dans Ω. Si a est un point de O, alors la fonction $z \to 1/(z-a)$ est holomorphe au voisinage de K, et le lemme 9.1.1 montre que cette fonction n'est pas uniformément approchable sur ∂O par des fonctions holomorphes dans Ω. Comme $\partial O \subset K$, la propriété (a) n'est donc pas vérifiée.

Montrons maintenant que (b) entraîne (a). Si (b) est vérifiée, alors, d'après 9.2.2, toutes les composantes connexes bornées de $\mathbb{C}\backslash K$ rencontrent $S = \mathbb{C}\backslash\Omega$, donc toute fonction holomorphe au voisinage de K peut s'approcher uniformément sur K par des fonctions rationnelles sans pôles dans Ω d'après le théorème de Runge. En particulier, (b) entraîne (a).

Montrons que (c) entraîne (b). Supposons (b) non vérifiée. Alors $\Omega\backslash K$ possède une composante connexe O relativement compacte dans Ω. D'après 9.2.2, O est une composante connexe de $\mathbb{C}\backslash K$, donc $\partial O \subset K$. D'après le principe du maximum, on a donc $|f(z_0)| \leqslant \sup_K |f|$ pour toute fonction $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ et pour tout point $z_0 \in O$. Par conséquent, (c) n'est pas vérifiée.

Il reste simplement à montrer l'implication (b)⇒(c) ; supposons donc (b) vérifiée et fixons $z_0 \in \Omega\backslash K$.

Il est clair que Ω et $K' = K \cup \{z_0\}$ vérifient la propriété (b), donc aussi la propriété (a). Si V et W sont des ouverts disjoints tels que $K \subset V$ et $z_0 \in W$, alors la fonction $g : V \cup W \to \mathbb{C}$ définie par $g(z) = 0$ sur V et $g(z) = 1$ sur W est holomorphe sur $V \cup W$, donc au voisinage de K'. En utilisant (a), on peut donc trouver une fonction $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ telle que $f(z_0)$ soit très proche de 1 et $f(z)$ soit très proche de 0 sur K. Une telle f montre que (c) est vérifiée.

Corollaire 9.2.3. *Pour un compact* $K \subset \mathbb{C}$*, les propriétés suivantes sont équivalentes.*

(a) *Toute fonction holomorphe au voisinage de* K *peut être approchée uniformément sur* K *par des fonctions polynomiales ;*

(b) $\mathbb{C}\backslash K$ est connexe.

(c) *Pour tout point* $z_0 \in \mathbb{C}\backslash K$*, on peut trouver un polynôme* P *tel que* $|P(z_0)| > \sup_K |P(z)|$.

Preuve. Le théorème 9.2.1 donne le résultat pour des fonctions entières au lieu de fonctions polynomiales. Il suffit donc d'observer que toute fonction entière est uniformément approchable sur les compacts par des fonctions polynomiales.

La condition (c) du théorème 9.2.1 suggère la définition suivante.

Définition 9.2.4. *Si* E *est une partie de* Ω*, l'***enveloppe d'holomorphie de** E **dans** Ω *est l'ensemble* $\hat{E}_\Omega$ *défini par*

$$\hat{E}_\Omega = \left\{ z \in \Omega;\ \forall f \in \mathcal{H}(\Omega) \quad |f(z)| \leqslant \sup_{\zeta \in E} |f(\zeta)| \right\}.$$

Remarques. 1) On a toujours $E \subset \hat{E}_\Omega$.

2) L'application $E \mapsto \hat{E}_\Omega$ est croissante pour l'inclusion. De plus, on a $\widehat{(\hat{E}_\Omega)}_\Omega = \hat{E}_\Omega$ pour tout ensemble $E \subset \Omega$.

3) On dit que le compact $K \subset \Omega$ est **holomorphiquement convexe dans** Ω si $\hat{K}_\Omega = K$. D'après 9.2.1, il revient au même de dire que toute fonction holomorphe au voisinage de K est uniformément approchable sur K par des fonctions holomorphes dans Ω, ou encore que $\Omega \setminus K$ n'a pas de composante connexe relativement compacte dans Ω.

Le théorème suivant donne une description « non analytique » de l'enveloppe d'holomorphie : $\hat{K}_\Omega$ est l'ensemble obtenu en « bouchant les trous » du compact K.

Théorème 9.2.5. *$\hat{K}_\Omega$ est la réunion de K et des composantes connexes de $\Omega\backslash K$ qui sont relativement compactes dans Ω.*

Preuve. Notons L la réunion de K et des composantes connexes de $\Omega\backslash K$ relativement compactes de Ω. D'après 9.2.2 et le lemme 9.1.7, L est un compact de Ω.

Si O est une composante connexe de $\Omega\backslash K$ relativement compacte dans Ω, alors, d'après 9.2.2, O est une composante connexe de $\mathbb{C} \setminus K$. On a donc $\partial O \subset K$, et donc $O \subset \hat{K}_\Omega$ d'après le principe du maximum. Par conséquent L est contenu dans $\hat{K}_\Omega$.

Enfin, par définition de L, l'ouvert $\Omega\backslash L$ n'a pas de composantes relativement compactes dans Ω. D'après 9.2.1, L est donc holomorphiquement convexe dans Ω. Comme L contient K, on a donc $\hat{K}_\Omega \subset L$.

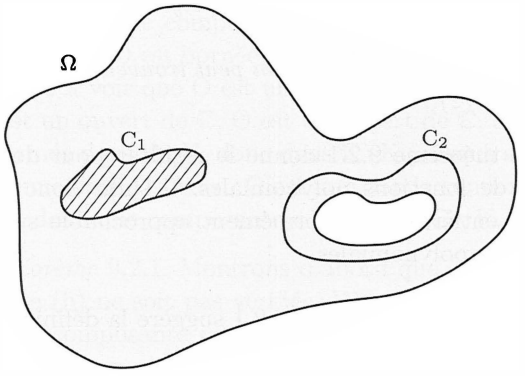


FIG. 40. $(\widehat{C_1})_\Omega$ est la région hachurée, $(\widehat{C_2})_\Omega = C_2$

Corollaire 9.2.6. *$\hat{K}_\Omega$ est un compact de Ω, holomorphiquement convexe dans Ω.*

Preuve. Compte tenu de 9.2.2, le fait que $\hat{K}_\Omega$ soit un compact de Ω découle du théorème et du lemme 9.1.7. Le deuxième point est une conséquence immédiate de la définition de l'enveloppe d'holomorphie.

Voici pour finir quelques informations « géométriques » sur l'enveloppe d'holomorphie de K.

Proposition 9.2.7. $\hat{K}_\Omega$ *est contenu dans l'enveloppe convexe de* K.

Preuve. Rappelons que l'**enveloppe convexe** de K, notée conv(K), est par définition le plus petit convexe de $\mathbb{C}$ contenant K. Comme on est en dimension finie, conv(K) est un compact, et d'après le théorème de séparation des convexes en dimension 2, on en déduit que conv(K) est l'intersection de tous les demi-plans fermés contenant K. De manière équivalente, on a

$$(*) \qquad \mathrm{conv}(K) = \left\{ z \in \mathbb{C};\ \forall a \in \mathbb{C}\ \ \langle z, a\rangle \leqslant \sup_{\zeta \in K} \langle \zeta, a\rangle \right\},$$

où $\langle\ ,\ \rangle$ désigne le produit scalaire usuel sur $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$.

Pour $a, w \in \mathbb{C}$, on a $\langle w, a\rangle = \mathrm{Re}(\overline{a}w) = \log|e^{\overline{a}w}|$. Comme l'exponentielle est une fonction entière, le résultat découle donc directement de $(*)$ et de la définition de $\hat{K}_\Omega$.

Corollaire 9.2.8. *Tout compact convexe de* $\mathbb{C}$ *est holomorphiquement convexe dans* $\mathbb{C}$. *En d'autres termes, si* K *est un compact convexe de* $\mathbb{C}$, *alors* $\mathbb{C} \setminus K$ *est connexe et toute fonction holomorphe au voisinage de* K *peut s'approcher uniformément sur* K *par des fonctions polynomiales.*

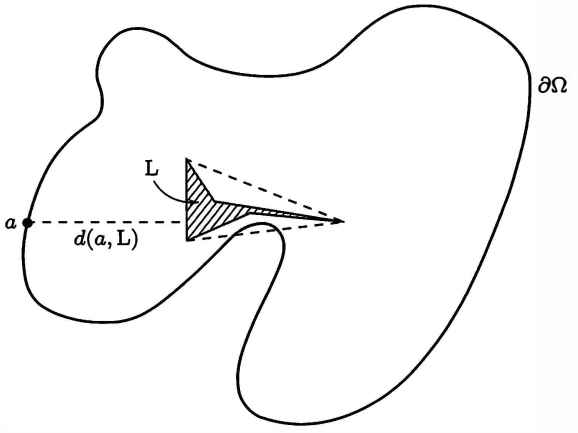


FIG. 41. K est la frontière du polygone hachuré; $L = \hat{K}_\Omega$ est le polygone hachuré

Proposition 9.2.9. *Pour tout point $a \in \partial\Omega$, on a $d(a,\mathrm{K}) = d(a,\hat{\mathrm{K}}_\Omega)$.*

Preuve. Fixons $a \in \partial\Omega$. Comme $\hat{\mathrm{K}}_\Omega$ contient K, on a $d(a,\mathrm{K}) \geqslant d(a,\hat{\mathrm{K}}_\Omega)$. D'autre part, la fonction $z \mapsto \frac{1}{z-a}$ est holomorphe dans Ω, donc $|\frac{1}{z-a}| \leqslant \sup_{\zeta\in\mathrm{K}} |\frac{1}{\zeta-a}| = \frac{1}{d(a,\mathrm{K})}$ pour tout point $z \in \hat{\mathrm{K}}_\Omega$, par définition de $\hat{\mathrm{K}}_\Omega$; on a donc également $d(a,\hat{\mathrm{K}}_\Omega) \geqslant d(a,\mathrm{K})$.

9.3. Résolution de l'équation $\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} = v$

On a vu au chapitre 3 (corollaire 3.7.6) que si v est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{C}$ à support compact, alors on peut trouver une fonction $u \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{C})$ telle que $\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} = v$. En combinant ce fait avec le théorème de Runge, on va maintenant démontrer un résultat plus général.

Théorème 9.3.1. *Si Ω est un ouvert de $\mathbb{C}$ et si $v \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$, alors il existe une fonction $u \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ telle que $\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} = v$.*

Preuve. Fixons une fonction $v \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$. Soit également $(\mathrm{K}_n)_{n\geqslant 0}$ une suite croissante de compacts holomorphiquement convexes dans Ω telle que $\Omega = \bigcup_n \hat{\mathrm{K}}_n$. On peut par exemple prendre $\mathrm{K}_n = (\hat{\mathrm{L}}_n)_\Omega$, où (L_n) est une suite exhaustive de compacts pour Ω.

Par récurrence, on va construire une suite $(\mathrm{S}_n) \subset \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ vérifiant les propriétés suivantes :

$$\begin{cases} \text{(i)} & \dfrac{\partial \mathrm{S}_n}{\partial \bar{z}} \equiv v \quad \text{au voisinage de } \mathrm{K}_n\,; \\ \text{(ii)} & |\mathrm{S}_{n+1}(z) - \mathrm{S}_n(z)| < 2^{-n} \quad \text{sur } \mathrm{K}_n\,. \end{cases}$$

Choisissons une fonction $\chi_0 \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{C})$, à support compact contenue dans Ω, telle que $\chi_0 \equiv 1$ au voisinage de K_0. D'après le corollaire 3.7.6, on peut trouver une fonction $\mathrm{S}_0 \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ telle que $\frac{\partial \mathrm{S}_0}{\partial \bar{z}} = \chi_0 v$ sur Ω. La fonction S_0 vérifie alors (i).

Supposons avoir construit $\mathrm{S}_0, \ldots, \mathrm{S}_n$, et construisons S_{n+1}.

Soit $\chi_{n+1} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{C})$ à support compact contenu dans Ω et identiquement égale à 1 au voisinage de K_{n+1}. Toujours d'après 3.7.6, on peut trouver une fonction $\mathrm{R}_{n+1} \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ telle que $\frac{\partial \mathrm{R}_{n+1}}{\partial \bar{z}} = \chi_{n+1} v$ sur Ω. Si P est une fonction quelconque de $\mathcal{H}(\Omega)$, la fonction $\mathrm{S} = \mathrm{R}_{n+1} - \mathrm{P}$ vérifie donc (i) au rang $n+1$. Cela incite à chercher S_{n+1} sous la forme $\mathrm{R}_{n+1} - \mathrm{P}_n$, pour une fonction $\mathrm{P}_n \in \mathcal{H}(\Omega)$ bien choisie. La propriété (ii) sera satisfaite si $|(\mathrm{R}_{n+1} - \mathrm{S}_n)(z) - \mathrm{P}_n(z) < 2^{-n}|$ sur K_n. Si on pose $\varphi_n = \mathrm{R}_{n+1} - \mathrm{S}_n$, alors $\frac{\partial \varphi_n}{\partial \bar{z}} \equiv v - v \equiv 0$ au voisinage de K_n ; autrement

dit, φ_n est holomorphe au voisinage de K_n. Comme K_n est holomorphiquement convexe dans Ω, on peut donc effectivement trouver une fonction $P_n \in \mathcal{H}(\Omega)$ réalisant (ii).

Comme la suite $(\mathring{K}_n)$ est croissante et recouvre Ω, tout compact de Ω est contenu dans l'un des $\mathring{K}_n$; la condition (ii) entraîne donc que la série $\sum(S_{n+1} - S_n)$ converge uniformément sur les compacts de Ω. Pour $z \in \Omega$, on peut donc poser

$$u(z) = S_0(z) + \sum_0^\infty (S_{n+1}(z) - S_n(z)) \ .$$

Pour tout $n \geqslant 0$, on a $u = S_n + r_n$, où $r_n = \sum_n^\infty (S_{p+1} - S_p)$. Grâce à (ii), la série définissant r_n converge uniformément sur K_n. De plus, la condition (i) entraîne que toutes les fonctions $S_{p+1} - S_p$ $(p \geqslant n)$ sont holomorphes dans $\mathring{K}_n$, donc r_n est holomorphe dans $\mathring{K}_n$. Par suite, la fonction u est de classe $\mathcal{C}^\infty$ dans $\mathring{K}_n$, et $\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} \equiv \frac{\partial S_n}{\partial \bar{z}} \equiv v$ dans $\mathring{K}_n$. Comme ces propriétés sont vraies pour tout n et comme $\Omega = \bigcup_n \mathring{K}_n$, on en déduit que la fonction u est de classe $\mathcal{C}^\infty$ dans Ω et vérifie $\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} = v$.

9.4. Problème de Cousin et théorème de Mittag-Leffler

On sait que si f est une fonction holomorphe dans une couronne $V = \{r_1 < |z| < r_2\}$, avec pour développement de Laurent $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n z^n$, alors la série $\sum_{n\geqslant 0} c_n z^n$ converge uniformément sur les compacts de $V_2 = \{|z| < r_2\}$ et la série $\sum_{n<0} c_n z^n$ converge uniformément sur les compacts de $V_1 = \{|z| > r_1\}$. En particulier, il existe une fonction f_1 holomorphe dans V_1 et une fonction f_2 holomorphe dans V_2 telles que $f \equiv f_1 - f_2$ dans $V = V_1 \cap V_2$.

On peut alors se demander si, étant donnés deux ouverts quelconques $\Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbb{C}$ et une fonction f holomorphe dans $\Omega_1 \cap \Omega_2$, on peut toujours trouver $f_1 \in \mathcal{H}(\Omega_1)$ et $f_2 \in \mathcal{H}(\Omega_2)$ telles que $f \equiv f_1 - f_2$ dans $\Omega_1 \cap \Omega_2$. Plus généralement, étant donnés un recouvrement ouvert $(\Omega_i)_{i\in I}$ d'un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$ et, pour chaque couple $(i\,,j) \in I^2$, une fonction $f_{ij} \in \mathcal{H}(\Omega_i \cap \Omega_j)$, est-il possible de trouver des fonctions f_i telles que $f_i \in \mathcal{H}(\Omega_i)$ pour tout i et $f_{ij} \equiv f_i - f_j$ dans $\Omega_i \cap \Omega_j$ pour tout couple $(i\,,j)$? Ce problème porte le nom de **problème de Cousin additif**. Il existe également un problème de Cousin *multiplicatif*, mais on n'en parlera pas ici.

Il est clair que si le problème de Cousin admet une réponse positive, alors les fonctions f_{ij} doivent vérifier $f_{ij} \equiv -f_{ji}$ dans $\Omega_i \cap \Omega_j$ et $f_{ij} + f_{jk} + f_{ki} \equiv 0$ dans $\Omega_i \cap \Omega_j \cap \Omega_k$ $(i, j, k \in I)$. Il s'avère que ces conditions suffisent à elles-seules à assurer l'existence des fonctions f_i.

Théorème 9.4.1. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$, soit $(\Omega_i)_{i\in I}$ un recouvrement ouvert de Ω et, pour chaque couple $(i,j) \in I^2$, soit f_{ij} une fonction holomorphe dans $\Omega_i \cap \Omega_j$. On suppose qu'on a $f_{ij} \equiv -f_{ji}$ dans $\Omega_i \cap \Omega_j$ et $f_{ij} + f_{jk} + f_{ki} \equiv 0$ dans $\Omega_i \cap \Omega_j \cap \Omega_k$ $(i,j,k \in I)$. Alors il existe des fonctions f_i telles que $f_i \in \mathcal{H}(\Omega_i)$ et $f_{ij} \equiv f_i - f_j$ dans $\Omega_i \cap \Omega_j$ $(i,j \in I)$.*

La preuve de ce théorème utilise un résultat de « partition de l'unité » démontré en annexe :

Théorème A.2.7 *Si $(W_i)_{i\in I}$ est un recouvrement ouvert d'un ouvert $W \subset \mathbb{R}^n$, il existe une famille $(\chi_i)_{i\in I} \subset \mathcal{C}^\infty(W)$ vérifiant les propriétés suivantes :*

(i) *pour tout $i \in I$, $\mathrm{supp}(\chi_i) \subset W_i$ et $0 \leqslant \chi_i \leqslant 1$;*

(ii) *la famille $(X_i) = (\mathrm{supp}(\chi_i))_{i\in I}$ est* **localement finie** *relativement à W, ce qui signifie que tout point $x \in W$ possède un voisinage ne rencontrant qu'un nombre fini de X_i ;*

(iii) *$\sum_i \chi_i \equiv 1$ sur W.*

On dit que (χ_i) est une **partition de l'unité** *pour W subordonnée au recouvrement (W_i).*

Preuve du théorème 9.4.1. Soit $(\chi_k)_{k\in I}$ une partition de l'unité pour Ω subordonnée au recouvrement ouvert $(\Omega_k)_{k\in I}$.

Pour $i \in I$ et $z \in \Omega_i$, posons $h_i(z) = \sum_{k\in I} f_{ik}(z)\chi_k(z)$. Comme la somme ne comporte localement qu'un nombre fini de termes non nuls, la fonction h_i est bien définie, et $h_i \in \mathcal{C}^\infty(\Omega_i)$ pour tout $i \in I$.

Les hypothèses faites sur les f_{ij} entraînent qu'on a $f_{ij}\chi_k = (f_{ik} - f_{jk})\chi_k$ pour tout triplet (i,j,k), et donc $h_i - h_j \equiv \sum_k (f_{ik} - f_{jk})\chi_k \equiv f_{ij}\sum_k \chi_k \equiv f_{ij}$ dans $\Omega_i \cap \Omega_j$. La famille (h_i) est donc une solution $\mathcal{C}^\infty$ au problème de Cousin. On va maintenant « corriger » les fonctions h_i pour obtenir une solution holomorphe.

Comme f_{ij} est holomorphe, on a $\frac{\partial h_i}{\partial \bar{z}} \equiv \frac{\partial h_j}{\partial \bar{z}}$ dans $\Omega_i \cap \Omega_j$, pour tout couple $(i,j) \in I^2$. Il existe donc une fonction $v \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ telle que $v_{|\Omega_i} = \frac{\partial h_i}{\partial \bar{z}}$ pour tout $i \in I$; et d'après le théorème 9.3.1, on peut trouver une fonction $u \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ telle que $\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} = v$. Définissons alors les fonctions f_i par $f_i(z) = h_i(z) - u(z)$, $z \in \Omega_i$. Par définition de u, les f_i sont holomorphes, et on a $f_i - f_j \equiv h_i - h_j \equiv f_{ij}$ dans $\Omega_i \cap \Omega_j$.

Comme application du théorème 9.4.1, on va maintenant démontrer le **théorème de Mittag-Leffler.**

Théorème 9.4.2. (Théorème de Mittag-Leffler.)

Soit S un sous-ensemble de Ω sans points d'accumulation dans Ω. Pour chaque $a \in S$, soit R_a une fonction rationnelle ayant comme seul

pôle le point a. Alors il existe une fonction f méromorphe dans Ω, dont les seuls pôles sont les points de S, *et telle que pour chaque* $a \in S$, $f - R_a$ *a une singularité éliminable au point a ; autrement dit la partie principale de f en chaque point* $a \in S$ *est égale à* R_a.

Preuve. Posons $\Omega_a = (\Omega \backslash S) \cup \{a\}$ et $f_{ab} = R_b - R_a$ $(a, b \in S)$. Comme S est un fermé discret de Ω, les Ω_a sont ouverts, et recouvrent visiblement Ω. De plus, comme $\Omega_a \cap \Omega_b \subset \mathbb{C} \backslash S$ si $a \neq b$, chaque fonction f_{ab} est holomorphe dans $\Omega_a \cap \Omega_b$; enfin, il est clair que les f_{ab} vérifient les hypothèses du théorème 9.4.1. On peut donc trouver des fonctions f_a telles que chaque f_a est holomorphe dans Ω_a et $f_a - f_b \equiv R_b - R_a$ sur $\Omega_a \cap \Omega_b$ $(a, b \in S)$. On en déduit que les fonctions $f_a + R_a$ coïncident sur $\Omega \backslash S$. Comme elles sont de plus holomorphes sur $\Omega \backslash S$, elles définissent une seule et même fonction $f \in \mathcal{H}(\Omega \backslash S)$. Pour tout point $a \in S$, les fonctions $f - R_a$ et f_a coïncident sur $\Omega_a \setminus \{a\}$. Comme f_a est holomorphe sur Ω_a, qui est un voisinage de a, cela prouve que chaque point $a \in S$ est une singularité éliminable pour $f - R_a$.

Corollaire 9.4.3. *Soit Ω un ouvert de* $\mathbb{C}$, *et soit* S *un sous-ensemble de Ω sans point d'accumulations dans Ω. Pour chaque* $a \in S$, *choisissons un entier* $m_a \geqslant 1$. *Alors il existe une fonction f méromorphe dans Ω, ayant un pôle d'ordre* m_a *en chaque point* $a \in S$, *et n'ayant pas d'autre pôle dans Ω.*

9.5. Théorème de Weierstrass

On sait que si f est une fonction holomorphe dans un ouvert connexe $\Omega \subset \mathbb{C}$, alors l'ensemble des zéros de f est un fermé discret de Ω. Le **théorème de Weierstrass,** qui est l'exact analogue de 9.4.3, montre qu'inversement, tout fermé discret de Ω est l'ensemble des zéros d'une fonction holomorphe dans Ω.

Théorème 9.5.1. (Théorème de Weierstrass.)

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$, *et soit* S *un fermé discret de Ω. Pour tout point* $a \in S$, *choisissons un entier* $m_a \geqslant 1$. *Alors il existe une fonction* $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ *ayant un zéro de multiplicité* m_a *en chaque point* $a \in S$, *et ne s'annulant pas en dehors de* S.

Si S est fini, $f(z) = \prod_{a \in S} (z-a)^{m_a}$ convient. On supposera donc désormais que S est infini.

La démonstration classique du théorème de Weierstrass utilise des produits infinis (voir à ce sujet l'exercice 9.25). On va en donner ici une

preuve différente, basée sur le théorème 9.3.1 et sur un lemme purement topologique. La preuve de ce lemme étant assez délicate, on peut sans dommage la sauter en première lecture.

Si a est un point de Ω, on dira qu'un ensemble $\Gamma \subset \Omega$ est une **coupure de Ω d'origine** a si Γ est l'image d'une application $\gamma : [0;+\infty[\to \Omega$ continue, injective, joignant a à l'infini ou à un point de $\partial\Omega$; autrement dit, γ vérifie $\gamma(0) = a$ et l'une des deux propriétés suivantes : ou bien $|\gamma(t)|$ tend vers $+\infty$ quand t tend vers $+\infty$, ou bien $\gamma(t)$ admet une limite $c \in \partial\Omega$ en $+\infty$. Dans le second cas, le point $c \in \partial\Omega$ est appelé l'**extrémité** de la coupure Γ.

Lemme 9.5.2. *Pour tout point $a \in S$, on peut construire une coupure de Ω d'origine a, notée Γ_a, de sorte que les Γ_a soient deux à deux disjointes et que la famille $(\Gamma_a)_{a\in S}$ soit localement finie relativement à Ω.*

Preuve.

Cas 1. *Supposons que* S *soit borné.*

Comme S est infini, l'hypothèse entraîne en particulier $\Omega \neq \mathbb{C}$, puisque S n'a pas de points d'accumulation dans Ω.

Pour $k \in \mathbb{N}^*$, posons $\Omega_k = \{z \in \mathbb{C};\ d(z, \mathbb{C}\backslash\Omega) > 1/k^2\}$; posons également $\Omega_0 = \emptyset$. Les Ω_k sont des ouverts de Ω, la suite (Ω_k) est croissante, et $\Omega = \bigcup_k \Omega_k$. De plus, comme S est borné et n'a pas de point d'accumulation dans Ω, chaque Ω_k ne rencontre S qu'en un nombre fini de points.

Pour $a \in S$, notons $k(a)$ le plus petit entier k tel que $a \in \Omega_k$, et posons $S_k = \{a \in S;\ k(a) = k\}$. Les S_k sont finis, deux à deux disjoints, et $S = \bigcup_k S_k$.

On va construire, pour chaque point $a \in S$, une suite $(c_k(a))_{k\geqslant k(a)} \subset \Omega$. On notera $\Gamma_k(a)$ la « ligne brisée » reliant les points $c_k(a)$:

$$\Gamma_k(a) = \bigcup_{l\leqslant k} [c_l(a)\,;c_{l+1}(a)]\ ,$$

où $[\alpha\,;\beta]$ est le segment de droite joignant α à β. On demande que les propriétés suivantes soient vérifiées :

(i) $c_{k(a)}(a) = a$;

(ii) $c_{k+1}(a) \in \partial\Omega_k$ et $[c_k(a)\,;c_{k+1}(a)[\subset \Omega_k\backslash\Omega_{k-1}$ pour tout entier $k \geqslant k(a)$;

(iii) $|c_{k+1}(a) - c_k(a)| \leqslant 2/(k-1)^2$ pour tout $k \geqslant k(a)$;

(iv) pour tout entier k, les ensembles $\Gamma_k(a)$, $a \in S$, $k(a) \leqslant k$ sont deux à deux disjoints et disjoints de S_{k+1}.

Supposons avoir construit, pour un certain entier $K \geqslant 0$, les points $c_{k(a)}(a), \ldots, c_{K+1}(a)$ pour tous les $a \in S$ vérifiant $k(a) \leqslant K$.

Par (i), on doit poser $c_{K+1}(a) = a$ pour $a \in S_{K+1}$. On va construire les points $c_{K+2}(a)$ pour $a \in S$, $k(a) \leqslant K+1$.

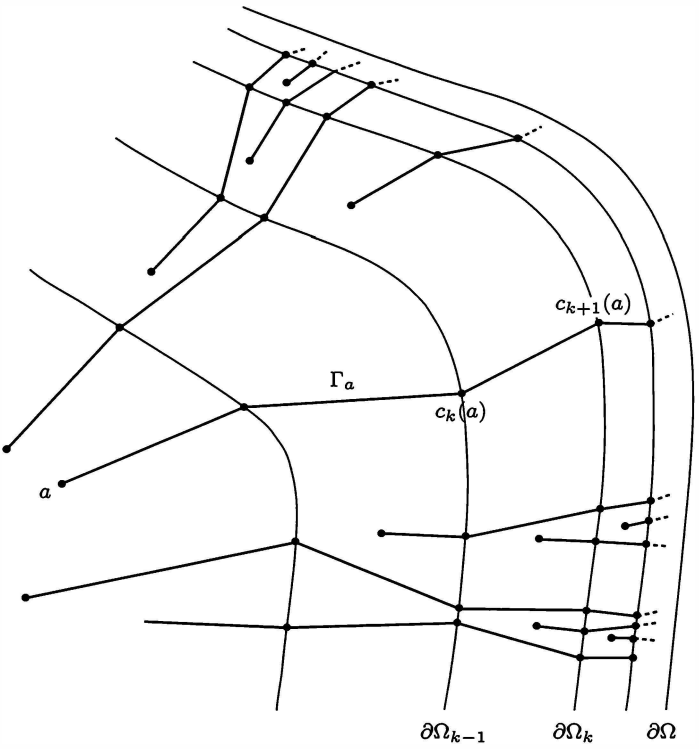


FIG. 42.

Soit $F = \{c_{K+1}(a);\ a \in S,\ k(a) \leqslant K+1\}$. L'ensemble F est fini, et contenu dans $\Omega_{K+1}\backslash\Omega_K$. Il s'agit de trouver, pour chaque point $c \in F$, un point $\tilde{c} \in \partial\Omega_{K+1}$ vérifiant $[c;\tilde{c}[\subset \Omega_{K+1}\backslash\Omega_K$ et $|\tilde{c}-c| \leqslant 2/K^2$, en imposant de plus que les segments $[c;\tilde{c}]$ soient deux à deux disjoints et disjoints de S_{K+2}.

Pour $c \in F$, choisissons un point $c' \in \partial\Omega$ tel que $|c-c'| = d(c,\partial\Omega)$. Si c_1, c_2 sont deux points de F, alors ou bien les segments $[c_1;c_1'[$, $[c_2;c_2'[$ sont disjoints, ou bien l'un est contenu dans l'autre : cela découle du fait que c_1 et c_2 sont situés de part et d'autre (au sens large) de la médiatrice de $[c_1';c_2']$. On notera $I_1, \ldots, I_n$ les segments $[c;c'[$ maximaux pour l'inclusion, et $c_1, \ldots, c_n$ les points de F correspondants. On a ainsi $F = \bigcup_j (F \cap I_j)$.

Pour $j \leqslant n$, on pose $r_j = d(c_j,\partial\Omega) = |c_j - c_j'|$; comme $F \cap \Omega_K = \emptyset$, on a $r_j \leqslant 1/K^2$ pour tout j.

Comme chaque I_j est un segment reliant un point de Ω_{K+1} à un point de $\mathbb{C}\backslash\Omega_{K+1}$, le premier point d'intersection de I_j avec $\partial\Omega_{K+1}$ (en partant de c_j) est bien défini ; on le note d_j.

Les segments $K_j = [c_j\,;d_j]$ étant compacts et deux à deux disjoints, on peut trouver $\varepsilon > 0$ tels que les ouverts $V_j = \{z;\ d(z,K_j) < \varepsilon\}$ soient encore deux à deux disjoints, et on peut évidemment supposer $\varepsilon \leqslant 1/K^2$.

Soit $j \leqslant n$. Si u est un point quelconque de I_j, alors $d(u,\partial\Omega) = |u-c'_j|$: en effet, s'il existait un point $u' \in \partial\Omega$ tel que $|u-u'| < |u-c'_j|$, alors on aurait $|c_j-c'_j| = |c_j-u|+|u-c'_j| > |c_j-u'|$, ce qui contredirait le choix de c'_j. Comme $d_j \in \partial\Omega_{K+1}$, on a donc $|d_j-c'_j| = d(d_j,\partial\Omega) = 1/(K+1)^2$. Par conséquent, tous les points de $]d_j\,;c'_j[$ sont à distance strictement inférieure à $1/(K+1)^2$ de $\partial\Omega$, et donc $]d_j\,;c'_j[\subset \mathbb{C}\backslash\overline{\Omega}_{K+1}$. Comme $V_j \cap D(c'_j,r_j)$ est un voisinage ouvert de d_j, cela entraîne que l'ouvert $W_j = V_j \cap D(c'_j,r_j) \cap (\mathbb{C}\backslash\overline{\Omega}_{K+1})$ est non vide. On peut donc trouver un point $w_j \in W_j$ qui ne soit situé ni sur la droite (c_jd_j), ni sur aucune droite joignant un point de F à un point de S_{K+2} (car une réunion finie de droites est d'intérieur vide). Pour $c \in F \cap I_j = F \cap K_j$, on note alors $\tilde{c}$ le premier point d'intersection du segment $[c\,;w_j]$ avec $\partial\Omega_{K+1}$, ce qui a bien un sens car $c \in \Omega_{K+1}$ et $w_j \notin \Omega_{K+1}$. En procédant de la sorte pour tout $j \leqslant n$, on définit $\tilde{c}$ pour tout point $c \in F$.

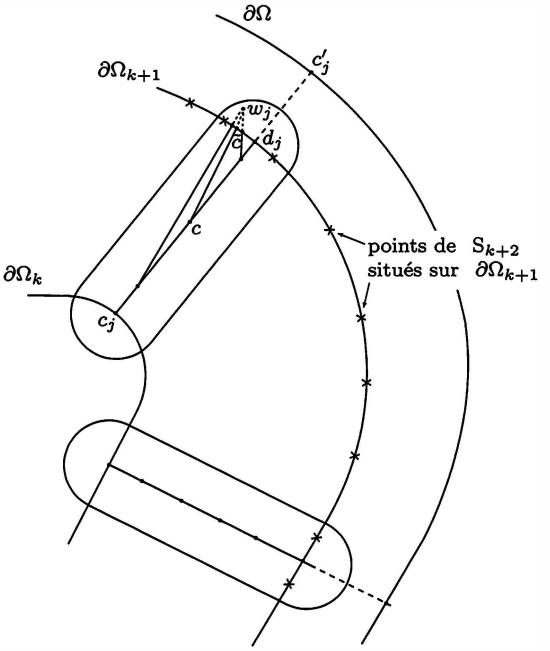


FIG. 43.

Par construction, aucun segment $[c;\tilde{c}]$ ne rencontre S_{K+2}. D'autre part, les V_j sont convexes car les I_j sont des segments, donc $[c;\tilde{c}] \subset V_j$ si $c \in F \cap I_j$. Comme les V_j sont disjoints et comme par ailleurs les segments $[c;\tilde{c}]$ associés aux points d'un même $F \cap I_j$ sont disjoints, on en déduit que les segments $[c;\tilde{c}]$ sont deux à deux disjoints.

Si $c \in F \cap I_j$ pour un certain j, alors $[c;\tilde{c}[\subset \overline{D}(c'_j, r_j)$ par convexité de $\overline{D}(c'_j, r_j)$, donc $[c;\tilde{c}[\cap \Omega_K = \emptyset$ puisque tous les points de $D(c'_j, r_j)$ sont à distance inférieure à r_j de $\partial\Omega$ et $r_j \leqslant 1/K^2$; comme $[c;\tilde{c}[\subset \Omega_{K+1}$ par définition de $\tilde{c}$, on a donc $[c;\tilde{c}[\subset \Omega_{K+1} \backslash \Omega_K$.

Enfin, $|c - \tilde{c}| \leqslant 2r_j \leqslant 2/K^2$ pour tout j et pour tout $c \in F \cap I_j$.

Ainsi, les points $\tilde{c}$ vérifient toutes les conditions requises. Par récurrence, on peut donc construire la suite $(c_k(a))$ pour tout point $a \in S$.

Pour $a \in S$, posons $\Gamma_a = \bigcup_{k \geqslant k(a)} [c_k(a); c_{k+1}(a)[$, et notons $\gamma_a : [k(a); +\infty[\to \Omega$ le « paramétrage » de Γ_a défini par

$$\gamma_a(t + k) = (1 - t)c_k(a) + tc_{k+1}(a)$$

si $t \in [0;1[$ et $k \in \mathbb{N}$, $k \geqslant k(a)$.

La condition (ii) entraîne que γ_a est injective et vérifie $\lim_{t \to \infty} d(\gamma_a(t), \partial\Omega) = 0$. De plus, il découle de (iii) qu'on a $|\gamma_a(t) - \gamma_a(t')| \leqslant 2 \sum_{k \geqslant K-1} 1/k^2$ si $t, t' \geqslant K$, donc $\gamma_a(t)$ vérifie le critère de Cauchy en $+\infty$, et par conséquent $\gamma_a(t)$ tend vers un point de $\partial\Omega$ quand t tend vers $+\infty$. Ainsi, $\Gamma_a = \mathrm{Im}(\gamma_a)$ est une coupure de Ω d'origine a.

Si $k \in \mathbb{N}$, on a (d'après (ii)) $\Gamma_a \cap \Omega_k = \emptyset$ pour tout point $a \in S$ vérifiant $k(a) > k$, donc l'ensemble $\{a \in S;\ \Gamma_a \cap \Omega_k \neq \emptyset\}$ est contenu dans $\bigcup_{j \leqslant k} (S \cap \Omega_j)$. En particulier, chaque Ω_k ne rencontre qu'un nombre fini de Γ_a, donc la famille (Γ_a) est localement finie relativement à Ω puisque les Ω_k recouvrent Ω. Enfin, les Γ_a sont deux à deux disjoints d'après (iv). La démonstration est donc terminée dans le cas où S est borné.

Cas général.

Soit $z_0 \in \Omega \backslash S$. Pour $z \in \Omega$, $z \neq z_0$, posons $z^* = \frac{1}{z - z_0}$; posons également $\Omega^* = \{z^*;\ z \in \Omega \backslash \{z_0\}\}$ et $S^* = \{a^*;\ a \in S\}$. L'ensemble S^* n'a pas de points d'accumulations dans Ω^*, et S^* est borné car $z_0 \notin \overline{S}$. De plus, on a $\partial\Omega^* = \{z^*; z \in \partial\Omega\}$ si Ω est borné, et $\partial\Omega^* = \{0\} \cup \{z^*; z \in \partial\Omega\}$ si Ω n'est pas borné. Si (Γ_{a^*}) est une famille de coupures de Ω^* donnée par le cas précédent, il suffit alors de poser $\Gamma_a = \{z_0 + \frac{1}{w}; w \in \Gamma_{a^*}\}$. La coupure Γ_a est non bornée si et seulement si Γ_{a^*} a pour extrémité 0.

Autre preuve dans le cas où $\Omega = \mathbb{C}$. L'ensemble S est dénombrable. D'après le théorème de Baire, la réunion de toutes les droites

(aa'), $a, a' \in S$ est donc d'intérieur vide dans $\mathbb{C}$. En particulier, on peut trouver un point $z_0 \in \mathbb{C}$ qui n'appartienne à aucune de ces droites (aa'). On note alors Γ_a la demi-droite $a + \mathbb{R}^+(a - z_0)$.

Par le choix de z_0, les Γ_a sont deux à deux disjointes. De plus, la définition des Γ_a montre qu'un disque $D = D(z_0, R)$ donné rencontre une demi-droite Γ_a si et seulement si $a \in D$. Comme S n'a pas de points d'accumulations, on en déduit que chaque disque $D(z_0, R)$ ne rencontre qu'un nombre fini de demi-droites Γ_a. La famille (Γ_a) est donc localement finie.

Remarque 9.5.3. *Soit Γ une coupure de Ω, d'origine a. Si Γ est non bornée, alors il existe une détermination holomorphe de $\log(z-a)$ dans $\Omega\backslash\Gamma$. Si Γ est bornée et a pour extrémité c, alors il existe une détermination holomorphe de $\log\left(\frac{z-a}{z-c}\right)$ dans $\Omega\backslash\Gamma$.*

Preuve. Cela découle du corollaire 5.4.21.

Preuve du théorème de Weierstrass. On va adopter la stratégie suivante, qui fonctionne dans de nombreuses situations et a d'ailleurs déjà été utilisée pour la résolution du problème de Cousin : on commence par construire une solution $\mathcal{C}^\infty$ au problème considéré, et on « corrige » ensuite cette solution grâce au théorème 9.3.1 pour obtenir une solution holomorphe.

Soit $(\Gamma_a)_{a\in S}$ une famille de coupures de Ω vérifiant les conclusions du lemme 9.5.2. Lorsque Γ_a est bornée, on note c_a l'extrémité de Γ_a.

Pour $a \in S$, on définit $\varphi_a : \Omega \to \mathbb{C}$ par $\varphi_a(z) = z - a$ si Γ_a est non bornée et $\varphi_a(z) = \frac{z-a}{z-c_a}$ si Γ_a est bornée. D'après la remarque 9.5.3, on peut choisir une détermination holomorphe L_a de $\log(\varphi_a)$ dans $\Omega\backslash\Gamma_a$.

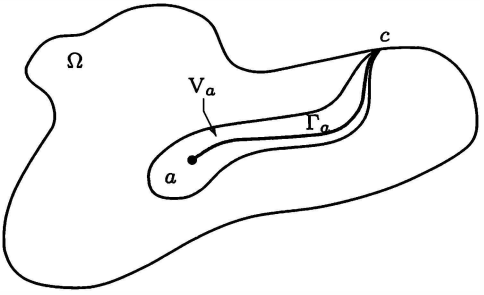


FIG. 44.

Comme la famille (Γ_a) est disjointe et localement finie relativement à Ω, il existe une famille d'ouverts (V_a), disjointe et localement finie relativement à Ω, telle que $\Gamma_a \subset V_a$ pour tout a. Le corollaire A.2.8 permet alors de choisir, pour tout $a \in \Omega$ une fonction $\chi_a \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ à support contenu dans V_a et valant 1 au voisinage de Γ_a.

Définissons maintenant $g : \Omega \to \mathbb{C}$ de la façon suivante : si $z \in \Gamma_a$ pour un certain $a \in S$, alors $g(z) = \varphi_a(z)^{m_a}$; si $z \in V_a \backslash \Gamma_a$, alors $g(z) = \exp(m_a \chi_a(z) L_a(z))$; et si $z \notin \bigcup_a V_a$, alors $g(z) = 1$.

Comme $\chi_a \equiv 1$ au voisinage de Γ_a, la fonction g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\bigcup_a V_a$. D'autre part, g est identiquement égale à 1 sur $\Omega' = \Omega \backslash \bigcup_a \mathrm{supp}(\chi_a)$. L'ensemble Ω' contient $\Omega \backslash \bigcup_a V_a$ et est de plus *ouvert* d'après le lemme A.2.5, car la famille $(\mathrm{supp}(\chi_a))$ est une famille de fermés de Ω localement finie. Par conséquent, g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de chaque point de $\Omega \setminus \bigcup_a V_a$. Au total, g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur Ω..

On va maintenant « corriger » la fonction g pour obtenir la fonction holomorphe désirée. De façon précise, on va chercher une fonction $u \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ telle que la fonction f définie par $f(z) = g(z)e^{-u(z)}$ soit holomorphe dans Ω. Si on trouve une telle fonction u, alors la fonction f correspondante conviendra car e^{-u} ne s'annule jamais.

La fonction u doit vérifier $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\left(ge^{-u}\right) = 0$, autrement dit $e^{-u}\frac{\partial g}{\partial \bar{z}} - ge^{-u}\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} = 0$, ou encore

$$g\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial g}{\partial \bar{z}}.$$

Définissons alors $v : \Omega \to \mathbb{C}$ par

$$v(z) = \begin{cases} \dfrac{1}{g(z)}\dfrac{\partial g}{\partial \bar{z}}(z) & \text{si } z \in \left(\bigcup_a V_a\right) \setminus S \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Comme g est par définition holomorphe au voisinage de chaque point de $S \bigcup (\Omega \backslash \bigcup_a V_a)$, la fonction v est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur Ω, et elle est identiquement nulle au voisinage de $S \bigcup (\Omega \backslash \bigcup_a V_a)$.

D'après le théorème 9.3.1, il existe une fonction $u \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ telle que $\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} = v$. On a alors $g\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} \equiv \frac{\partial g}{\partial \bar{z}}$ sur $(\bigcup_a V_a)\backslash S$, et $g\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} \equiv 0 \equiv \frac{\partial g}{\partial \bar{z}}$ sur $S \bigcup (\Omega \backslash \bigcup_a V_a)$. La fonction u convient donc, et la démonstration est terminée.

Corollaire 9.5.4. *Si* F *est une fonction méromorphe sur* Ω*, alors il existe deux fonctions* f, g *holomorphes dans* Ω *telles que* $F = f/g$*. Par conséquent, si* Ω *est connexe, alors* $\mathcal{M}(\Omega)$ *s'identifie au corps des fractions de l'anneau intègre* $\mathcal{H}(\Omega)$*.*

Preuve. Soit S l'ensemble des pôles de F, chaque point $a \in S$ ayant pour multiplicité m_a. D'après le théorème de Weierstrass, on peut trouver une fonction $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ non nulle ayant un zéro d'ordre au moins m_a en tout point $a \in S$. La fonction Fg est alors holomorphe dans $\Omega \backslash S$, et a une singularité éliminable en tout point de S ; elle se prolonge donc en une fonction $f \in \mathcal{H}(\Omega)$.

Le dernier résultat de ce chapitre englobe à la fois le théorème de Mittag-Leffler et la moitié du théorème de Weierstrass.

Théorème 9.5.5. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et soit S un fermé discret de Ω. Pour tout point $a \in S$, choisissons une fonction f_a holomorphe dans un voisinage épointé de a, et un entier $m_a \geqslant 1$. Alors il existe une fonction f holomorphe dans $\Omega \backslash S$ telle que pour tout $a \in S$, la fonction $f - f_a$ se prolonge en une fonction holomorphe au voisinage de a ayant un zéro d'ordre m_a au point a.*

Preuve. On va adopter la même stratégie que pour le théorème de Weierstrass : construction d'une solution $\mathcal{C}^\infty$, puis correction pour obtenir une solution holomorphe. Dans ce qui suit, pour tout disque $\Delta \subset \mathbb{C}$, on notera 2Δ le disque de même centre et de rayon double.

Choisissons pour chaque $a \in S$ un disque ouvert $D_a = D(a, r_a)$ de telle sorte que les disques $2\overline{D}_a$ soit contenus dans Ω et deux à deux disjoints, et que chaque f_a soit holomorphe dans $2D_a \backslash \{a\}$. Pour chaque $a \in S$, fixons une fonction $\chi_a \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ à support compact contenu dans $2D_a$ et valant 1 au voisinage de $\overline{D}_a$.

Comme S n'a pas de point d'accumulation dans Ω, on vérifie sans difficulté que la famille $(2\overline{D}_a)$ est localement finie relativement à Ω. La fonction $g = \sum_{a \in S} \chi_a f_a$ est donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ dans $\Omega \backslash S$, et pour tout $a \in S$, on a $g \equiv f_a$ au voisinage de $\overline{D}_a \backslash \{a\}$.

D'après le théorème de Weierstrass, on peut trouver une fonction F holomorphe dans Ω qui ne s'annule pas en dehors de S possède un zéro de multiplicité m_a en chaque point $a \in S$. Si on peut trouver une fonction $u \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ telle que $f = g - uF$ soit holomorphe dans $\Omega \backslash S$, alors la fonction f conviendra.

La fonction u doit vérifier $\frac{\partial g}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial (uF)}{\partial \bar{z}}$, autrement dit $\frac{\partial g}{\partial \bar{z}} = F \frac{\partial u}{\partial \bar{z}}$ car F est holomorphe. Définissons alors $v : \Omega \to \mathbb{C}$ par

$$v(z) = \begin{cases} \dfrac{1}{F(z)} \dfrac{\partial g}{\partial \bar{z}}(z) & \text{si } z \notin \bigcup_a \overline{D}_a \\ 0 & \text{si } z \in \bigcup_a \overline{D}_a \end{cases}$$

Comme $g \equiv f_a$ au voisinage de $\overline{D}_a \backslash \{a\}$, on a $\frac{\partial g}{\partial \bar{z}} \equiv 0$ au voisinage de $\overline{D}_a \backslash \{a\}$ pour tout $a \in S$, donc $v \equiv 0$ au voisinage de $\bigcup_a \overline{D}_a$. D'autre part, la famille $(\overline{D}_a)$ est localement finie relativement à Ω, donc $\Omega \backslash (\bigcup_a \overline{D}_a)$ est un ouvert, sur lequel v est par définition de classe $\mathcal{C}^\infty$. La fonction v est donc $\mathcal{C}^\infty$ dans Ω tout entier.

Grâce au théorème 9.3.1, on peut trouver une fonction $u \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ telle que $\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} = v$. On a alors $F \frac{\partial u}{\partial \bar{z}} \equiv \frac{\partial g}{\partial \bar{z}}$ sur $\Omega \backslash (\bigcup_a \overline{D}_a)$, et $F \frac{\partial u}{\partial \bar{z}} \equiv 0 \equiv \frac{\partial g}{\partial \bar{z}}$ sur $(\bigcup_{a \in S} \overline{D}_a) \setminus S$. Cela termine la démonstration.

Corollaire 9.5.6. *Soit* S *un fermé discret de* Ω. *Si, pour chaque* $a \in S$, *on choisit un polynôme* P_a *de degré* n_a, *alors il existe une fonction* $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ *telle que pour tout* $a \in S$, *le polynôme de Taylor d'ordre* n_a *de* f *au point* a *est précisément* P_a.

Preuve. On applique le théorème précédent en prenant $f_a = P_a$ et $m_a = n_a + 1$. Comme les fonctions polynomiales sont holomorphes sur $\mathbb{C}$, la fonction f donnée par le théorème a une singularité éliminable en tout point $a \in S$, donc se prolonge holomorphiquement à Ω. Le prolongement, encore noté f, répond visiblement à la question.

Corollaire 9.5.7. *Soit* S *un fermé discret de* Ω. *Si* $(\lambda_a)_{a\in S}$ *est une famille quelconque de nombres complexes, alors on peut trouver une fonction* $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ *telle que* $f(a) = \lambda_a$ *pour tout* $a \in S$.

Preuve. On applique le corollaire précédent avec $P_a(z) = (z-a)+\lambda_a$.

Remarque 9.5.8. *Il est clair que le théorème* 9.5.5 *est plus général que le théorème de Mittag-Leffler. En revanche, le corollaire* 9.5.6 *n'est pas une généralisation du théorème de Weierstrass : en prenant* $P_a(z) = (z-a)^{n_a}$, *on obtient certes l'existence d'une fonction* $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ *ayant un zéro d'ordre* n_a *en chaque point* $a \in S$, *mais cette fonction peut très bien s'annuler en dehors de* S.

Exercices

9.1. Soit K un compact de $\mathbb{C}$. Pour $a \in \mathbb{C}\backslash K$, on note f_a la fonction définie sur K par $f_a(z) = \frac{1}{z-a}$. En s'inspirant de la preuve du théorème de Runge, montrer que toute fonction holomorphe au voisinage de K peut s'approcher uniformément sur K par des combinaisons linéaires des fonctions f_a.

9.2. (Théorème de Hartogs-Rosenthal.)
Soit $K \subset \mathbb{C}$ un compact de mesure nulle. Montrer que les fonctions rationnelles sans pôles dans K sont denses dans $\mathcal{C}(K)$.

9.3. Soit K un compact de $\mathbb{C}$. On suppose que $\mathbb{C}\backslash K$ est connexe, et que K est de mesure nulle dans $\mathbb{C}$. Montrer que les fonctions polynomiales sont denses dans $\mathcal{C}(K)$. Quel résultat retrouve-t-on lorsque K est un intervalle de $\mathbb{R}$?

9.4. (Théorème de Lavrentiev.)
Soit K un compact de $\mathbb{C}$. On suppose que $\mathbb{C}\backslash K$ est connexe, et que K est d'intérieur vide dans $\mathbb{C}$. Le but de l'exercice est de montrer que les fonctions polynomiales sont denses dans $\mathcal{C}(K)$.

A. Soit $z_0 \in K$.
1) Montrer qu'il existe une suite $(\zeta_n) \subset \mathbb{C}\backslash K$ convergeant vers z_0 telle que $|\zeta_{n+1} - z_0| < |\zeta_n - z_0|$ et $[\zeta_n\,;\zeta_{n+1}] \subset \mathbb{C}\backslash K$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2) *a*) Déduire de 1) que pour tout $t > 0$, il existe une mesure positive σ_t sur $\mathbb{C}$, à support compact, vérifiant les propriétés suivantes :

(i) $\sigma_t(K) = 0$;

(ii) $\mathrm{supp}(\sigma_t) \subset \overline{D}(z_0, t)$;

(iii) $\sigma_t(\{r_1 < |z - z_0| < r_2\}) = \frac{1}{t}(r_2 - r_1)$ si $0 < r_1 < r_2 < t$.

b) Montrer que pour tout $t > 0$ et pour toute fonction borélienne $\varphi : \mathbb{R}^+ \to [0 ; +\infty]$, on a

$$\int \varphi(|\zeta - z_0|)\, d\sigma_t(\zeta) = \frac{1}{t} \int \varphi(r)\, dr .$$

3) *a*) Soit L un compact de $\mathbb{C}$. Montrer qu'il existe une constante M telle que pour tous points $\zeta, w \in L$, on ait

$$\big|\log|w - \zeta|\big| \leqslant M + \log\left(\frac{1}{\big||w - z_0| - |\zeta - z_0|\big|}\right) .$$

b) En déduire qu'il existe une constante A telle que pour tout $t \in]0 ; 1]$ et pour tout $w \in K$, on ait

$$\int \big|\log|w - \zeta|\big|\, d\sigma_t(\zeta) \leqslant A + \big|\log|w - z_0|\big| .$$

4) On note U^μ le **potentiel logarithmique** d'une mesure complexe $\mu \in \mathcal{M}(K)$ (voir le chapitre 11) ; U^μ est la fonction définie presque partout (et partout sur $\mathbb{C}\backslash K$) par la formule

$$U^\mu(z) = \frac{1}{2\pi} \int \log|z - w|\, d\mu(w) .$$

Montrer que si $\mu \in \mathcal{M}(K)$ et si $U^\mu(z_0)$ est défini — autrement dit si la fonction $w \mapsto \log|w - z_0|$ est $|\mu|$-intégrable — alors

$$U^\mu(z_0) = \lim_{t \to 0} \int_{\mathbb{C}\backslash K} U^\mu(\zeta)\, d\sigma_t(\zeta) .$$

B. On note $\mathbf{P}(K)$ l'ensemble des fonctions $f \in \mathcal{C}(K)$ qui sont limites uniformes de fonctions polynomiales, et $\mathrm{Re}\,(\mathbf{P}(K))$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}(K, \mathbb{R})$ constitué par les parties réelles de fonctions de $\mathbf{P}(K)$.

1) Montrer que si $|z|$ est suffisamment grand, alors la fonction $w \mapsto \log|z - w|$ appartient à $\mathrm{Re}\,(\mathbf{P}(K))$.

2) Soit μ est une mesure réelle sur K orthogonale à $\mathrm{Re}\,(\mathbf{P}(K))$.

a) En utilisant 1), montrer qu'on a $U^\mu(\zeta) \equiv 0$ sur $\mathbb{C}\backslash K$.

b) En déduire que U^μ est nul presque partout.

3) Conclure que $\mathrm{Re}\,(\mathbf{P}(K))$ est dense dans $\mathcal{C}(K, \mathbb{R})$.

C. Soit μ une mesure complexe sur K orthogonale à $\mathbf{P}(K)$, et soit $\hat{\mu}$ sa transformée de Cauchy.

1) Montrer que $\hat{\mu}$ est nulle sur $\mathbb{C}\backslash K$.

2) Soit $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que $\hat{\mu}$ soit définie en z_0.

a) Montrer qu'il existe une suite de polynômes $(P_k)_{k\geqslant 1}$ vérifiant
(i) $|\mathrm{Re}\,(P_k(z)) - |z - z_0|| \leqslant 1/k$ pour tout $z \in K$ et pour tout k ;
(ii) $P_k(z_0) = 0$ pour tout k.

b) Pour $z \in K \setminus \{z_0\}$ et $k \geqslant 1$, on pose

$$f_k(z) = \frac{e^{-kP_k(z)} - 1}{z - z_0} .$$

Montrer qu'on a $\int f_k \, d\mu = 0$ pour tout k, et déterminer $\lim_{k\to\infty} f_k(z)$.

c) Montrer qu'on a $\hat{\mu}(z_0) = 0$.

3) Conclure.

9.5. (Densité des polynômes dans $L^2(\mu)$.)

Dans tout l'exercice, I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et μ est une mesure borélienne positive sur I vérifiant $\int_I |t|^n \, d\mu(t) < +\infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On pose $L^2(\mu) = L^2(I, \mu)$, et on note $\mathcal{P}$ l'ensemble des fonctions polynomiales sur I.

0) Vérifier qu'on a $\mathcal{P} \subset L^2(\mu)$, et que $\mathcal{P}$ est dense dans $L^2(\mu)$ si et seulement si l'implication suivante a lieu :

$$\left(f \in L^2(\mu) \quad \text{et} \quad \int_I t^n f(t)\, d\mu(t) = 0 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \right) \Rightarrow (f = 0) .$$

1) Dans cette question, on suppose qu'il existe une constante $\alpha > 0$ telle que $\int_I e^{\alpha|t|} \, d\mu(t) < +\infty$.

a) Montrer que μ est finie. En déduire que si $f \in L^2(\mu)$, alors la mesure $f\mu$ est de masse totale finie.

b) Soit $f \in L^2(\mu)$. Montrer que la formule

$$F(z) = \int_I e^{tz} f(t)\, d\mu(t)$$

définit une fonction holomorphe dans la bande $\{|\mathrm{Re}(z)| < \alpha\}$. Calculer $F^{(n)}(0)$ pour $n \in \mathbb{N}$ et, en considérant $f\mu$ comme une mesure sur $\mathbb{R}$, exprimer la transformée de Fourier de la mesure $f\mu$ à l'aide de la fonction F.

c) Montrer que $\mathcal{P}$ est dense dans $L^2(\mu)$.

2) Dans cette question, I est un intervalle compact $[a\,;b]$, et μ est la mesure de Lebesgue.

a) Déduire de 1) que $\mathcal{P}$ est dense dans $L^2([a\,;b])$.

b) Soit $\varphi : [a\,;b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue affine par morceaux, et soit (φ_n) une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a\,;b]$. On suppose qu'on a $\varphi_n(a) = \varphi(a)$ pour tout n, et que la suite (φ_n') converge vers φ' en norme L^2. Montrer que (φ_n) converge uniformément vers φ.

c) En utilisant *a*) et *b*), donner une démonstration du théorème de Weierstrass sur la densité des polynômes dans $\mathcal{C}([a\,;b])$.

3) Dans cette question, on prend $I =]0\,;+\infty[$ et $d\mu = w(t)\, dt$, où $w(t) = e^{-t^{1/4}}$.

a) Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ vérifiant $\mathrm{Re}(\alpha) < 0$. Pour $p \in \mathbb{N}$, calculer l'intégrale

$$I_p = \int_0^\infty u^p e^{\alpha u} \, du$$

après avoir justifié son existence.

b) En considérant $f(t) = \sin(t^{1/4})$, montrer que $\mathcal{P}$ n'est pas dense dans $L^2(\mu)$.

9.6. (Théorème de Müntz.)

Soit $\Lambda = (\lambda_n)$ une suite strictement croissante de nombres strictement positifs. On note E_Λ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}([0\,;1])$ engendré par les fonctions $t \mapsto t^{\lambda_n}$. Le but de l'exercice est d'établir l'équivalence des 3 propriétés suivantes :

(1) E_Λ est dense dans $\mathcal{C}([0\,;1])$;

(2) $\sum_0^\infty 1/\lambda_n = +\infty$;

(3) E_Λ est dense dans $L^2([0\,;1])$.

1) *a*) Soit U le demi-plan $\{\mathrm{Re}(z) > 0\}$, et soit $H^\infty(U)$ l'ensemble des fonctions holomorphes bornées sur U. Montrer que si μ est une mesure complexe sur $[0\,;1]$, alors la fonction $F : U \to \mathbb{C}$ définie par $F(z) = \int_0^1 t^z d\mu(t)$ appartient à $H^\infty(U)$.

b) Montrer que (2) entraîne (1) en utilisant l'exercice 10.27.

2) *a*) Soient $\alpha_0, \dots, \alpha_N \geqslant 0$. Calculer le déterminant de Gram des fonctions $t^{\alpha_0}, \dots, t^{\alpha_N} \in L^2([0\,;1])$, c'est-à-dire le déterminant de la matrice $(\langle t^{\alpha_i}, t^{\alpha_j} \rangle)$, où $\langle\ ,\ \rangle$ est le produit scalaire usuel sur $L^2([0\,;1])$.

b) Soit $\lambda \geqslant 0$ différent de tous les λ_n. Pour $N \geqslant 1$, calculer la distance dans $L^2([0\,;1])$ entre la fonction $t \mapsto t^\lambda$ et l'espace vectoriel engendré par $t^{\lambda_1}, \dots, t^{\lambda_N}$.

c) Montrer que (2) et (3) sont équivalentes.

3) Conclure.

9.7. Soit $a \in \mathbb{C} \cup \{-\infty\,; +\infty\}$. Montrer qu'il existe une suite de polynômes (P_n) telle que $P_n(z)$ converge vers 0 uniformément sur tout compact de $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ et $P_n(x)$ tend vers a pour tout tout $x \in \mathbb{R}$. Comparer avec l'exercice 3.74.

9.8. Montrer qu'il existe une suite de fonctions rationnelles (R_n) vérifiant les propriétés suivantes.

(1) Toutes les R_n ont leurs pôles dans $\mathbb{D}$.

(2) Pour tout compact $K \subset \mathbb{D}$, R_n n'a pas de pôles dans K pour n assez grand, et $R_n(z)$ tend vers 0 uniformément sur K.

(3) (R_n) converge simplement vers 0 sur $\mathbb{C}\backslash\mathbb{D}$.

(4) Tout point de $\mathbb{T}$ est adhérent à l'ensemble constitué par les pôles des fonctions R_n.

9.9. Soit $N \in \mathbb{N}^*$, soient $a_0, \dots, a_N \in \mathbb{C}$ et soient $\lambda_0, \dots, \lambda_N \in \mathbb{Q}$ vérifiant $\sum_0^N \lambda_j = 1$. On suppose que les λ_j sont de la forme r_j/r, où $r \in \mathbb{N}^*$, $r_j \in \mathbb{Z}$ et $\mathrm{pgcd}(r_j, r) = 1$. Soit également $K \subset \mathbb{C}$ un compact connexe contenant tous les a_j. Le but de l'exercice est de montrer à l'aide du théorème de Runge qu'il existe une détermination holomorphe de $\prod_0^N (z - a_j)^{\lambda_j}$ dans $\Omega = \mathbb{C}\backslash K$ (voir l'exercice 5.39 pour la définition et pour une autre preuve).

1) Pour $z \in \Omega$, on pose

$$A(z) = \sum_{j=0}^{N} \frac{\lambda_j}{z - a_j} .$$

Montrer que tout revient à trouver $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ vérifiant $g'/g = A$, et qu'il suffit pour cela de trouver une fonction $\Phi \in \mathcal{H}(\Omega)$ vérifiant

$$\Phi'(z) + \frac{1}{z - a_0} \equiv A(z) .$$

2) *a*) Montrer qu'il existe une suite de fonctions rationnelles (R_n) vérifiant les propriétés suivantes :

(1) pour tout $n \in \mathbb{N}$, le seul pôle éventuel de R_n est le point a_0 ;

(2) (R_n) converge vers A uniformément sur tout compact de Ω.

b) Montrer qu'on a $\lim_{n\to\infty} \operatorname{Res}(R_n, a_0) = 1$.

c) On pose

$$f_n(z) = R_n(z) - \frac{\operatorname{Res}(R_n, a_0)}{z - a_0} .$$

Montrer que les fonctions f_n admettent des primitives holomorphes sur Ω.

d) Soit $z_0 \in \Omega$, et soit $w_0 \in \mathbb{C}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note F_n la primitive de f_n vérifiant $F_n(z_0) = w_0$. Montrer que la suite (F_n) converge uniformément sur les compacts de Ω vers une fonction $\Phi \in \mathcal{H}(\Omega)$.

e) Conclure.

9.10. On garde les notations de l'exercice précédent. Montrer directement, sans utiliser le théorème de Runge, que la fonction $z \mapsto A(z) - \frac{1}{z-a_0}$ admet une primitive holomorphe sur Ω.

9.11. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$. Montrer que l'espace $\mathcal{H}(\Omega)$ est séparable.

9.12. Montrer directement que si K est un compact convexe de $\mathbb{C}$, alors $\mathbb{C} \setminus K$ est connexe.

9.13. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$, et soit $v \in \mathcal{C}^\infty(\Omega) \cap L^1(\Omega)$. Montrer que la formule

$$u(z) = -\frac{1}{\pi} \int_\Omega \frac{v(\zeta)}{\zeta - z}\, dm(\zeta)$$

définit une solution $\mathcal{C}^\infty$ de l'équation $\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} = v$.

9.14. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$, et soit $v \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$. Montrer qu'il existe une fonction $u \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ vérifiant $\Delta u = v$.

9.15. En s'inspirant de la preuve du théorème 9.3.1 et en utilisant l'hypoellipticité de l'opérateur $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ – voir la proposition 12.7.14 ou, mieux, l'exercice 12.43 – montrer que si $S \in \mathcal{D}'(\Omega)$ est une distribution quelconque, alors l'équation $\frac{\partial T}{\partial \bar{z}} = S$ admet toujours une solution dans $\mathcal{D}'(\Omega)$.

9.16. Soit $a > 0$, et soit f une fonction holomorphe dans la bande $\Omega = \{|\mathrm{Im}(z)| < a\}$. On suppose que $f(z)/z$ tend vers 0 quand $|z|$ tend vers l'infini, et qu'on a $\int_{\mathbb{R}} \frac{|f(x+iy)|}{1+|x|}\, dx < +\infty$ pour tout $y \in]-a\,;a[$.

1) Pour $b \in]0\,;a[$, montrer qu'on définit des fonction holomorphes respectivement dans les demi-plans $\Omega_{1b} = \{\mathrm{Im}(z) > -b\}$ et $\Omega_{2b} = \{\mathrm{Im}(z) < b\}$ en posant

$$f_{1b}(z) = \int_{\mathbf{R}} \frac{f(x-ib)}{x-ib-z}\,dx$$

et

$$f_{2b}(z) = \int_{\mathbf{R}} \frac{f(x+ib)}{x+ib-z}\,dx\ .$$

2) Montrer qu'il existe des fonctions f_1 et f_2 holomorphes respectivement dans $\{\mathrm{Im}(z) > -a\}$ et $\{\mathrm{Im}(z) < a\}$ telles que $f_1 \equiv f_{1b}$ dans Ω_{1b} et $f_2 \equiv f_{2b}$ dans Ω_{2b} pour tout $b < a$.

3) Montrer qu'on a $f \equiv f_1 - f_2$ dans Ω.

9.17. Les notations sont les mêmes que dans l'énoncé du théorème de Mittag-Leffler. Le but de l'exercice est de démontrer ce théorème en utilisant uniquement la résolution de l'équation $\dfrac{\partial u}{\partial \bar{z}} = v$.

1) Construire une fonction $\psi \in \mathcal{C}^\infty(\Omega\backslash \mathrm{S})$ telle que pour tout $a \in \mathrm{S}$, $\psi - \mathrm{R}_a$ se prolonge en une fonction holomorphe au voisinage de a.

2) Montrer que $\dfrac{\partial \psi}{\partial \bar{z}}$ se prolonge en une fonction $v \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$, identiquement nulle au voisinage de S.

3) Soit $u \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ vérifiant $\dfrac{\partial u}{\partial \bar{z}} = v$. Montrer que $f = \psi - u$ convient.

9.18. Essayer de démontrer le théorème de Mittag-Leffler directement à partir du théorème de Runge, en s'inspirant de la preuve du théorème 9.3.1.

9.19. (Mittag-Leffler « abstrait ».)

A. Soit $((\mathrm{X}_n, d_n))$ une suite d'espaces métriques. Pour tout couple d'entiers positifs $(n\,,m)$ tel que $n < m$, on suppose donnée une application $\pi_{nm} : \mathrm{X}_m \to \mathrm{X}_n$ de sorte que les propriétés suivantes soient vérifiées :

(1) $\pi_{nm} \circ \pi_{ml} = \pi_{nl}$ si $n < m < l$.

(2) Chaque application π_{nm} est uniformément continue.

(3) $\pi_{nm}(\mathrm{X}_m)$ est dense dans $\pi_{nn+1}(\mathrm{X}_{n+1})$ pour tout couple $(n\,,m)$.

1) Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathrm{Y}_n = \pi_{nn+1}(\mathrm{X}_n)$. Montrer que si $n < m$, alors $\pi_{nm}(\mathrm{Y}_m) \subset \mathrm{Y}_n$ et $\pi_{nm}(\mathrm{Y}_m)$ est dense dans Y_n.

2) Montrer qu'on peut construire une suite double $(y_{nm})_{n \leqslant m}$ vérifiant les propriétés suivantes :

(i) $y_{nm} \in \mathrm{Y}_n$;

(ii) $\pi_{nn+1}(y_{n+1m}) = y_{nm}$ si $n < m$;

(iii) $d_n(y_{nm}, y_{nm+1}) < 2^{-m}$.

3) On suppose que tous les espaces métriques (X_n, d_n) sont complets. Montrer qu'il existe une suite $x = (x_n) \in \prod \mathrm{X}_n$ telle que $\pi_{nn+1}(x_{n+1}) = x_n$ pour tout $n \geqslant 0$.

B. Soit S un fermé discret de $\mathbb{C}$, et pour tout $a \in \mathrm{S}$, soit R_a une fonction rationnelle ayant pour seul pôle le point a.

1) Soit (r_n) une suite strictement croissantes de nombres positifs, telle que $S \cap \partial D(0, r_n) = \emptyset$ pour tout n. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note D_n le disque ouvert $D(0, r_n)$ et on pose

$$\mathbf{R}_n = \sum_{a \in S \cap D_n} R_a .$$

Enfin, on pose $\Omega_n = D_n \setminus S$ et on note X_n l'ensemble des fonctions $f : \Omega_n \to \mathbb{C}$ de la forme

$$f = P + \mathbf{R}_n ,$$

où P est la restriction à Ω_n d'une fonction continue sur $\overline{D}_n$ et holomorphe dans D_n.

a) Montrer qu'on définit une distance sur X_n en posant

$$d_n(f, g) = \sup_{\overline{D}_n} |f(z) - g(z)| ,$$

et que l'espace métrique (X_n, d_n) est complet.

b) En utilisant **A**, démontrer le théorème de Mittag-Leffler pour S et (R_a).

C. Peut-on adapter le raisonnement de **B** pour démontrer le théorème de Mittag-Leffler dans un ouvert Ω quelconque ?

9.20. Montrer qu'on peut déduire le théorème de Mittag-Leffler du théorème de Weierstrass.

9.21. Le but de l'exercice est de montrer que dans le cas d'un ouvert simplement connexe, on peut déduire le théorème de Weierstrass du théorème de Mittag-Leffler.

1) Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert simplement connexe, et soit S un fermé discret de Ω. En utilisant l'exercice 5.35, montrer que si g est une fonction holomorphe dans $\Omega \setminus S$, alors existe une fonction holomorphe $f : \Omega \setminus S \to \mathbb{C}^*$ vérifiant $f'/f = g$.

2) Conclure.

9.22. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$, et soient Z et P deux fermés discrets de Ω, avec $Z \cap P = \emptyset$. Pour chaque point $a \in Z$, on se donne un entier $m_a \geqslant 1$, et pour chaque point $b \in P$, on se donne un entier $m_b \geqslant 1$. Montrer qu'il existe une fonction f méromorphe dans Ω vérifiant les propriétés suivantes :

(1) f a un zéro d'ordre m_a en tout point $a \in Z$ et un pôle d'ordre m_b en tout point $b \in P$;

(2) Les seuls zéros de f sont les points de Z et les seuls pôles de f sont les points de P.

9.23. Si Ω est un ouvert de $\mathbb{C}$, on dit qu'un point $a \in \partial\Omega$ est **accessible** à partir de Ω s'il existe une coupure de Ω d'extrémité a.

1) Montrer que pour tout ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$, l'ensemble des points de $\partial\Omega$ accessibles à partir de Ω est dense dans $\partial\Omega$.

2) Trouver un exemple où $\partial\Omega$ possède un point inaccessible à partir de Ω.

9.24. On pose $W_0(z) = 1 - z$, et pour $p \in \mathbb{N}^*$, on définit $W_p = \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ par

$$W_p(z) = (1 - z) \exp\left(\sum_1^p \frac{z^k}{k}\right) .$$

1) Calculer $W_p'(z)$ pour $p \in \mathbb{N}$ et $z \in \mathbb{C}$.

2) Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$, on peut écrire $1 - W_p(z) = z^{p+1}\varphi(z)$, où φ est une fonction entière dont les coefficients de Taylor en 0 sont *positifs*.

3) Déduire de 2) que si $|z| \leqslant 1$, alors

$$|1 - W_p(z)| \leqslant |z|^{p+1} .$$

9.25. (Weierstrass par produit infini.)

Soit (λ_n) une suite de nombres complexes non nuls telle que $\lim_{n\to\infty} |\lambda_n| = +\infty$.

1) Montrer que la série $\sum\left(\frac{z}{\lambda_n}\right)^{n+1}$ converge normalement sur tout compact de $\mathbb{C}$.

2) On gardè les notations de l'exercice précédent. Montrer que la formule

$$F(z) = \prod_0^\infty W_n\left(\frac{z}{\lambda_n}\right)$$

définit une fonction entière, et que (λ_n) est la suite des zéros de F.

9.26. Soit (λ_n) une suite de nombres complexes non nuls telle que $\sum_0^\infty 1/|\lambda_n|^{p+1} < +\infty$ pour un certain entier $p \geqslant 0$. Montrer qu'il existe une fonction entière F dont les zéros sont les points de la suite (λ_n) et vérifiant de plus $F(z) = O(e^{C|z|^{p+1}})$ pour une certaine constante C.

9.27. (Théorème de factorisation d'Hadamard.)

Soit F une fonction entière, $F \not\equiv 0$, et soit (λ_n) la suite des zéros non nuls de F.

1) On garde les notations de l'exercice 9.24. Montrer qu'il existe un entier m, une suite d'entiers (p_n) et une fonction entière G telle qu'on puisse écrire

$$F(z) \equiv e^{g(z)} z^m \prod_0^\infty W_{p_n}\left(\frac{z}{\lambda_n}\right) .$$

2) Que peut-on dire de plus sur le choix de la suite (p_n) si la fonction F est de type exponentiel, c'est-à-dire vérifie $|F(z)| = O(e^{C|z|})$ pour une certaine constante C ?

9.28. Soit f une fonction entière non constante ayant une infinité de zéros, tous simples et non nuls. On note (λ_k) la suite de ces zéros, l'énumération étant choisie de sorte que la suite $(|\lambda_k|)$ soit croissante. On suppose qu'il existe une suite de courbes de Jordan fermées (Γ_n) vérifiant les propriétés suivantes :

(1) $\Gamma_n \subset \text{int}(\Gamma_{n+1})$ pour tout n ;

(2) $R_n = d(0, \Gamma_n)$ tend vers l'infini avec n ;
(3) $l(\Gamma_n) = O(R_n)$;
(4) f ne s'annule pas sur Γ_n, et $\sup_{\Gamma_n} |f'/f| = O(R_n)$.

Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a

$$f(z) = f(0)\, e^{cz} \prod_0^\infty \left(1 - \frac{z}{\lambda_k}\right) e^{z/\lambda_k} ,$$

où $c = f'(0)/f(0)$ et le produit infini converge « par paquets », le n-ième paquet correspondant aux zéros de f situés entre Γ_n et Γ_{n+1}.

9.29. (Identité de Bezout dans $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$.)
Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$. Montrer que si $f_1, \dots, f_N \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ n'ont pas de zéros communs, autrement dit si $f_1^{-1}(0) \cap \dots \cap f_N^{-1}(0) = \emptyset$, alors on peut trouver $g_1, \dots, g_N \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ telles que $\sum_1^N g_i f_i = 1$.

9.30. (Identité de Bezout dans $\mathcal{H}(\Omega)$.)
Dans tout l'exercice, Ω est un ouvert de $\mathbb{C}$.
1) Soient $u, v \in \mathcal{H}(\Omega)$. On suppose que u et v n'ont pas de zéro commun. Montrer, à l'aide du théorème 9.5.5, qu'il existe une fonction $h \in \mathcal{H}(\Omega)$ telle que la fonction $(1 - vh)/u$ se prolonge en une fonction holomorphe sur Ω.
2) Démontrer par récurrence sur N que si $f_1, \dots, f_N$ sont des fonctions holomorphes sur Ω sans zéros communs, alors il existe $g_1, \dots, g_N \in \mathcal{H}(\Omega)$ telles que $\sum_1^N f_i g_i = 1$.

9.31. On veut redémontrer le résultat de l'exercice précédent ; on fixe donc des fonctions $f_1, \dots, f_N \in \mathcal{H}(\Omega)$ sans zéros communs. En notant f la matrice-ligne $(f_1, \dots, f_N)$, il s'agit de trouver une matrice-colonne holomorphe g vérifiant $fg = 1$.
1) On pose $|f|^2 = f\, {}^t\overline{f} = \sum_1^n |f_i|^2$, et

$$\varphi = \frac{{}^t\overline{f}}{|f|^2} .$$

a) Vérifier que φ est une solution $\mathcal{C}^\infty$ de $f\varphi = 1$.
b) Soit M une fonction à valeurs dans $\mathcal{M}_N(\mathbb{C})$. Donner une condition suffisante simple pour que $g = \varphi + M\, {}^t f$ soit solution de $fg = 1$.
2) On pose

$$N = \frac{1}{|f|^2} \left[{}^t\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \bar{z}}\, \overline{f}\right) - \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{z}}\, \overline{f} \right] .$$

Montrer qu'il existe une fonction matricielle antisymétrique M solution de $\frac{\partial M}{\partial \bar{z}} = N$.
3) Montrer que $g = \varphi + M\, {}^t f$ répond à la question.

9.32. (Identité de Bezout dans $A(\mathbb{D})$.)
1) Déterminer les caractères de l'algèbre de Banach $A(\mathbb{D})$.
2) Soient $f_1, \dots, f_N \in A(\mathbb{D})$ sans zéros communs dans $\overline{\mathbb{D}}$. Montrer qu'il existe $g_1, \dots, g_N \in A(\mathbb{D})$ vérifiant $\sum_1^N f_i g_i = 1$.

9.33. Soit Ω un ouvert connexe de $\mathbb{C}$.

1) Rappeler pourquoi l'anneau $\mathcal{H}(\Omega)$ est intègre.

2) Soient $f, g \in \mathcal{H}(\Omega)$. Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur $Z(f)$ et $Z(g)$ pour que f divise g dans $\mathcal{H}(\Omega)$.

3) *a*) Quels sont les éléments irréductibles de $\mathcal{H}(\Omega)$?

b) L'anneau $\mathcal{H}(\Omega)$ est-il factoriel ?

4) Montrer que toute famille $\mathcal{A} \subset \mathcal{H}(\Omega) \setminus \{0\}$ possède un « plus grand diviseur commun ».

5) *a*) D'après 3)*b*), l'anneau $\mathcal{H}(\Omega)$ n'est pas principal. Donner un exemple d'idéal non principal dans $\mathcal{H}(\Omega)$.

b) En utilisant l'exercice 9.30 , montrer que dans $\mathcal{H}(\Omega)$, tout idéal finiment engendré est principal.

9.34. Soit Ω un ouvert connexe de $\mathbb{C}$, et soit I un idéal de $\mathcal{H}(\Omega)$. On pose

$$Z(I) = \bigcap_{f \in I} Z(f) \ .$$

Le but de l'exercice est de montrer que I est dense dans $\mathcal{H}(\Omega)$ si et seulement si $Z(I) = \emptyset$.

0) Démontrer l'implication « évidente ».

1) Soit K un compact de Ω holomorphiquement convexe dans Ω, et soit $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ ne s'annulant pas sur K. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver une fonction $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ telle que $|gf - 1| < \varepsilon$ sur K.

2) Soit K un compact de Ω. On suppose qu'on a $Z(I) \cap K = \emptyset$.

a) Montrer qu'on peut trouver $f_1, \ldots, f_n \in I$ sans zéros communs dans K.

b) En déduire qu'il existe une fonction $f \in I$ qui ne s'annule pas sur K.

3) Conclure à l'aide de 1) et 2).

9.35. Soit Ω un ouvert connexe de $\mathbb{C}$. Le but de l'exercice est de montrer qu'un idéal de $\mathcal{H}(\Omega)$ est principal si et seulement si il est fermé.

1) Montrer qu'un idéal principal est fermé.

2) Soit I un idéal de $\mathcal{H}(\Omega)$. Pour $\varphi \in \mathcal{H}(\Omega)$, on pose $I_\varphi = \{f \in \mathcal{H}(\Omega);\ \varphi f \in I\}$.

a) Montrer que I_φ est un idéal de $\mathcal{H}(\Omega)$, et que I_φ est fermé si I est fermé.

b) Avec les notations de l'exercice précédent, montrer qu'on peut trouver $\varphi \in \mathcal{H}(\Omega)$ qui divise tous les éléments de I et telle que $Z(I_\varphi) = \emptyset$.

3) Conclure.

9.36. Soit Ω un ouvert connexe de $\mathbb{C}$.

1) En utilisant l'exercice précédent, montrer que les idéaux maximaux de $\mathcal{H}(\Omega)$ qui sont de plus fermés sont exactement les idéaux du type

$$I_a = \{f \in \mathcal{H}(\Omega);\ f(a) = 0\} \ ,$$

où a est un point de Ω fixé.

2) Soit $S \subset \Omega$ un ensemble infini sans point d'accumulation dans Ω. Soit également $\mathcal{U}$ un ultrafiltre non trivial sur S. On pose

$$I = \{f \in \mathcal{H}(\Omega);\ S \cap Z(f) \in \mathcal{U}\} \ .$$

Montrer que I est un idéal maximal de $\mathcal{H}(\Omega)$ qui n'est pas du type I_a.

9.37. Soit $a \in \mathbb{D}$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur $b \in \mathbb{C}$ pour qu'il existe une fonction $\varphi \in H^\infty(\mathbb{D})$ telle que $\varphi(0) = 0$, $\varphi(a) = b$ et $\|\varphi\|_\infty \leqslant 1$.

9.38. (Condition de Schwarz-Pick.)

Soient $a_1, \dots, a_N \in \mathbb{D}$ et $b_1, \dots, b_N \in \mathbb{C}$. On suppose qu'il existe une fonction $\varphi \in H^\infty(\mathbb{D})$ telle que $\|\varphi\|_\infty \leqslant 1$ et $\varphi(a_i) = b_i$ pour tout i.

1) On note k le noyau de Cauchy de $\mathbb{D}$, et on pose $k_i = k_{a_i}$, $i \leqslant N$. Soit E le sous-espace de $L^2(\mathbb{T})$ engendré par $k_1, \dots, k_N$, et soit $T : E \to E$ défini par

$$Tf = P_E(\overline{\varphi} f) ,$$

où P_E est la projection orthogonale de $L^2(\mathbb{T})$ sur E.

a) Montrer que T est un opérateur linéaire continu et qu'on a $\|T\| \leqslant 1$.

b) Montrer qu'on a $Tk_i = \overline{b}_i k_i$ pour tout $i \leqslant N$.

2) Pour $i, j \leqslant N$, on pose

$$m_{ij} = \frac{1 - \overline{b}_i b_j}{1 - \overline{a}_i a_j} .$$

Déduire de 1) que la matrice $M = (m_{ij})$ est positive, autrement dit qu'on a

$$\sum_1^N m_{ij} \overline{t}_i t_j \geqslant 0$$

pour tout n-uplet $(t_1, \dots, t_N) \in \mathbb{C}^N$.

9.39. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$.

1) Montrer qu'il existe un fermé discret de Ω dont l'adhérence dans $\mathbb{C}$ contient $\partial\Omega$.

2) En déduire qu'il existe une fonction $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ qui ne peut pas se prolonger en une fonction holomorphe sur un ouvert plus grand.

9.40. (Phénomène de Hartogs.)

Cet exercice suppose connue la notion de fonction holomorphe de plusieurs variables ; voir le chapitre 12.

On note $\mathbf{D}$ le bidisque unité de $\mathbb{C}^2$,

$$\mathbf{D} = \{(z_1, z_2) ; |z_1| < 1, |z_2| < 1\},$$

et Ω l'ouvert

$$\left\{\frac{1}{2} < |z_1| < 1, |z_2| < 1\right\} \cup \left\{|z_1| < 1, \frac{1}{2} < |z_2| < 1\right\} \subset \mathbf{D}.$$

1) Soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe sur Ω.

a) Soit $z_2 \in \mathbb{C}$ vérifiant $\frac{1}{2} < |z_2| < 1$. Montrer que pour $z_1 \in \mathbb{D} = D(0,1)$, on peut écrire

$$f(z_1, z_2) = \sum_0^\infty a_n(z_2) z_1^n ,$$

où les coefficients $a_n(z_2)$ dépendent uniquement de z_2.

b) Soit V la couronne $\{\frac{1}{2} < |z| < 1\} \subset \mathbb{C}$. Montrer que les fonctions $a_n : V \to \mathbb{C}$ définies par *a*) sont holomorphes sur V et se prolongent holomorphiquement au disque unité $\mathbb{D}$.

2) Montrer que toute fonction holomorphe sur Ω se prolonge holomorphiquement au bidisque $\mathbf{D}$.

Chapitre 10

Représentation conforme

10.1. La sphère de Riemann

Comme $\mathbb{C}$ est un espace topologique localement compact, on peut le compactifier en rajoutant un « point à l'infini ». De façon précise, on rajoute à $\mathbb{C}$ un point noté ∞, et on munit $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ d'une topologie de la manière suivante : les voisinages d'un point $a \in \mathbb{C}$ sont les parties de $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ contenant un voisinage usuel de a dans $\mathbb{C}$, et les voisinages de ∞ sont les parties de $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ contenant un ensemble du type $\{\infty\} \cup (\mathbb{C} \backslash K)$, où K est un compact de $\mathbb{C}$. De cette façon, $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ devient un espace topologique compact.

Notons $\mathbf{S}^2$ la sphère unité euclidienne de $\mathbb{R}^3$, et notons N le « pôle Nord » de $\mathbf{S}^2$, soit $N = (0, 0, 1)$. Identifiant le plan complexe $\mathbb{C} = \{u + iv; (u, v) \in \mathbb{R}^2\}$ avec le plan $\mathbf{C} = \{(u, v, w);\ w = 0\} \subset \mathbb{R}^3$, considérons l'application $\pi_N : \mathbf{S}^2 \backslash \{N\} \to \mathbb{C}$ qui à un point $P \in \mathbf{S}^2 \backslash \{N\}$ associe le point d'intersection de la droite (NP) avec $\mathbb{C}$. L'application π_N est appelée **projection stéréographique** de pôle N. Il est clair que π_N est une bijection continue de $\mathbf{S}^2 \backslash \{N\}$ sur $\mathbb{C}$ et que $\pi_N(P)$ tend vers ∞ lorsque P tend vers N. Comme $\mathbf{S}^2$ est compacte, on en déduit que φ_N se prolonge en un homéomorphisme de $\mathbf{S}^2$ sur $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ qui envoie N sur ∞. On identifiera $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ et $\mathbf{S}^2$ via cet homéomorphisme, et on notera en conséquence $\mathbb{S}_2$ l'espace $\mathbb{C} \bigcup \{\infty\}$.

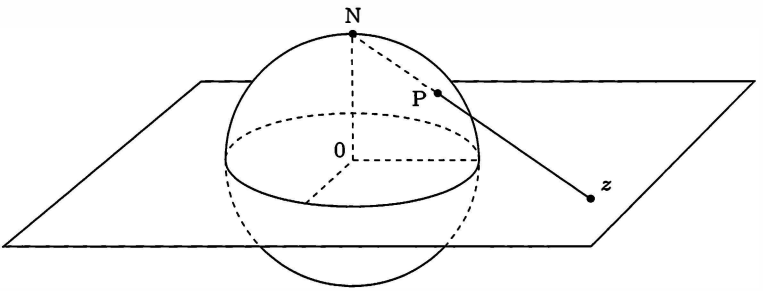


FIG. 45. Projection stéréographique

Définition 10.1.1. *L'espace* $\mathbb{S}_2 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ *est la* **sphère de Riemann**.

Si $P = (u, v, w)$ est un point de $\mathbf{S}^2\backslash\{N\}$, le nombre complexe $z = \pi_N(P)$ est donné par la formule

$$z = \frac{u + iv}{1 - w} \cdot$$

En effet, considéré comme point de $\mathbb{R}^3$, z a pour coordonnées $(x, y, 0)$, et on doit avoir

$$(x, y, 0) = (0, 0, 1) + \lambda(u, v, w - 1)$$

pour un certain $\lambda \in \mathbb{R}$ puisque z est sur la droite (PN). La condition $1 + \lambda(w - 1) = 0$ donne $\lambda = \frac{1}{1-w}$, d'où $x = \frac{u}{1-w}$ et $y = \frac{v}{1-w}$.

Si maintenant $P = (u, v, w) \in \mathbf{S}^2\backslash\{S\}$ – où S est le « pôle Sud » de $\mathbf{S}^2$ – et si on note P^* le symétrique de P par rapport au plan $\{w = 0\}$, alors $P^* = (u, v, -w)$, donc P^* correspond via π_N au point

$$z^* = \frac{u + iv}{1 + w} \cdot$$

Comme $u^2 + v^2 = 1 - w^2$, on en déduit que si $P \in \mathbf{S}^2\backslash\{N; S\}$, alors z et z^* sont non nuls et

$$z^* = \frac{1}{\bar{z}} \cdot$$

Ainsi, l'application $I : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$ définie par $I(z) = 1/\bar{z}$ correspond via π_N à la restriction à $\mathbf{S}^2\backslash\{N; S\}$ de la symétrie par rapport au plan $\{w = 0\}$. L'application I s'appelle l'**inversion de pôle** 0.

Notations *Pour $b \in \mathbb{C}$, on posera $b + \infty = \infty$, et pour $a \in \mathbb{C}^*$, on posera $a/0 = \infty$, $a.\infty = \infty$ et $a/\infty = 0$; on posera également $\overline{\infty} = \infty$. Cela permet en particulier d'étendre les applications $z \mapsto az + b$ $(a \neq 0)$, $z \mapsto 1/z$ et $z \mapsto \bar{z}$ en des homéomorphisme de $\mathbb{S}_2$ sur $\mathbb{S}_2$.*

10.2. Fonctions holomorphes sur un ouvert de $\mathbb{S}_2$

10.2.1. Définition et exemples

Définition 10.2.1. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{S}_2$. On dit qu'une application $f : \Omega \to \mathbb{S}_2$ est* **holomorphe** *si elle vérifie les propriétés suivantes :*

(1) *f est à valeurs complexes et holomorphe au voisinage de tout point $z_0 \neq \infty$ vérifiant $f(z_0) \neq \infty$;*

(2) *si $z_0 \neq \infty$ et $f(z_0) = \infty$, alors la fonction $z \mapsto 1/f(z)$ est (à valeurs complexes et) holomorphe au voisinage de z_0 ;*

(3) *si $\infty \in \Omega$ et $f(\infty) \neq \infty$, alors la fonction $z \mapsto f(1/z)$ est (à valeurs complexes et) holomorphe au voisinage de* 0.

(4) *si $\infty \in \Omega$ et $f(\infty) = \infty$, alors la fonction $z \mapsto 1/f(1/z)$ est (à valeurs complexes et) holomorphe au voisinage de* 0.

Exemples. 1) Toute fonction polynomiale P se prolonge en une fonction $\tilde{P}$ holomorphe sur $\mathbb{S}_2$ en posant $\tilde{P}(\infty) = \infty$ (si P n'est pas constante).

2) Plus généralement, toute fonction rationnelle R se prolonge en une fonction $\tilde{R}$ holomorphe sur $\mathbb{S}_2$ en posant $\tilde{R}(z) = \infty$ si z est un pôle de R, et $\tilde{R}(\infty) = \lim_{z\to\infty} R(z)$, qui existe dans $\mathbb{S}_2$.

Comme l'application $z \mapsto 1/z$ est un homéomorphisme de $\mathbb{S}_2$ sur $\mathbb{S}_2$, on conçoit sans peine que les résultats « topologiques » déjà démontrés sur les fonctions holomorphes s'étendent aux fonctions holomorphes définies sur des ouverts de $\mathbb{S}_2$. On obtient par exemple les deux théorèmes suivants.

Théorème 10.2.2. *Soit Ω un ouvert connexe de $\mathbb{S}_2$. Si $f : \Omega \to \mathbb{S}_2$ est holomorphe et non constante, alors, pour tout $b \in \mathbb{S}_2$, l'ensemble $f^{-1}(b)$ est un fermé discret de Ω.*

Preuve. Soit $f : \Omega \to \mathbb{S}_2$ holomorphe. Il s'agit de montrer que si $b \in \mathbb{S}_2$, alors ou bien $f(z) \equiv b$, ou bien tous les points de $f^{-1}(b)$ sont isolés ; et quitte à changer f en $1/f$ si $b = \infty$ ou en $f - b$ si $b \in \mathbb{C}$, on peut supposer $b = 0$.

Posons $A = \{a \in \Omega;\ a \text{ est un zéro non isolé de } f\}$. Par définition, A est un fermé de Ω.

Soit $a \in A$, et supposons d'abord $a \neq \infty$. Comme $f(a) = 0$, on peut trouver $V \subset \mathbb{C}$, voisinage ouvert connexe de a, tel que f est à valeurs complexes et holomorphe dans V. Alors f est identiquement nulle sur V d'après le principe des zéros isolés, donc $V \subset A$. Ainsi le point a est intérieur à A. Si $a = \infty$, on obtient de même $a \in \mathring{A}$ en considérant la fonction $z \mapsto f(1/z)$. Ainsi, A est un ouvert de Ω.

Par connexité, A est soit vide, auquel cas tous les points de $f^{-1}(0)$ sont isolés, soit égal à Ω, auquel cas $f = 0$.

Théorème 10.2.3. (Théorème de l'image ouverte.)
Une fonction holomorphe non constante sur un ouvert connexe de $\mathbb{S}_2$ est une application ouverte.

Preuve. D'après le théorème précédent, une telle fonction n'est constante au voisinage d'aucun point. En revenant à la définition 10.2.1, en utilisant le théorème de l'image ouverte déjà démontré et en se servant du fait que l'application $z \mapsto 1/z$ est un homéomorphisme de $\mathbb{S}_2$ sur $\mathbb{S}_2$, on en déduit immédiatement le résultat.

Corollaire 10.2.4. (Principe du maximum.)
Si Ω est un ouvert de $\mathbb{S}_2$ et si $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{C}$ est continue sur $\overline{\Omega}$ et holomorphe dans Ω, alors $\sup_{\overline{\Omega}} |f| = \sup_{\partial\Omega} |f|$, l'adhérence et la frontière étant prises relativement à $\mathbb{S}_2$.

Preuve. On se ramène au cas où Ω est connexe et où f n'est pas constante sur Ω. Comme $\overline{\Omega}$ est compact, $|f|$ atteint sa borne supérieure sur $\overline{\Omega}$. D'autre part, si $z \in \Omega$, alors $f(z)$ est intérieur à $f(\Omega)$ d'après le théorème de l'image ouverte. En particulier, $f(\Omega)$ contient des points de module strictement plus grand que $|f(z)|$. La borne supérieure de $|f|$ sur $\overline{\Omega}$ ne peut donc pas être atteinte en un point de Ω, ce qui termine la démonstration.

Notons enfin le lien entre fonctions holomorphes à valeurs dans $\mathbb{S}_2$ et fonctions méromorphes :

Lemme 10.2.5. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$.*

a) *Si f est une fonction méromorphe sur Ω, et si on note S l'ensemble des pôles de f, alors la fonction $\tilde{f} : \Omega \to \mathbb{S}_2$ définie par $\tilde{f}(z) = f(z)$ pour $z \notin S$ et $\tilde{f}(z) = \infty$ pour $z \in S$ est holomorphe sur Ω.*

b) *Inversement, si Ω est connexe et si $\tilde{f} : \Omega \to \mathbb{S}_2$ est une fonction holomorphe non identiquement égale à ∞, alors $S = \tilde{f}^{-1}(\infty)$ est un fermé discret de Ω et $f = \tilde{f}_{|(\Omega \setminus S)}$ est méromorphe sur Ω.*

La preuve est laissée en exercice.

10.2.2. Biholomorphismes

Si Ω et Ω' sont deux ouverts de $\mathbb{S}_2$, on appelle **biholomorphisme** de Ω sur Ω' toute bijection de Ω sur Ω' qui est holomorphe ainsi que sa réciproque. Le résultat suivant, qui est une conséquence de 8.3.8, montre qu'il est en fait inutile de supposer la réciproque holomorphe : cette propriété est automatiquement vérifiée.

Proposition 10.2.6. *Si $f : \Omega \to \Omega'$ est une bijection holomorphe entre deux ouverts de $\mathbb{S}_2$, alors f^{-1} est holomorphe sur Ω'.*

On dit que deux ouverts $\Omega, \Omega' \subset \mathbb{S}_2$ sont **conformément équivalents** s'il existe un biholomorphisme de Ω sur Ω'. Par définition, deux ouverts de $\mathbb{S}_2$ conformément équivalents sont homéomorphes. La réciproque est fausse, comme le montre le résultat suivant.

Exemple 10.2.7. *Le plan complexe $\mathbb{C}$ et le disque unité $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$ sont homéomorphes, mais ils ne sont pas conformément équivalents.*

Preuve. D'après le théorème de Liouville, toute fonction holomorphe $f : \mathbb{C} \to \mathbb{D}$ est constante. En particulier, $\mathbb{C}$ et $\mathbb{D}$ ne sont pas conformément équivalents.

Posons $\varphi(z) = \dfrac{|z|}{\|z\|}\, z$ si $z \in \mathbb{D}\backslash\{0\}$, où $\|z\| = \max(|\mathrm{Re}(z)|, |\mathrm{Im}(z)|)$ et $\varphi(0) = 0$. Comme la norme $\|\ \|$ est équivalente à $|\ |$, on vérifie immédiatement que φ est un homéomorphisme de $\mathbb{D}$ sur le carré $\{\|w\| < 1\}$, avec $\varphi^{-1}(0) = 0$ et $\varphi^{-1}(w) = \dfrac{\|w\|}{|w|}\, w$ si $w \neq 0$. Le carré en question s'identifie à $]-1;1[\times]-1;1[$, et est donc homéomorphe à $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$. Par conséquent, $\mathbb{D}$ et $\mathbb{C}$ sont homéomorphes.

10.3. Exemples : automorphismes de $\mathbb{C}$, de $\mathbb{S}_2$ et de $\mathbb{D}$

Un **automorphisme** d'un ouvert $\Omega \subset \mathbb{S}_2$ est un biholomorphisme de Ω sur Ω. On note $\Gamma(\Omega)$ l'ensemble des automorphisme de Ω, qui est un groupe pour la composition. Dans cette section, on va déterminer les automorphismes de $\mathbb{C}$, de la sphère de Riemann $\mathbb{S}_2$, et du disque unité $\mathbb{D}$.

On utilisera deux fois le lemme suivant.

Lemme 10.3.1. *Soit Γ un groupe opérant sur un ensemble X, et soit G un sous-groupe de Γ. On suppose que les deux propriétés suivantes sont vérifiées :*

(i) G *opère* **transitivement** *sur* X, *ce qui signifie qu'étant donnés deux points $x_1, x_2 \in$ X quelconques, il existe toujours un $g \in$ G tel que $g \cdot x_1 = x_2$;*

(ii) *il existe au moins un point $a \in$ X tel que $\Gamma_a = \{\gamma \in \Gamma;\ \gamma \cdot a = a\}$ soit contenu dans* G.

Alors $\mathrm{G} = \Gamma$.

Preuve. Soit $a \in$ X vérifiant $\Gamma_a \subset$ G, et soit γ un élément quelconque de Γ. Puisque G opère transitivement sur X, on peut trouver $g \in$ G tel que $g \cdot a = \gamma \cdot a$. Alors $g^{-1}\gamma \in \Gamma_a \subset$ G, et donc $\gamma \in$ G.

Remarque 10.3.2. *On dit que Γ_a est le* **groupe d'isotropie de** *a relativement à l'action de Γ.*

10.3.1. Automorphismes de $\mathbb{C}$

Si α et β sont deux nombres complexes, avec $\alpha \neq 0$, alors l'application $z \mapsto \alpha z + \beta$ est visiblement un automorphisme de $\mathbb{C}$. On dira pour abréger qu'une telle application est une **similitude**.

Théorème 10.3.3. *Tout automorphisme de $\mathbb{C}$ est une similitude.*

Preuve. Soit f un automorphisme de $\mathbb{C}$, et notons $\sum_0^\infty a_n z^n$ son développement en série entière. Notons g la fonction holomorphe sur $\mathbb{C}^*$ définie par $g(z) = f(1/z) = \sum_0^\infty a_n z^{-n}$.

Comme g est injective, l'image par g de la couronne $\{0 < |z| < 1\}$ ne rencontre pas $g(\{|z| > 1\})$, qui est un ouvert de $\mathbb{C}$ d'après le théorème de

l'image ouverte. En particulier, l'image de cette couronne n'est pas dense dans $\mathbb{C}$. D'après le théorème de Casorati-Weierstrass, tous les a_n sont nuls sauf un nombre fini d'entre eux, donc f est une fonction polynomiale, évidemment non constante. Si f était de degré supérieur à 2, alors f' s'annulerait au moins une fois d'après le théorème de d'Alembert, ce qui est impossible puisque f est une fonction holomorphe injective. La fonction f est donc une fonction polynomiale de degré exactement 1, c'est-à-dire une similitude.

10.3.2. Automorphismes de $\mathbb{S}_2$

a. Caractérisation

Si A est une matrice inversible à coefficients complexes,

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

alors $az + b$ et $cz + d$ ne peuvent pas s'annuler simultanément en un même point $z \in \mathbb{C}$. On définit donc une application $\psi_{\mathrm{A}} : \mathbb{C} \to \mathbb{S}_2$ en posant

$$\psi_{\mathrm{A}}(z) = \frac{az+b}{cz+d}.$$

Comme a et c ne sont pas tous les deux nuls, on peut prolonger ψ_{A} à $\mathbb{S}_2$ en posant $\psi_{\mathrm{A}}(\infty) = a/c$. On obtient ainsi un automorphisme de $\mathbb{S}_2$, d'inverse $w \mapsto \dfrac{dw-b}{-cw+a}$. On dit qu'un tel automorphisme est une **homographie**.

On vérifie par des calculs directs qu'on a $\psi_{\mathrm{id}} = \mathrm{id}_{\mathbb{S}_2}$, et que si $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$, alors $\psi_{\mathrm{AB}} = \psi_{\mathrm{A}} \circ \psi_{\mathrm{B}}$. En d'autres termes, l'application $\mathrm{A} \mapsto \psi_{\mathrm{A}}$ est un homomorphisme de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ dans $\Gamma(\mathbb{S}_2)$, ce qui prouve que les homographies forment un sous-groupe de $\Gamma(\mathbb{S}_2)$.

Toute similitude $z \mapsto \alpha z + \beta$ définit une homographie laissant fixe le point ∞. Inversement, un automorphisme de $\mathbb{S}_2$ laissant fixe le point ∞ définit par restriction un automorphisme de $\mathbb{C}$. On obtient donc le

Lemme 10.3.4. *Tout automorphisme de $\mathbb{S}_2$ laissant fixe le point ∞ est une similitude.*

On peut maintenant décrire les automorphismes de la sphère de Riemann.

Théorème 10.3.5. *Les automorphismes de $\mathbb{S}_2$ sont exactement les homographies.*

Preuve. Notons G le groupe des homographies de $\mathbb{S}_2$, et posons $\Gamma = \Gamma(\mathbb{S}_2)$. D'après le lemme 10.3.1, il suffit de montrer que G opère transitivement sur $\mathbb{S}_2$ et qu'il existe un point $a \in \mathbb{S}_2$ tel que $\Gamma_a \subset \mathrm{G}$.

D'après le lemme précédent, on a $\Gamma_\infty \subset \mathrm{G}$. D'autre part, on peut passer d'un point de $\mathbb{C}$ à un autre par une translation, et l'homographie $z \mapsto 1/z$ envoie 0 sur ∞ : cela prouve que G opère transitivement sur $\mathbb{S}_2$.

Corollaire 10.3.6. *Le groupe* $\Gamma(\mathbb{S}_2)$ *est isomorphe à* $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})/\{-\mathrm{id}\,;\mathrm{id}\}$.

Preuve. On a $\psi_\mathrm{A} = \mathrm{id}_{\mathbb{S}_2}$ si et seulement si $az + b \equiv z(cz + d)$, ou encore $cz^2 + (d - a)z + b \equiv 0$, c'est-à-dire si et seulement si $d = a$ et $b = c = 0$. Le noyau de l'homomorphisme $\mathrm{A} \mapsto \psi_\mathrm{A}$ est donc constitué par les matrices d'homothéties. Par conséquent, la restriction de ψ à $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) = \{\mathrm{A} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})\,;\,\det(\mathrm{A}) = 1\}$ induit un isomorphisme du groupe quotient $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})/\{-\mathrm{Id}\,;\,\mathrm{Id}\}$ sur le groupe des homographies de $\mathbb{S}_2$.

b. Homographies et cercles de $\mathbb{S}_2$

On va maintenant montrer que les homographies possèdent une propriété géométrique très particulière : elles changent les « cercles de $\mathbb{S}_2$ » en cercles de $\mathbb{S}_2$.

Commençons par le lemme suivant.

Lemme 10.3.7. *Les cercles de* $\mathbf{S}^2$ *ne passant pas par le pôle Nord* N *correspondent via la projection stéréographique* π_N *aux cercles de* $\mathbb{C}$. *Les cercles de* $\mathbf{S}^2$ *passant par* N *correspondent aux ensembles de la forme* $\mathrm{L} \cup \{\infty\}$, *où* L *est une droite de* $\mathbb{C}$.

Preuve. Les cercles de $\mathbf{S}^2$ sont les intersections non triviales de $\mathbf{S}^2$ avec les plans affines de $\mathbb{R}^3$, dont l'équation générale est de la forme $au + bv + cw = d$, où $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ et $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$.

D'autre part, on a vu qu'un point $\mathrm{P} = (u, v, w) \in \mathbf{S}^2 \backslash \{\mathrm{N}\}$ correspond via π_N au nombre $z = \frac{u+iv}{1-w}$.

On a $|z|^2 = \frac{u^2+v^2}{(1-w)^2} = \frac{1+w}{1-w}$, et on en tire $w = \frac{|z|^2-1}{|z|^2+1}$, d'où $1 - w = \frac{2}{1+|z|^2}$. De là, on obtient $u = \frac{z+\bar{z}}{1+|z|^2}$ et $v = \frac{z-\bar{z}}{i(1+|z|^2)}$. On en déduit que si C est un cercle de $\mathbf{S}^2$ déterminé par un plan d'équation $au+bv+cw = d$, alors l'image de $\mathrm{C}\backslash\{\mathrm{N}\}$ par π_N est l'ensemble des points $z \in \mathbb{C}$ vérifiant

$$a(z + \bar{z}) - ib(z - \bar{z}) + c(|z|^2 - 1) = d(|z|^2 + 1)\ ,$$

ou encore, en posant $z = x + iy$:

$$(d - c)(x^2 + y^2) - 2ax - 2by + c + d = 0\ .$$

Comme $\pi_\mathrm{N}(\mathrm{C}\backslash\{\mathrm{N}\})$ n'est ni vide, ni réduit à un point, on en conclut qu'il s'agit soit d'un cercle (si $d \neq c$), soit d'une droite (si $d = c$).

Inversement, un cercle ou une droite de $\mathbb{C}$ admet une équation du type précédent, et les calculs déjà effectués montrent que ce cercle ou cette droite provient d'un cercle de $\mathbf{S}^2$.

Définition 10.3.8. *On dira qu'un ensemble* $\mathrm{C} \subset \mathbb{S}_2$ *est un* **cercle de** $\mathbf{S}_2$ *si* C *est un cercle de* $\mathbb{C}$ *ou un ensemble du type* $\mathrm{L} \cup \{\infty\}$, *où* L *est une droite de* $\mathbb{C}$.

Proposition 10.3.9. *Toute homographie change les cercles de* $\mathbb{S}_2$ *en cercles de* $\mathbb{S}_2$.

Preuve. En écrivant

$$\frac{az+b}{cz+d} = \frac{a}{c} - \frac{ad-bc}{c(cz+d)}$$

lorsque $c \neq 0$, on constate que toute homographie s'obtient par composition à l'aide de similitudes et de l'application $z \mapsto 1/z$. Comme les similitudes changent cercles en cercles et droites en droites, donc cercles de $\mathbb{S}_2$ en cercles de $\mathbb{S}_2$, il suffit donc de montrer que l'application $z \mapsto 1/z$ change les cercles de $\mathbb{S}_2$ en cercles de $\mathbb{S}_2$.

On a vu que si $z \in \mathbb{S}_2$, alors $1/\bar{z}$ correspond via la projection stéréographique π_{N} au point P^* symétrique de $\mathrm{P} = \pi_{\mathrm{N}}^{-1}(z)$ par rapport au plan $\mathbf{C} = \{w = 0\}$. Comme la symétrie par rapport à $\mathbf{C}$ change les cercles de $\mathbf{S}^2$ en cercles de $\mathbf{S}^2$, il découle du lemme 10.3.7 que l'application $z \mapsto 1/\bar{z}$ change les cercles de $\mathbb{S}_2$ en cercles de $\mathbb{S}_2$; il en va donc de même pour l'application $z \mapsto 1/z$.

La proposition précédente permet de déterminer très rapidement l'image d'un disque ou d'un demi-plan par une homographie donnée.

Exemple 10.3.10. *L'homographie* $z \mapsto \dfrac{z-i}{z+i}$ *envoie le demi-plan supérieur* $\mathbf{U} = \{\mathrm{Im}(z) > 0\}$ *sur le disque unité* $\mathbb{D}$.

Preuve. Notons ψ l'homographie considérée, et $\partial\mathbf{U}$ la frontière de $\mathbf{U}$ dans $\mathbb{S}_2$, $\partial\mathbf{U} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. On a $\psi(0) = -1$, $\psi(\infty) = 1$ et $\psi(1) = \dfrac{1-i}{1+i} = -i$. Par conséquent, ψ envoie $\partial\mathbf{U}$ sur le cercle de $\mathbb{S}_2$ passant par -1, 1 et $-i$, c'est-à-dire sur le cercle unité. Comme ψ est un homéomorphisme de $\mathbb{S}_2$ sur $\mathbb{S}_2$, on en déduit que $\psi(\mathbf{U})$ est l'une des deux composantes connexes de $\mathbb{S}_2 \backslash \mathbb{T}$, et comme $\psi(i) = 0 \in \mathbb{D}$, on peut conclure que $\psi(\mathbf{U})$ est égal à $\mathbb{D}$.

10.3.3. Automorphismes du disque unité

Si a est un point de $\mathbb{D}$ et si λ est un nombre complexe de module 1, alors l'application $\psi_{a\lambda}$ définie par $\psi_{a\lambda}(z) = \lambda \dfrac{a-z}{1-\bar{a}z}$ est une homogra-

phie qui envoie $\partial\mathbb{D}$ sur $\partial\mathbb{D}$. En effet, si $|z| = 1$, alors $\bar{z} = 1/z$, et on peut écrire $\psi_{a\lambda}(z) = -\frac{\lambda}{z}\frac{z-a}{\bar{z}-\bar{a}}$, ce qui montre qu'on a $|\psi_{a\lambda}(z)| = 1$. Ainsi $\psi_{a\lambda}(\partial\mathbb{D}) \subset \partial\mathbb{D}$, et comme $\psi_{a\lambda}(\partial\mathbb{D})$ est un cercle de $\mathbb{S}_2$, on a en fait $\psi_{a\lambda}(\partial\mathbb{D}) = \partial\mathbb{D}$. Comme $\psi_{a\lambda}$ est un homéomorphisme de $\mathbb{S}_2$ sur $\mathbb{S}_2$, on en déduit que $\psi_{a\lambda}(\mathbb{D})$ est la composante connexe de $\mathbb{S}_2\backslash\partial\mathbb{D}$ contenant $\psi_{a\lambda}(a) = 0$, autrement dit $\psi_{a\lambda}(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$.

Notons qu'on peut retrouver de manière plus élémentaire le fait qu'on ait $|\psi_{a\lambda}(z)| < 1$ dans $\mathbb{D}$ grâce à l'identité

$$1 - \left|\frac{z-a}{1-\bar{a}z}\right|^2 = \frac{(1-|a|^2)(1-|z|^2)}{|1-\bar{a}z|^2} \cdot$$

On peut également démontrer cette propriété en utilisant le principe du maximum (voir la section 4.10.2).

On déduit de ce qui précède que $\psi_{a\lambda}$ définit par restriction un automorphisme de $\mathbb{D}$, que l'on notera $\varphi_{a\lambda}$, ou simplement φ_a si $\lambda = 1$. On dit que $\varphi_{a\lambda}$ est la **transformation de Moebius** associée à a et λ. Retenons la formule

$$\varphi_{a\lambda}(z) = \lambda\frac{a-z}{1-\bar{a}z} \cdot$$

Des calculs directs montrent que les transformations de Moebius forment un sous-groupe de $\Gamma(\mathbb{D})$. On vérifie également que si $a \in \mathbb{D}$, alors

$$\begin{cases} (\varphi_a)^{-1} = \varphi_a \\ \varphi_a(a) = 0 \\ \varphi_a(0) = a \\ \varphi_a'(0) = |a|^2 - 1 \\ \varphi_a'(a) = 1/(|a|^2 - 1) \end{cases}$$

Ces propriétés seront utilisées par la suite sans référence explicite.

Lemme 10.3.11. *Si φ est un automorphisme de $\mathbb{D}$ laissant fixe 0, alors φ est une rotation, autrement dit $\varphi(z) \equiv \lambda z$, où λ est une constante de module 1.*

Preuve. Soit $\varphi \in \Gamma(\mathbb{D})$ vérifiant $\varphi(0) = 0$. D'après le lemme de Schwarz 4.9.1, on a $|\varphi(z)| \leqslant |z|$ pour tout $z \in \mathbb{D}$; et comme φ^{-1} est également un automorphisme de $\mathbb{D}$ laissant fixe 0, on a aussi $|z| = |\varphi^{-1}(\varphi(z))| \leqslant |\varphi(z)|$. Ainsi, $|\varphi(z)| = |z|$ pour tout $z \in \mathbb{D}$. D'après la deuxième partie du lemme de Schwarz, cela prouve que φ est une rotation.

Théorème 10.3.12. *Les automorphismes de $\mathbb{D}$ sont les transformations de Moebius.*

Preuve. Si a et b sont deux points de $\mathbb{D}$, alors $\varphi_b \circ \varphi_a(a) = \varphi_b(0) = b$. Par conséquent, les transformations de Moebius opèrent transitivement sur $\mathbb{D}$. Compte tenu du lemme précédent et du lemme 10.3.1, cela termine la démonstration.

10.4. Le théorème de la représentation conforme

Si Ω est un ouvert de $\mathbb{C}$ conformément équivalent au disque unité $\mathbb{D}$, alors Ω est nécessairement simplement connexe car $\mathbb{D}$ est simplement connexe, et différent de $\mathbb{C}$ d'après 10.2.7. Le théorème suivant montre que ces deux conditions nécessaires sont en fait suffisantes.

Théorème 10.4.1. (Théorème de Riemann.)
Tout ouvert de $\mathbb{C}$ simplement connexe et distinct de $\mathbb{C}$ est conformément équivalent à $\mathbb{D}$.

La preuve va se faire en plusieurs étapes : on montre d'abord que l'on peut se ramener au cas d'un ouvert borné, puis que la question se réduit à un problème d'« optimisation », et on conclut en appliquant le théorème de Montel.

10.4.1. Réduction au cas d'un domaine borné

Lemme 10.4.2. *Si $\Omega \subset \mathbb{C}$ est un ouvert simplement connexe et $\Omega \neq \mathbb{C}$, alors Ω est conformément équivalent à un ouvert borné de $\mathbb{C}$.*

Preuve. Fixons Ω comme dans l'énoncé, et fixons également un point $a \in \mathbb{C}\backslash\Omega$.

Comme Ω est simplement connexe, on peut trouver une détermination holomorphe de $\sqrt{z-a}$ dans Ω, c'est à dire une fonction $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ vérifiant $g(z)^2 \equiv z - a$. Il suffit de poser $g(z) = e^{\frac{1}{2}l(z)}$, où l est une détermination de $\log(z-a)$. Par définition, g^2 est injective et ne s'annule jamais. Par conséquent, la fonction g est injective, elle ne s'annule jamais, et si z_1, z_2 sont deux points de Ω (non nécessairement distincts), alors $g(z_1) \neq -g(z_2)$.

D'après le théorème de l'image ouverte, $g(\Omega)$ est un ouvert de $\mathbb{C}^*$ et contient donc un disque ouvert $\mathrm{D}(b,r)$. Comme $\mathrm{D}(-b,r) = -\mathrm{D}(b,r)$ et $g(\Omega)\cap(-g(\Omega)) = \emptyset$, on a $g(\Omega)\cap\mathrm{D}(-b,r) = \emptyset$, autrement dit $|g(z)+b| \geqslant r$ pour tout $z \in \Omega$. La fonction f définie sur Ω par $f(z) = \frac{1}{g(z)+b}$ est alors holomorphe, injective, et bornée ; f est donc un biholomorphisme de Ω sur un ouvert borné, ce qui termine la démonstration.

10.4.2. Une propriété d'extremum

Pour un ouvert $W \subset \mathbb{C}$ contenant 0, on notera $\mathcal{U}(W)$ l'ensemble des fonctions holomorphes $f : W \to \mathbb{D}$ qui sont injectives et vérifient $f(0) = 0$. L'ensemble $\mathcal{U}(W)$ peut très bien être vide ; mais si W est contenu dans $\mathbb{D}$, alors $\mathcal{U}(W)$ est non vide car il contient la fonction $z \mapsto z$.

Lemme 10.4.3. *Soit* W *un ouvert de* $\mathbb{C}$ *contenant* 0. *On suppose que* W *est simplement connexe et strictement contenu dans* $\mathbb{D}$. *Alors il existe une fonction* $u \in \mathcal{U}(W)$ *telle que* $|u'(0)| > 1$.

Preuve. Soit $a \in \mathbb{D}\backslash W$, et soit φ_a l'automorphisme de $\mathbb{D}$ associé à a, $\varphi_a(z) = \frac{a-z}{1-\bar{a}z}$.

Comme φ_a ne s'annule pas sur l'ouvert simplement connexe W, la restriction de φ_a à W admet une racine carrée holomorphe, notée $\sqrt{\varphi_a}$. La fonction $\sqrt{\varphi_a}$ est injective et à valeurs dans $\mathbb{D}$ car φ_a est elle-même injective et à valeurs dans $\mathbb{D}$.

Posons $b = \sqrt{\varphi_a(0)} = \sqrt{a}$, et définissons $u : W \to \mathbb{D}$ par $u(z) = \varphi_b(\sqrt{\varphi_a(z)})$. La fonction u est holomorphe, injective, et $u(0) = 0$. D'autre part, on a

$$u'(0) = \varphi_b'(b) \times \frac{\varphi_a'(0)}{2\sqrt{\varphi_a(0)}} = \frac{1}{|b|^2 - 1} \times \frac{|a|^2 - 1}{2b} ,$$

et donc $|u'(0)| = \frac{|a|+1}{2\sqrt{|a|}}$ puisque $|b|^2 = |a|$. Comme $|a| \neq 1$, on a $|a| + 1 - 2\sqrt{|a|} = (1 - \sqrt{|a|})^2 > 0$, donc $|u'(0)| > 1$.

Proposition 10.4.4. *Soit* W *un ouvert de* $\mathbb{D}$ *simplement connexe et contenant* 0, *et soit* $f \in \mathcal{U}(W)$. *Pour que* $f(W)$ *soit exactement égal à* $\mathbb{D}$, *il faut et il suffit que* $|f'(0)|$ *soit maximum parmi l'ensemble des valeurs que peut prendre* $|g'(0)|$ *lorsque* g *parcourt* $\mathcal{U}(W)$.

Preuve. Supposons qu'on ait $f(W) = \mathbb{D}$; alors f est un biholomorphisme de W sur $\mathbb{D}$. Si $g \in \mathcal{U}(W)$, on peut écrire $g = h \circ f$, où $h = g \circ f^{-1}$. La fonction h est holomorphe dans $\mathbb{D}$, $h(0) = 0$, et $|h(z)| < 1$ pour tout $z \in \mathbb{D}$; d'après le lemme de Schwarz, on a donc $|h'(0)| \leqslant 1$, d'où $|g'(0)| = |h'(0)|\,|f'(0)| \leqslant |f'(0)|$.

Inversement, si $W' = f(W)$ est strictement contenu dans $\mathbb{D}$, alors le lemme 10.4.3 permet de trouver une fonction $u \in \mathcal{U}(W')$ telle que $|u'(0)| > 1$. La fonction $g = u \circ f$ appartient alors à $\mathcal{U}(W)$, et $|g'(0)| = |u'(0)|\,|f'(0)| > |f'(0)|$, inégalité stricte car, f étant injective, on a $|f'(0)| \neq 0$.

10.4.3. Preuve du théorème de Riemann

Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert simplement connexe, $\Omega \neq \mathbb{C}$. D'après le lemme 10.4.2, Ω est conformément équivalent à un ouvert borné. Quitte à effectuer une translation puis une homothétie, on peut donc supposer que Ω est contenu dans $\mathbb{D}$ et contient 0.

Soit g un élément quelconque de $\mathcal{U}(\Omega)$, par exemple la fonction $z \mapsto z$, et posons

$$\mathcal{A} = \{ f \in \mathcal{U}(\Omega);\ |f'(0)| \geqslant |g'(0)| \}\ .$$

La famille $\mathcal{A}$ est une partie bornée de $\mathcal{H}(\Omega)$ car les fonctions de $\mathcal{A}$ sont à valeurs dans $\mathbb{D}$, donc $\mathcal{A}$ est relativement compacte dans $\mathcal{H}(\Omega)$ d'après le théorème de Montel. De plus, par continuité de l'application $f \mapsto |f'(0)|$, toute fonction $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ adhérente à $\mathcal{A}$ vérifie $|f'(0)| \geqslant |g'(0)| > 0$, et est donc en particulier non constante. D'après le théorème de Hurwitz 8.3.11 et le corollaire 8.3.10, on en déduit que toutes les fonctions de $\overline{\mathcal{A}}$ sont injectives et prennent leurs valeurs dans $\mathbb{D}$. Ainsi, $\mathcal{A}$ est fermé dans $\mathcal{H}(\Omega)$. Au total, $\mathcal{A}$ est un compact de $\mathcal{H}(\Omega)$.

L'application $f \mapsto |f'(0)|$ est continue sur $\mathcal{U}(\Omega)$, donc elle atteint sa borne supérieure sur le compact $\mathcal{A}$; et par définition de $\mathcal{A}$, il s'agit en fait de sa borne supérieure sur $\mathcal{U}(\Omega)$ tout entier. D'après la proposition 10.4.4, cela termine la démonstration.

Remarque 10.4.5. *La simple connexité est intervenue à deux reprises, mais uniquement pour assurer l'existence de racines carrées holomorphes pour certaines fonctions holomorphes ne s'annulant pas.*

10.4.4. Un exemple explicite

La preuve du théorème de Riemann donnée plus haut repose sur un argument abstrait de compacité, et n'est donc absolument pas constructive. Dans cette section, on va donner un exemple explicite de représentation conforme du disque unité sur un carré.

Commençons par quelques remarques préliminaires.

L'application $z \mapsto z^4$ envoie $\mathbb{D}$ sur $\mathbb{D}$ et $\mathbb{T}$ sur $\mathbb{T}$; par conséquent, l'application $z \mapsto 1 - z^4$ envoie $\mathbb{D}$ sur le disque $\mathrm{D}(1,1)$ et $\overline{\mathbb{D}}$ sur $\overline{\mathrm{D}}(1,1)$. En notant $\sqrt{\ }$ la détermination principale de $\sqrt{u}$ dans $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}^-$ prolongée par continuité en 0, on en déduit que la fonction g définie par

$$g(z) = \sqrt{1 - z^4}$$

est continue sur $\overline{\mathbb{D}}$ et holomorphe dans $\mathbb{D}$.

On a $g^{-1}(0) = \{1; i; -1; -i\}$, de sorte que $\frac{1}{g}$ est bien définie et continue sur $\overline{\mathbb{D}}\backslash\{1; i; -1; -i\}$. D'autre part, la 1-forme $\frac{1}{g(\zeta)}\, d\zeta$, arbitrairement définie aux points $1, i, -1, -i$, est intégrable sur tout segment $[0\,; z]$ car

$|\sqrt{1-t^4z^4}| \geqslant \sqrt{1-t^4}$ pour tout $t \in [0;1]$ et la fonction $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-t^4}}$ est intégrable sur $[0;1]$. En notant $\int_0^z$ l'intégrale sur le segment $[0;z]$, l'expression

$$\int_0^z \frac{d\zeta}{\sqrt{1-\zeta^4}}$$

a donc un sens pour tout $z \in \overline{\mathbb{D}}$.

Proposition 10.4.6. *Soit* W *le carré ouvert de sommets* $\rho, i\rho, -\rho, -i\rho$, *où* $\rho = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}$. *Alors l'application* φ *définie par*

$$\varphi(z) = \int_0^z \frac{d\zeta}{\sqrt{1-\zeta^4}}$$

est un homéomorphisme de $\overline{\mathbb{D}}$ *sur* $\overline{\mathrm{W}}$ *dont la restriction à* $\mathbb{D}$ *est un biholomorphisme de* $\mathbb{D}$ *sur* W.

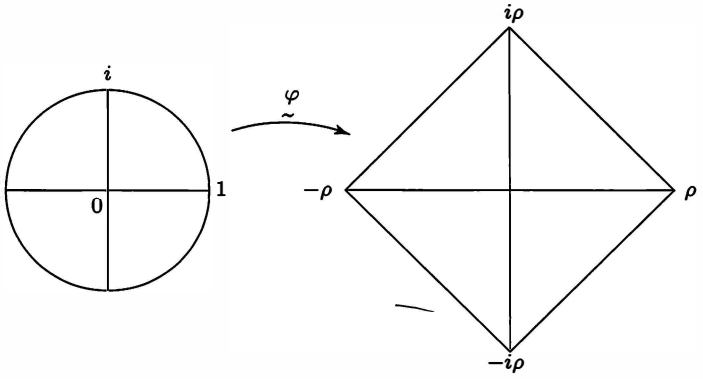


FIG. 46.

Preuve. On a l'inégalité $|\sqrt{1-t^4z^4}| \geqslant \sqrt{1-t^4}$ pour tout couple $(z,t) \in \overline{\mathbb{D}} \times [0;1[$ et, comme la fonction $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-t^4}}$ est intégrable sur $[0;1[$, le théorème de continuité pour les intégrales à paramètres montre que la fonction φ est continue sur $\overline{\mathbb{D}}$. De plus, comme $\frac{1}{g}$ est holomorphe, la restriction de φ à $\mathbb{D}$ est holomorphe ; plus précisément, c'est l'unique primitive de $\frac{1}{g}$ dans $\mathbb{D}$ valant 0 en 0 (voir la remarque suivant le théorème 2.1.7). Enfin, , on a $\varphi(iz) = iz\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-(itz)^4}} = iz\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-(tz)^4}}$, autrement dit

$$\varphi(iz) = i\varphi(z)$$

pour tout $z \in \overline{\mathbb{D}}$.

Si $\theta \in [0;2\pi]$, alors, d'après le théorème de Cauchy appliqué à $\frac{1}{g}$ et au compact à bord régulier $\mathrm{K} = \{\lambda e^{is};\ 0 \leqslant \lambda \leqslant r,\ 0 \leqslant s \leqslant \theta\}$, on a

$$\varphi(re^{i\theta}) - \varphi(r) = \int_0^\theta \frac{ire^{is}\,ds}{\sqrt{1-r^4e^{4is}}}$$

pour tout $r < 1$.

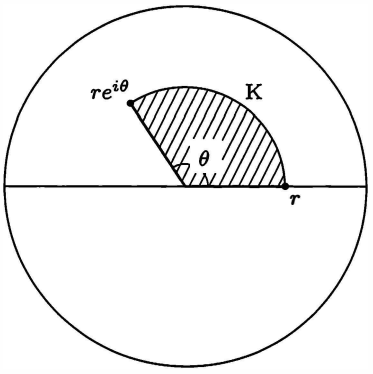


FIG. 47.

Comme $|1 - r^4e^{4is}| \geqslant 2^{-4}|\sin 4s|$ si $r \geqslant 1/2$ et comme la fonction $s \mapsto \frac{1}{\sqrt{|\sin 4s|}}$ est intégrable sur $[0\,;2\pi]$, le théorème de convergence dominée permet d'écrire, en faisant tendre r vers 1 :

$$\varphi(e^{i\theta}) = \varphi(1) + \int_0^\theta \frac{ie^{is}\,ds}{\sqrt{1-e^{4is}}}$$

pour tout $\theta \in [0\,;2\pi]$.

On a $1 - e^{4is} = e^{2is} \times (-2i\sin 2s) = (2\sin 2s)\,e^{i(2s-\frac{\pi}{2})}$. Si $s \in [0\,;\frac{\pi}{2}]$, alors $2s - \frac{\pi}{2} \in [-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}]$, donc $\sqrt{1-e^{4is}} = \sqrt{2\sin 2s}\;e^{i(s-\frac{\pi}{4})}$, et on obtient ainsi

$$\varphi(e^{i\theta}) = \varphi(1) + e^{3i\frac{\pi}{4}} \int_0^\theta \frac{ds}{\sqrt{2\sin 2s}}$$

pour tout $\theta \in [0\,;\frac{\pi}{2}]$. Comme l'application $\theta \to \int_0^\theta \frac{ds}{\sqrt{2\sin 2s}}$ est continue et strictement croissante, cette identité montre que $\varphi(e^{i\theta})$ paramètre un segment de droite quand θ décrit $[0\,;\pi/2]$; et comme par ailleurs $\varphi(1) = \rho$ et $\varphi(i) = i\varphi(1) = i\rho$, il s'agit du segment $[\rho\,;i\rho]$. Compte tenu de l'identité $\varphi(iz) = i\varphi(z)$, on en déduit que $\varphi(e^{i\theta})$ paramètre le bord du carré W de sommets $\rho, i\rho, -\rho, -i\rho$ quand θ décrit $[0\,;2\pi]$. Par conséquent, $\varphi_{|\partial\mathbb{D}}$ est un homéomorphisme de $\partial\mathbb{D}$ sur ∂W.

Soit b un point de $\mathbb{C} \setminus \partial$W. Comme φ est continue sur $\overline{\mathbb{D}}$, $\varphi(re^{i\theta})$ converge uniformément vers $\varphi(e^{i\theta})$ quand r tend vers 1. Par conséquent, φ ne prend pas la valeur b sur le cercle $\partial\mathrm{D}(0,r)$ si r est suffisamment proche de 1, et on a

$$\lim_{r\to 1} \mathrm{I}(\varphi \circ \partial\mathrm{D}(0,r), b) = \mathrm{I}(\varphi \circ \partial\mathbb{D}, b)\,,$$

où la lettre I désigne l'indice (voir le chapitre 5). Comme $\mathrm{I}(\varphi\circ\partial\mathrm{D}(0,r),b)$ est égal au nombre de solutions de l'équation $\varphi(z)=b$ dans le disque $\mathrm{D}(0,r)$ (corollaire 8.3.4), on en déduit que le nombre de solutions de l'équation $\varphi(z)=b$ dans $\mathbb{D}$ est égal à $\mathrm{I}(\varphi\circ\partial\mathbb{D},b)$.

L'indice $\mathrm{I}(\varphi\circ\partial\mathbb{D},b)$ est nul si b appartient à $\mathbb{C}\setminus\overline{\mathrm{W}}$, composante connexe non bornée de $\mathbb{C}\setminus\partial\mathrm{W}$. Si maintenant $b\in\mathrm{W}$, alors b et 0 sont dans la même composante connexe de $\mathbb{C}\setminus\varphi(\partial\mathbb{D})=\mathbb{C}\setminus\partial\mathrm{W}$, donc $\mathrm{I}(\varphi\circ\partial\mathbb{D},b)=\mathrm{I}(\varphi\circ\partial\mathbb{D},0)$, variation de l'argument le long de $\varphi\circ\partial\mathbb{D}$. Cette dernière peut se calculer comme suit : comme le segment $[\rho;i\rho]$ est contenu dans $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}^-$, la variation de l'argument de $\varphi(e^{i\theta})$ quand θ décrit $[0\,;\pi/2]$ est égale à $\mathrm{Arg}(i\rho)-\mathrm{Arg}(\rho)=\pi/2$; la variation de l'argument le long de $\varphi\circ\partial\mathbb{D}$ est donc égale à $4\times\frac{\pi}{2}=2\pi$, d'où $\mathrm{I}(\varphi\circ\partial\mathbb{D},0)=1$. On a donc obtenu $\mathrm{I}(\varphi\circ\partial\mathbb{D},b)=1$ pour $b\in\mathrm{W}$.

On a ainsi montré que l'équation $\varphi(z)=b$ admet une unique solution dans $\mathbb{D}$ si $b\in\mathrm{W}$, et qu'elle n'en admet aucune si $b\notin\overline{\mathrm{W}}$. Enfin, si $b\in\partial\mathrm{W}$, alors l'équation n'a pas de solution dans $\mathbb{D}$, sinon elle en aurait une pour tout point $b'\in\mathbb{C}\setminus\overline{\mathrm{W}}$ suffisamment proche de b d'après le théorème de l'image ouverte. On peut donc conclure que $\varphi_{|\mathbb{D}}$ est une bijection de $\mathbb{D}$ sur W.

Au total, φ est une bijection continue de $\overline{\mathbb{D}}$ sur $\overline{\mathrm{W}}$, donc un homéomorphisme car $\overline{\mathbb{D}}$ est compact, et $\varphi_{|\mathbb{D}}$ est une bijection holomorphe de $\mathbb{D}$ sur W, donc un biholomorphisme.

Terminons cette section par un lemme implicitement contenu dans la démonstration précédente, et suffisamment intéressant pour être énoncé séparément.

Lemme 10.4.7. *Soit $\varphi:\overline{\mathbb{D}}\to\mathbb{C}$ une application continue sur $\overline{\mathbb{D}}$ et holomorphe dans $\mathbb{D}$. Si la restriction de φ à $\partial\mathbb{D}$ est injective, alors $\varphi_{|\mathbb{D}}$ est un biholomorphisme de $\mathbb{D}$ sur l'intérieur de la courbe de Jordan fermée $\varphi(\partial\mathbb{D})$.*

Preuve. Notons Ω l'intérieur de la courbe de Jordan $\varphi(\partial\mathbb{D})$, c'est-à-dire la composante connexe bornée de $\mathbb{C}\setminus\varphi(\partial\mathbb{D})$.

On montre comme plus haut que si $b\in\mathbb{C}\setminus\partial\Omega$, alors le nombre de solutions de l'équation $\varphi(z)=b$ dans $\mathbb{D}$ est égal à $\mathrm{I}(\varphi\circ\partial\mathbb{D},b)$. Comme $\varphi\circ\partial\mathbb{D}$ est un paramétrage de $\partial\Omega$, le théorème de Jordan (plus exactement, la proposition 6.4.14) montre que cet indice, nécessairement positif puisqu'il est égal au nombre de solutions d'une équation, vaut 1 si $b\in\Omega$ et 0 si $b\notin\overline{\Omega}$. Ainsi, l'équation $\varphi(z)=b$ admet exactement une solution dans $\mathbb{D}$ si $b\in\Omega$ et n'en admet aucune si $b\notin\overline{\Omega}$. D'après le théorème de l'image ouverte, cette équation n'admet pas non plus de solution dans $\mathbb{D}$ si $b\in\partial\Omega$, donc $\varphi_{|\mathbb{D}}$ est une bijection de $\mathbb{D}$ sur Ω.

10.5. Caractérisations des ouverts simplement connexes

Le théorème suivant résume l'essentiel des résultats démontrés jusqu'à maintenant sur les ouverts simplement connexes.

Théorème 10.5.1. *Pour un ouvert connexe $\Omega \subset \mathbb{C}$, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(1) *Ω est simplement connexe ;*

(2) *toute 1-forme fermée sur Ω est exacte ;*

(3) *$\int_\gamma f dz = 0$ pour tout lacet γ dans Ω et pour toute fonction $f \in \mathcal{H}(\Omega)$;*

(4) *toute fonction holomorphe dans Ω admet une primitive holomorphe ;*

(5) *toute fonction holomorphe $f : \Omega \to \mathbb{C}^*$ admet un logarithme holomorphe ;*

(6) *toute fonction holomorphe $f : \Omega \to \mathbb{C}^*$ admet une racine carrée holomorphe ;*

(7) *$\Omega = \mathbb{C}$ ou Ω est conformément équivalent à $\mathbb{D}$;*

(8) *Ω est homéomorphe à $\mathbb{D}$.*

Preuve. Compte tenu du théorème de Riemann et des résultats déjà démontrés dans les chapitres 2 à 5, la preuve est immédiate, sous la forme (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow \cdots \Rightarrow$ (8) $\Rightarrow$ (1). L'implication (6) $\Rightarrow$ (7) découle de la preuve du théorème de Riemann : on a vu en effet que dans la preuve de ce théorème, la simple connexité n'a été utilisée que pour assurer l'existence de racines carrées holomorphes.

Remarque 10.5.2. *D'après le théorème de Cauchy homologique, les 8 propriétés précédentes sont également équivalentes à*

(9) *Tout cycle dans Ω est homologue à 0 dans Ω.*

Voici encore deux caractérisations de la simple connexité.

Proposition 10.5.3. *Les propriétés* (1), ..., (9) *sont encore équivalentes à*

(10) *$\mathbb{S}_2 \backslash \Omega$ est connexe, autrement dit $\mathbb{C} \backslash \Omega$ n'a pas de composantes connexes bornées ;*

(11) *Les fonctions polynomiales sont denses dans $\mathcal{H}(\Omega)$.*

Preuve. L'implication (10)$\Rightarrow$(11) vient du théorème de Runge (corollaire 9.1.8). D'autre part, si (11) est vraie, alors (3) également, car on a $\int_\gamma P dz = 0$ pour toute lacet γ et pour toute fonction polynomiale P et l'application $f \mapsto \int_\gamma f dz$ est continue sur $\mathcal{H}(\Omega)$.

Supposons maintenant que $\mathbb{S}_2 \backslash \Omega$ ne soit pas connexe. Comme $\mathbb{S}_2$ est compacte, on peut alors écrire $\mathbb{S}_2 \backslash \Omega = \mathrm{H} \cup \mathrm{K}$, où H, K sont compacts,

non vides, disjoints, et $\infty \in H$. Fixons un point $a \in K$. On va montrer que la fonction $z \mapsto \frac{1}{z-a}$ n'admet pas de primitive holomorphe sur Ω, ce qui contredira (4) et donc (11) puisque (11) entraîne (3).

Posons $W = \Omega \cup K = \mathbb{S}_2 \backslash H$. Comme H est compact et contient ∞, W est un ouvert de $\mathbb{C}$; on peut donc trouver une fonction $\chi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{C})$ à support compact contenu dans W et valant 1 au voisinage de K. Le choix de χ montre qu'on a $\mathrm{supp}(\frac{\partial \chi}{\partial \bar{z}}) \subset \Omega$. D'après la formule de Cauchy-Pompeiu, on en déduit

$$\int_\Omega \frac{\partial \chi}{\partial \bar{z}} \frac{1}{z-a}\, dm(z) = -\pi \neq 0 \ .$$

Si on avait $\frac{1}{z-a} = \frac{\partial f}{\partial z}$ pour une certaine fonction $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, alors, comme les fonctions $\frac{\partial \chi}{\partial \bar{z}}$ et $\frac{\partial \chi}{\partial z}$ sont à supports compacts dans Ω, une double intégration par parties donnerait

$$\int_\Omega \frac{\partial \chi}{\partial \bar{z}} \frac{1}{z-a}\, dm(z) = -\int_\Omega \frac{\partial^2 \chi}{\partial z \partial \bar{z}} f\, dm = \int_\Omega \frac{\partial \chi}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\, dm = 0 \ ,$$

d'où une contradiction. On a ainsi montré que (4) entraîne (10), et donc que (11) entraîne (10).

Corollaire 10.5.4. *Si $\Gamma \subset \mathbb{C}$ est une courbe de Jordan fermée, alors $\Omega = \mathrm{int}(\Gamma)$ est simplement connexe.*

10.6. Domaines de Jordan ; théorème de Carathéodory

Définition 10.6.1. *On dit qu'un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$ est un* **domaine de Jordan** *si Ω est l'intérieur d'une courbe de Jordan fermée.*

D'après le corollaire 10.5.4, tout domaine de Jordan est simplement connexe, donc deux domaines de Jordan sont toujours conformément équivalents. Le théorème suivant décrit le « comportement à la frontière » d'un biholomorphisme entre deux tels domaines.

Théorème 10.6.2. (Carathéodory.) *Si Ω et Ω' sont deux domaines de Jordan, alors tout biholomorphisme de Ω sur Ω' se prolonge en un homéomorphisme de $\overline{\Omega}$ sur $\overline{\Omega}'$.*

Preuve abrégée. Il suffit de démontrer que tout biholomorphisme de Ω sur Ω' se prolonge continûment à $\overline{\Omega}$. Ce point une fois acquis, on procède comme suit : si f est un biholomorphisme de Ω sur Ω', d'inverse g, alors f et g se prolongent en deux applications continues $F : \overline{\Omega} \to \overline{\Omega}'$ et $G : \overline{\Omega}' \to \overline{\Omega}$; on a $f \circ g(z) \equiv z$ dans Ω, donc $F \circ G(z) \equiv z$ dans $\overline{\Omega}$ par

continuité, et de même $G \circ F(z) \equiv z$ dans $\overline{\Omega'}$; par conséquent, F et G sont des homéomorphismes inverses l'un de l'autre.

Soit maintenant f un biholomorphisme de Ω sur Ω'. Pour montrer que f se prolonge continûment à $\overline{\Omega}$, on va procéder par l'absurde.

Supposons que f ne se prolonge *pas* continûment à $\overline{\Omega}$. On peut alors trouver un point $\zeta_0 \in \partial\Omega$ tel que $f(z)$ n'admette pas de limite quand z tend vers ζ_0. Comme f est bornée, on en déduit par un argument de compacité qu'il existe deux suites $(u_n), (v_n) \subset \Omega$ convergeant toutes les deux vers ζ_0, telles que les suites$(f(u_n))$ et $(f(v_n))$ soient toutes les deux convergentes, mais vers des limites différentes. Cela rend au moins plausible le fait suivant, que l'on admettra. Pour une démonstration, on pourra consulter [8], ou l'exercice 10.43.

Fait. *On peut trouver $r_0 > 0$ et deux applications boréliennes $\theta_1, \theta_2 :]0\,;r_0] \to [0\,;2\pi]$ telles que $\theta_1 \leqslant \theta_2$ et vérifiant les propriétés suivantes :*

(i) *pour tout $r \in]0\,;r_0]$, l'arc de cercle*

$$\Gamma_r = \{\zeta_0 + re^{i\theta};\ \theta_1(r) \leqslant \theta \leqslant \theta_2(r)\}$$

est contenu dans Ω ;

(ii) *En posant $a_r = \zeta_0 + re^{i\theta_1(r)}$ et $b_r = \zeta_0 + re^{i\theta_2(r)}$, on a*

$$|f(b_r) - f(a_r)| \geqslant \varepsilon$$

pour tout $r \in]0\,;r_0]$, où $\varepsilon > 0$ est une constante indépendante de r.

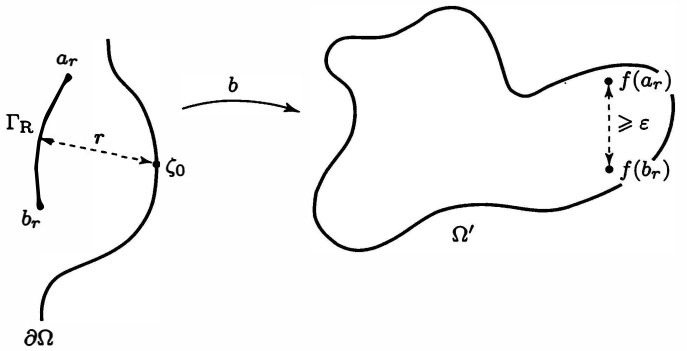


FIG. 48.

Pour $r \in]0\,;r_0]$, la propriété (i) permet d'écrire

$$f(b_r) - f(a_r) = \int_{\Gamma_r} f'(z)\,dz = \int_{\theta_1(r)}^{\theta_2(r)} ire^{i\theta}\, f'(\zeta_0 + re^{i\theta})\,d\theta\,.$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on en déduit, compte tenu de (ii) :

$$\varepsilon^2 \leqslant (\theta_2(r) - \theta_1(r))\, r^2 \int_{\theta_1(r)}^{\theta_2(r)} \left|f'(\zeta_0 + re^{i\theta})\right|^2 d\theta$$
$$\leqslant 2\pi r^2 \int_{\theta_1(r)}^{\theta_2(r)} \left|f'(\zeta_0 + re^{i\theta})\right|^2 d\theta$$

pour tout $r \in]0\,;r_0]$.

En divisant par r et en intégrant entre 0 et r_0, on obtient donc

$$\frac{\varepsilon^2}{2\pi} \int_0^{r_0} \frac{dr}{r} \leqslant \int_0^{r_0} r \int_{\theta_1(r)}^{\theta_2(r)} \left|f'(\zeta_0 + re^{i\theta})\right|^2 d\theta\, dr\ ,$$

autrement dit

$$\int_A |f'(z)|^2\, dm(z) = +\infty\ ,$$

où $A = \{\zeta_0 + re^{i\theta};\ 0 < r \leqslant r_0,\ \theta_1(r) \leqslant \theta \leqslant \theta_2(r)\} \subset \Omega$.

D'autre part, comme f est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme et comme $J_f(z) \equiv |f'(z)|^2$, le théorème de changement de variables donne

$$\int_A |f'(z)|^2\, dm(z) = m(f(A)) \leqslant m(\Omega') < +\infty\ ,$$

la deuxième inégalité venant du fait que Ω' est borné. On a donc obtenu la contradiction souhaitée, ce qui termine la démonstration.

Corollaire 10.6.3. *L'adhérence d'un domaine de Jordan est toujours homéomorphe au disque unité fermé* $\overline{\mathbb{D}}$.

Exercices

10.1. Pour $z, z' \in \mathbb{S}_2$, on note $d(z, z')$ la distance euclidienne entre les points de $\mathbf{S}^2$ correspondants. Montrer que si $z, z' \in \mathbb{C}$, alors

$$d(z\,, z') = \frac{2\,|z - z'|}{\sqrt{(1 + |z|^2)(1 + |z'|^2)}}\ ,$$

et que si $z \in \mathbb{C}$, alors

$$d(z\,, \infty) = \frac{2}{\sqrt{1 + |z|^2}}\ .$$

10.2. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{S}_2$, et soit $f : \Omega \to \mathbb{S}_2$ holomorphe. Montrer que f possède les deux propriétés suivantes :

(1) Si $a \in \mathbb{C} \cap \Omega$, alors ou bien $f(z) \equiv \infty$ au voisinage de a, ou bien $f(z)$ admet un développement du type $f(z) = \sum_{-N}^{\infty} c_n (z - a)^n$ dans un disque épointé $\{0 < |z - a| < r_0\}$.

(2) Si $\infty \in \Omega$, alors ou bien $f(z) \equiv \infty$ au voisinage de ∞, ou bien $f(z)$ admet un développement du type $f(z) \equiv \sum_{-\infty}^{N} c_n z^n$ dans un « disque épointé » $\{R_0 < |z| < \infty\}$.

10.3. Définir la dérivée d'une fonction holomorphe sur un ouvert de $\mathbb{S}_2$.

10.4. Soit $f : \mathbb{S}_2 \to \mathbb{S}_2$ continue ouverte. Montrer que f est surjective.

10.5. Montrer qu'une fonction holomorphe $f : \mathbb{S}_2 \to \mathbb{S}_2$ est soit constante, soit surjective.

10.6. (Théorème de d'Alembert.)

Soit P une fonction polynomiale non constante. Montrer que P se prolonge en une fonction holomorphe $\tilde{P} : \mathbb{S}_2 \to \mathbb{S}_2$, et en déduire que P est surjective.

10.7. Déterminer toutes les fonctions holomorphes sur $\mathbb{S}_2$.

10.8. (Un théorème de Cartan.)

Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert connexe borné, et soit f une fonction holomorphe sur Ω vérifiant $f(\Omega) \subset \Omega$ et admettant un point fixe $a \in \Omega$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note f_n la n-ième itérée de f : $f_n = f \circ \cdots \circ f$.

1) Calculer $f_n'(a)$ pour tout n, et en déduire qu'on a $|f'(a)| \leqslant 1$.

2) On suppose qu'on a $f'(a) = 1$.

a) Montrer que si $f \neq id$, alors il existe une constante $c \neq 0$ et un entier $k \geqslant 2$ tels que, pour tout $n \geqslant 1$, on ait

$$f_n(z) = z + nc\,(z-a)^k + o[(z-a)^k]$$

au voisinage de a.

b) Montrer qu'on a $f = id$.

3) *a*) Montrer que si $\lambda \in \mathbb{T}$, alors il existe une suite strictement croissant d'entiers (p_n) telle que $\lim_{n\to\infty} \lambda^{p_n} = 1$. En déduire que si $|f'(a)| = 1$, alors (f_n) admet une sous-suite (g_n) qui converge vers id uniformément sur tout compact.

b) Montrer qu'on a $|f'(a)| = 1$ si et seulement si f est un biholomorphisme de Ω sur Ω.

4) En utilisant convenablement le théorème de Montel et le principe du prolongement analytique, montrer que si $|f'(a)| < 1$, alors $f_n(z)$ tend vers a uniformément sur tout compact de Ω.

10.9. Cet exercice est supposé illustrer le précédent.

1) Soit Ω le demi-plan $\{\mathrm{Re}(z) > 0\}$, et soit $\alpha \in]0\,;1[$. Pour $z \in \Omega$, on pose $f(z) = \alpha z + \frac{1-\alpha}{z}$. Montrer qu'on a $f(\Omega) \subset \Omega$, et étudier la suite des itérées de f.

2) Mêmes questions qu'au 1) avec $\Omega = \{z;\ |z| < 1,\ \mathrm{Re}(z) > 0,\ \mathrm{Im}(z) > 0\}$ et $f(z) = e^{i\frac{\pi}{2}z}$.

10.10. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ contenant 0 et soit $f : \Omega \to \Omega$ holomorphe vérifiant $f(0) = 0$. On pose $\lambda = f'(0)$, et on suppose qu'on a $0 < |\lambda| < 1$.

1) Pour $n \in \mathbb{N}$, on note f_n la n-ième itérée de la fonction f, et on pose $\varphi_n = \lambda^{-n} f_n$.

a) Montrer qu'on peut trouver des constantes $\delta > 0$ et $\alpha < |\lambda|^{1/2}$ telles que $|f_n(z)| \leqslant \alpha^n |z|$ pour tout $z \in \overline{\mathrm{D}}(0, \delta)$ et pour tout n.

b) Montrer qu'il existe une constante C telle que

$$|\varphi_{n+1}(z) - \varphi_n(z)| \leqslant \frac{\mathrm{C}}{|\lambda|^{n+1}} |f_n(z)|^2$$

pour $|z| \leqslant \delta$ et pour tout n.

c) Déduire de *a*) et *b*) que la suite (φ_n) converge uniformément sur $\overline{\mathrm{D}}(0, \delta)$.

2) Montrer que f est biholomorphiquement conjuguée à l'homothétie $z \mapsto \lambda z$ au voisinage de 0. En d'autres termes, montrer qu'il existe U, V voisinages de 0 dans $\mathbb{C}$ et un biholomorphisme $\varphi : \mathrm{U} \to \mathrm{V}$ tels que $\varphi \circ f \circ \varphi^{-1}(z) \equiv \lambda z$.

10.11. Trouver un biholomorphisme de Ω_1 sur Ω_2 dans les cas suivants.

1) $\Omega_1 = \mathbb{C} \backslash \{|\operatorname{Arg}(z)| < \alpha\}$, $\alpha \leqslant \pi$ et $\Omega_2 = \mathbb{D}$.
2) $\Omega_1 = \{|\operatorname{Im}(z)| < \pi\}$ et $\Omega_2 = \mathbb{D}$.
3) $\Omega_1 = \mathbb{D}$ et $\Omega_2 = \{\operatorname{Re}(z) > 0\}$.
4) $\Omega_1 = \{0 < \operatorname{Re}(z) < 1\}$ et $\Omega_2 = \{\operatorname{Im}(z) > 0\}$.
5) $\Omega_1 = \{0 < |z| < 1\,,\ 0 < \operatorname{Arg}(z) < \pi\}$ et $\Omega_2 = \mathbb{D}$.

10.12. Soit $\mathrm{V} = \{|z| > 1\}$ et soit $f : \mathrm{V} \to \mathbb{C}$ définie par $f(z) = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$.

1) Montrer que f est un biholomorphisme de V sur un ouvert W que l'on déterminera.

2) Donner le développement en série de Laurent de $g = f^{-1}$ dans la couronne $\{|w| > 1\}$.

10.13. Soit ψ l'homographie définie par $\psi(z) = \frac{1+z}{1-z}$. Déterminer l'image par ψ du disque unité $\mathbb{D}$; du segment $]-1\,;1\,[$; d'un autre diamètre de $\mathbb{D}$; d'un cercle $\{|z| = r\}$, $r < 1$.

10.14. Déterminer l'image de la bande $\{0 < \operatorname{Re}(z) < 1\}$ par l'homographie $z \mapsto \frac{z-1}{2z-1}$.

10.15. (Biholomorphismes entre deux couronnes.)

Pour $0 < r < \mathrm{R} < \infty$, on note $\mathrm{V}(r\,,\mathrm{R})$ la couronne $\{r < |z| < \mathrm{R}\}$.

1) Montrer que si $\mathrm{R}_1/r_1 = \mathrm{R}_2/r_2$, alors $\mathrm{V}(r_1\,,\mathrm{R}_1)$ et $\mathrm{V}(r_2\,,\mathrm{R}_2)$ sont conformément équivalentes.

2) Soient $\mathrm{R}_1, \mathrm{R}_2 > 1$. On suppose qu'il existe un biholomorphisme f de $\mathrm{V}(1\,,\mathrm{R}_1)$ sur $\mathrm{V}(1\,,\mathrm{R}_2)$.

a) Montrer qu'on a seulement deux possibilités :

ou bien $\lim_{z \to \zeta} |f(z)| = 1$ pour tout $\zeta \in \partial\mathrm{D}(0, 1)$ et $\lim_{z \to \zeta} |f(z)| = \mathrm{R}_2$ pour tout $\zeta \in \partial\mathrm{D}(0, \mathrm{R}_1)$;
ou bien la situation inverse en échangeant 1 et R_2.

b) On pose $\alpha = \log \mathrm{R}_2 / \log \mathrm{R}_1$ dans le cas (i), et $\alpha = -\log \mathrm{R}_2 / \log \mathrm{R}_1$ dans le cas (ii). Remarquer que la fonction g définie par $g(z) = \log |f(z)| - \alpha \log |z|$ est harmonique (voir le chapitre 11) puis montrer que g est identiquement nulle. En déduire qu'on a $\frac{f'(z)}{f(z)} \equiv \frac{\alpha}{z}$.

c) Montrer qu'on a $\mathrm{R}_1 = \mathrm{R}_2$.

3) Conclure que deux couronnes $V(r_1, R_1)$ et $V(r_2, R_2)$ sont conformément équivalentes si et seulement si $R_2/r_2 = R_1/r_1$.

10.16. Soit $R > 1$. Déterminer les automorphismes de la couronne $V(1, R)$.

10.17. Déterminer tous les automorphismes de $\mathbb{D}$ envoyant un point $c \in \mathbb{D}$ donné sur 0. En déduire une preuve sans calcul du fait que les automorphismes de $\mathbb{D}$ sont des isométries pour la distance pseudo-hyperbolique (voir l'exercice 4.67).

10.18. Pour $z, \zeta \in \mathbb{D}$, on pose $K(z,\zeta) = K_z(\zeta) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{(1-\bar{z}\zeta)^2}$.

1) Vérifier que tout $z \in \mathbb{D}$, la fonction K_z appartient à l'espace de Bergman $B^2(\mathbb{D}) = \mathcal{H}(\mathbb{D}) \cap L^2(\mathbb{D})$.

2) Montrer que pour toute fonction $f \in B^2(\mathbb{D})$, on a $f(0) = \langle f, K_0 \rangle$, où $\langle\ ,\ \rangle$ est le produit scalaire usuel sur $L^2(\mathbb{D})$.

3) *a*) Montrer que si $f \in B^2(\mathbb{D})$ et si φ est un automorphisme de $\mathbb{D}$, alors $(f \circ \varphi)\, \varphi' \in B^2(\mathbb{D})$.

b) Soit φ un automorphisme de $\mathbb{D}$, et soit $\psi = \varphi^{-1}$. Montrer que si $f, g \in B^2(\mathbb{D})$, alors

$$\langle (f \circ \varphi)\, \varphi', g \rangle = \langle f, (g \circ \psi)\, \psi' \rangle .$$

4) Montrer que K est le noyau reproduisant de $B^2(\mathbb{D})$, autrement dit que pour $f \in B^2(\mathbb{D})$ et $a \in \mathbb{D}$, on a $f(a) = \langle f, K_a \rangle$.

10.19. On note ψ_A l'homographie associée à une matrice $A \in GL_2(\mathbb{C})$. Déterminer les matrices $A \in SL_2(\mathbb{C})$ pour lesquelles ψ_A envoie le demi-plan supérieur $\mathbf{U} = \{\mathrm{Im}(z) > 0\}$ dans lui-même.

10.20. En utilisant l'exercice précédent, déterminer les automorphismes du demi-plan supérieur $\mathbf{U}$.

10.21. Avec les notations de l'exercice 10.19, déterminer les matrices $A \in SL_2(\mathbb{R})$ vérifiant $\psi_A(i) = i$.

10.22. Soit $\mathbf{U}$ le demi-plan supérieur $\{\mathrm{Im}(z) > 0\}$. En utilisant l'exercice 4.64, montrer que si $f : \mathbf{U} \to \mathbb{C}$ est holomorphe et vérifie $f(\mathbf{U}) \subset \mathbf{U}$, alors

$$\left| \frac{f(z_2) - f(z_1)}{f(z_2) - \overline{f(z_1)}} \right| \leqslant \left| \frac{z_2 - z_1}{z_2 - \bar{z}_1} \right|$$

pour tous $z_1, z_2 \in \mathbf{U}$, et

$$\frac{|f'(z)|}{\mathrm{Im}(f(z))} \leqslant \frac{1}{\mathrm{Im}(z)}$$

pour tout $z \in \mathbf{U}$. Caractériser les cas d'égalité.

10.23. Soit f une fonction holomorphe dans $\mathbb{D}$ vérifiant $f(0) = 1$ et $\mathrm{Re} f(z) > 0$ pour tout $z \in \mathbb{D}$. Montrer qu'on a

$$\frac{1 - |f(z)|}{1 + |f(z)|} \leqslant |f(z)| \leqslant \frac{1 + |f(z)|}{1 - |f(z)|}$$

pour tout point $z \in \mathbb{D}$. Caractériser les cas d'égalité.

10.24. On note U le demi-plan $\{\mathrm{Re}(z) > 0\}$. Montrer que si $f : \overline{\mathrm{U}} \to \mathbb{C}$ est continue sur $\overline{\mathrm{U}}$, holomorphe dans U, et s'annule au point $z = 1$ avec multiplicité m, alors

$$|f(z)| \leqslant \left|\frac{1-z}{1+z}\right|^m$$

pour tout $z \in \mathrm{U}$.

10.25. Soit (f_n) une suite de fonctions holomorphes dans $\mathbb{D}$ telle que $\mathrm{Re}(f_n) > 0$ et $f_n(0) = 1$ pour tout n. Montrer que (f_n) admet une sous-suite qui converge uniformément sur les compacts de $\mathbb{D}$.

10.26. Soit (a_n) une suite dans le demi-plan supérieur $\mathbf{U} = \{\mathrm{Im}(z) > 0\}$. À quelle condition le produit $\prod \frac{z-a_n}{z-\overline{a}n}$ est-il normalement convergent sur les compacts de $\mathbf{U}$?

10.27. Soit U le demi-plan $\{\mathrm{Re}(z) > 0\}$, et soit $\mathrm{H}^\infty(\mathrm{U})$ l'ensemble des fonctions holomorphes bornées sur U. Soit également $(\lambda_n) \subset]0\,;+\infty[$ une suite strictement croissante.

1) On suppose qu'on a $\sum_0^\infty \frac{1}{\lambda_n} = +\infty$. Montrer que si une fonction $f \in \mathrm{H}^\infty(\mathrm{U})$ s'annule en tous les λ_n, alors $f = 0$.

2) On suppose qu'on a $\sum_0^\infty \frac{1}{\lambda_n} < +\infty$. Montrer que (λ_n) est la suite des zéros d'une fonction de $\mathrm{H}^\infty(\mathrm{U})$.

10.28. Soit $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$, $f(z) = \sum_0^\infty c_n z^n$.

1) Montrer qu'on a

$$|c_n| \leqslant \frac{e}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(r_n e^{i\theta})|\, d\theta$$

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, où $r_n = 1 - \frac{1}{n}$.

2) Trouver un biholomorphisme F de $\mathbb{D}$ sur $\mathbb{C}\backslash[1\,;+\infty[$ vérifiant $\mathrm{F}(0) = 0$.

3) On suppose qu'on a $f(0) = 0$ et que f ne prend aucune valeur $t \in [1\,;+\infty[$. En utilisant l'exercice 8.20, montrer qu'on a $|c_n| \leqslant Cn$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, où C est une constante absolue.

10.29. Déterminer $\sup\{|f'(i)|;\ f \in \mathcal{H}(\mathbf{U}),\ \|f\|_\infty \leqslant 1\}$, où on a noté $\mathbf{U}$ le demi-plan supérieur $\{\mathrm{Im}(z) > 0\}$.

10.30. Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert simplement connexe, $\Omega \neq \mathbb{C}$, et soit $a \in \Omega$.

1) Montrer que si φ_1 et φ_2 sont deux biholomorphismes de Ω sur $\mathbb{D}$ vérifiant $\varphi_1(a) = 0 = \varphi_2(a)$, alors $\varphi_1 = \lambda\varphi_2$ pour un certain $\lambda \in \mathbb{T}$.

2) Montrer qu'il existe un et un seul biholomorphisme $\varphi : \Omega \to \mathbb{D}$ vérifiant $\varphi(a) = 0$ et $\varphi'(a) \in \mathbb{R}^+$.

10.31. Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert simplement connexe, $\Omega \neq \mathbb{C}$. Montrer que $\Gamma(\Omega)$ opère transitivement sur Ω, autrement dit que si a et b sont deux points de Ω, alors il existe $\varphi \in \Gamma(\Omega)$ tel que $\varphi(a) = b$.

10.32. Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert simplement connexe, $\Omega \neq \mathbb{C}$. Pour $a \in \Omega$, on note Γ_a le stabilisateur de a dans $\Gamma(\Omega)$: $\Gamma_a = \{f \in \Gamma(\Omega);\ f(a) = a\}$.

1) En utilisant l'exercice précédent, montrer que les Γ_a sont sont deux à deux conjugués dans $\Gamma(\Omega)$.

2) Montrer que tous les groupes Γ_a sont isomorphes à $\mathbb{T}$.

10.33. Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert simplement connexe différent de $\mathbb{C}$, et soit φ un biholomorphisme de Ω sur $\mathbb{D}$. En utilisant l'exercice 10.18, exprimer le noyau reproduisant de l'espace de Bergman $\mathrm{B}^2(\Omega) = \mathcal{H}(\Omega) \cap \mathrm{L}^2(\Omega)$ à l'aide de φ.

10.34. Comme $e^{3i\pi/4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$, la preuve de la proposition 10.4.6 a montré au passage qu'on a

$$\int_0^{\pi/2} \frac{ds}{\sqrt{\sin s}} = 2\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}\,.$$

Démontrer directement cette identité.

10.35. Donner un exemple de biholomorphisme de $\mathbb{D}$ sur le carré

$$\{|x| < 1\,,\ |y| < 1\}\,.$$

10.36. Dans tout l'exercice, on note $\mathbf{U}$ le demi-plan supérieur $\{\mathrm{Im}(z) > 0\}$. On se donne également un nombre $k \in]0\,;1[$.

1) *a*) Soit $\Omega = \mathbb{C}\backslash\mathrm{A}$, où A est la réunion des 4 demi-droites $-\frac{1}{k} + i\mathbb{R}^-$, $-1 + i\mathbb{R}^-$, $1 + i\mathbb{R}^-$, $\frac{1}{k} + i\mathbb{R}^-$.

Montrer qu'il existe dans Ω une unique détermination holomorphe de $\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}$ prenant la valeur 1 en 0 ; on note g cette détermination.

b) Montrer que la restriction de g à $\mathbb{R}\backslash\{-\frac{1}{k}\,;-1\,;1\,;\frac{1}{k}\}$ est paire et qu'on a

$$g(x) = \begin{cases} \sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)} & \text{si} \quad 0 < x < 1 \\ i\sqrt{(x^2-1)(1-k^2x^2)} & \text{si} \quad 1 < x < \frac{1}{k} \\ -\sqrt{(x^2-1)(k^2x^2-1)} & \text{si} \quad x > \frac{1}{k} \end{cases}$$

On pourra s'inspirer de l'exercice 5.38.

2) On définit $f : \mathbf{U} \to \mathbb{C}$ par la formule

$$f(z) = \int_0^z \frac{dw}{g(w)} = \int_0^z \frac{dw}{\sqrt{(1-w^2)(1-k^2w^2)}}\,,$$

où $\int_0^z$ désigne l'intégrale sur le segment $[0\,;z]$.

a) Montrer que f est holomorphe sur $\mathbf{U}$.

b) Montrer qu'on peut prolonger f par continuité à $\overline{\mathbf{U}}$ en posant

$$f(x) = \int_0^x \frac{dt}{g(t)}$$

pour $x \in \mathbb{R}$.

c) Montrer qu'on peut également prolonger f par continuité au point ∞.

3) *a*) Calculer $f(0) = 0$, et montrer qu'il existe deux réels $a, b > 0$ tels que $f(1) = a$, $f(1/k) = a + ib$ et $\lim_{x \to +\infty} f(x) = ib$. Exprimer également $f(-x)$ en fonction de $f(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.

b) Montrer que f est un biholomorphisme de $\mathbf{U}$ sur le rectangle R de sommets $-a + ib$, $-a$, a, $a + ib$.

10.37. Soit n un entier au moins égal à 3, et soit $C_n = \left[\int_0^1 (1 - t^n)^{-2/n}\, dt\right]^{-1}$. Montrer que la formule

$$f(z) = C_n \int_0^z (1 - z^n)^{-2/n}\, dz$$

définit un biholomorphisme du disque unité sur le polygone régulier dont les sommets sont les racines n-ièmes de l'unité.

10.38. Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{C}$. Montrer que Ω est simplement connexe si et seulement si $\mathbb{C}\backslash\Omega$ est connexe. Qu'en est-il si Ω n'est pas borné ?

10.39. Soit K un compact de $\mathbb{C}$. On suppose que K admet une base de voisinages formée d'ouverts simplement connexes. Montrer que $\mathbb{C}\backslash K$ est connexe.

10.40. Trouver un homéomorphisme de $\mathbb{D}$ sur $\mathbb{D}$ qui ne peut pas se prolonger en un homéomorphisme de $\overline{\mathbb{D}}$ sur $\overline{\mathbb{D}}$.

10.41. Expliquer pourquoi l'ensemble A introduit à la fin de la preuve du théorème de Carathéodory est mesurable.

10.42. Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un domaine de Jordan, et soit $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{C}$ une fonction continue sur $\overline{\Omega}$ et holomorphe dans Ω. Montrer que si la restriction de f à $\partial\Omega$ est injective, alors $f_{|\Omega}$ est un biholomorphisme de Ω sur l'intérieur de la courbe de Jordan fermée $f(\partial\Omega)$.

10.43. Le but de l'exercice est de donner une preuve du fait admis en cours de route dans la démonstration du théorème de Carathéodory.

1) Soit Ω un domaine de Jordan, et soit $\zeta_0 \in \partial\Omega$.

a) Montrer que si $r > 0$ est suffisamment petit, alors le cercle $C_r = \partial D(\zeta_0, r)$ rencontre Ω.

b) Soit L une partie connexe non vide de Ω telle que $\zeta_0 \in \overline{L}$. En utilisant l'exercice 6.51, montrer que si $r > 0$ est suffisamment petit, alors $L \cap C_r \neq \emptyset$.

2) On reprend les notations de la preuve du théorème de Carathéodory.

a) Montrer que $u'_n = f(u_n)$ et $v'_n = f(v_n)$ convergent nécessairement vers des points de $\partial\Omega'$. On note ces points ζ'_1, ζ'_2.

b) En s'inspirant de l'exercice 6.53, montrer qu'on peut trouver deux courbes simples L'_1, L'_2 telles que $\zeta'_i \in L'_i$, $L'_i\backslash\{\zeta'_i\} \subset \Omega$ et $d(L'_1, L'_2) > 0$.

3) Conclure à l'aide de 1) et 2).

10.44. Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un domaine de Jordan et soit U un demi-plan ouvert de $\mathbb{C}$. Montrer que tout biholomorphisme de U sur Ω se prolonge en un homéomorphisme de $\overline{U}^{S_2} = \overline{U} \cup \{\infty\}$ sur $\overline{\Omega}$, et que si $a \in \partial\Omega$ est donné, alors il existe un biholomorphisme de U sur Ω dont le prolongement à $\overline{U}^{S_2}$ envoie ∞ sur a.

10.45. (Formule de Schwarz-Christoffel.)

Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un domaine de Jordan dont le bord est un polygone de sommets $a_0, a_1, \dots, a_N$. Soit également $\mathbf{U}$ le demi-plan supérieur $\{\mathrm{Im}(z) > 0\}$, et soit Φ un homéomorphisme de $\overline{\mathbf{U}}^{S_2}$ sur $\overline{\Omega}$ vérifiant $\Phi(\infty) = a_0$ dont la restriction à $\mathbf{U}$ est un biholomorphisme de $\mathbf{U}$ sur Ω ; l'existence d'un tel homéomorphisme découle de l'exercice précédent. Le but du présent exercice est de donner une formule « explicite » pour $\Phi(z)$.

Pour $i \in \{0; \dots; N\}$, on note $\alpha_i \pi$ l'angle au sommet a_i du polygone $\partial\Omega$, et pour $i \geqslant 1$, on note x_i le point de $\partial\mathbf{U} = \mathbb{R}$ vérifiant $\Phi(x_i) = a_i$; on supposera $x_1 < \dots < x_N$. Enfin, on pose également $x_{N+1} = \infty$ et $a_{N+1} = a_0$.

1) Montrer que la fonction Φ' admet un logarithme holomorphe G dans l'ouvert $\mathbf{U}$.

2) *a*) Soit $k \in \{0; \dots; N\}$. En utilisant une variante du principe de réflection de Schwarz, montrer que Φ admet un prolongement Φ_k holomorphe et injectif sur un ouvert simplement connexe Ω_k contenant $]x_k ; x_{k+1}[$.

b) Montrer que chaque fonction Φ_k' admet un argument continu θ_k sur Ω_k. Que peut-on dire de $\theta_k(x)$ quand x décrit l'intervalle $]x_k ; x_{k+1}[$?

c) Déduire de *a*) et *b*) que G′ se prolonge continûment à $\overline{\mathbf{U}} \setminus \{x_1; \dots; x_N\}$, et que son prolongement prend des valeurs réelles sur l'axe réel.

d) Montrer que G′ se prolonge holomorphiquement à $\mathbb{C} \setminus \{x_1; \dots; x_N\}$.

3) Soit $k \in \{1; \dots; N\}$.

a) Justifier l'existence d'une détermination continue h_k de $\big(\Phi(z) - a_k\big)^{1/\alpha_k}$ sur le demi-plan fermé $\overline{\mathbf{U}}$.

b) En examinant l'argument de $h_k(x)$, montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que h_k envoie le segment $]x_k - \varepsilon ; x_k + \varepsilon[$ sur un segment passant par 0. En déduire que la restriction de h_k à $\overline{\mathbf{U}} \cap \mathrm{D}(x_k, \varepsilon)$ se prolonge en un biholomorphisme de $\mathrm{D}(x_k, \varepsilon)$ sur un voisinage de 0.

c) Déduire de *b*) que la fonction G′ possède un pôle simple en x_k, avec $\mathrm{Res}(\mathrm{G}', x_k) = \alpha_k - 1$.

4) En considérant une détermination de $\big(\Phi(1/w) - a_0\big)^{1/\alpha_0}$ et en raisonnant comme dans 3), montrer que $\mathrm{G}'(z)$ est équivalent à $-\frac{\alpha_0 + 1}{z}$ quand z tend vers ∞.

5) Déduire de 3) et 4) qu'on a

$$\mathrm{G}'(z) \equiv \sum_1^k \frac{\alpha_k - 1}{z - x_k} \cdot$$

6) Conclure que $\Phi(z)$ est donné par la formule

$$\Phi(z) = \mathrm{A} + \mathrm{B} \int_0^z \prod_{k=1}^{N} (\zeta - x_k)^{\alpha_k - 1} \, d\zeta \ ,$$

où A et B sont des constantes.

10.46. Soit $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ une fonction holomorphe injective vérifiant $\varphi(0) = 0$.

1) Montrer qu'on a $1 - |z|^2 \leqslant 1 - |\varphi(z)|^2$ pour tout $z \in \mathbb{D}$.

2) En déduire, à l'aide du théorème de changement de variables et de l'exercice 3.93, que si $f \in \mathrm{H}^2(\mathbb{D})$, alors $f\circ\varphi \in \mathrm{H}^2(\mathbb{D})$ et $\|f\circ\varphi\|_{\mathrm{H}^2} \leqslant \sqrt{2}\,\|f\|_{\mathrm{H}^2}$.

10.47. Soit f une fonction holomorphe injective dans $\mathbb{D}$.

1) Montrer qu'on a $m(f(\mathbb{D})) = \int_{\mathbb{D}} |f'(z)|^2\, dm(z)$.

2) Exprimer $m(f(\mathbb{D}))$ à l'aide des coefficients de Taylor de f.

10.48. (Théorème de l'aire, lemme de Koebe.)

On note V la couronne $\{0 < |z| < 1\}$, et on pose

$$\mathcal{A} = \Big\{ h \in \mathcal{H}(\mathrm{V});\ h \text{ est injective et } \lim_{z\to 0} z\,h(z) = 1 \Big\}\ .$$

On pose également

$$\mathcal{S} = \big\{ f \in \mathcal{H}(\mathbb{D});\ f \text{ est injective, } f(0) = 0 \text{ et } f'(0) = 1 \big\}\ .$$

1) Soit $h \in \mathcal{A}$, $h(z) = \frac{1}{z} + \sum_0^\infty c_n z^n$.

a) Pour $r \in]0\,;1[$, on note γ_r le chemin $h \circ \partial\mathrm{D}(0,r)$. Montrer qu'on a

$$m\big(\mathbb{C}\backslash h\big[\mathbb{C}\backslash\overline{\mathrm{D}}(0,r)\big]\big) = -\frac{1}{2i}\int_{\gamma_r} \bar{z}\,dz = \pi\left(\frac{1}{r^2} - r^2\sum_1^\infty n|c_n|^2\right)\ .$$

b) En déduire l'inégalité

$$\sum_1^\infty n|c_n|^2 \leqslant 1\ .$$

2) Soit $f \in \mathcal{S}$, $f(z) = z + \sum_1^\infty a_n z^n$.

a) Montrer qu'il existe une fonction $g \in \mathcal{S}$ telle que $f(z^2) \equiv g(z)^2$.

b) En appliquant 1) à la fonction $z \mapsto 1/g(z)$, en déduire qu'on a

$$|a_2| \leqslant 2\ .$$

3) Soit $h \in \mathcal{A}$, et soient $w_1, w_2 \in \mathbb{C}$. On suppose que h ne prend pas les valeurs w_1, w_2. En utilisant 2), montrer qu'on a $|w_1 - w_2| \leqslant 4$.

4) Démontrer le **lemme de Koebe** : si $f \in \mathcal{S}$, alors $f(\mathbb{D})$ contient le disque $\mathrm{D}(0, 1/4)$.

10.49. Les notations sont les mêmes qu'à l'exercice précédent.

1) Décrire les fonctions $h \in \mathcal{A}$ vérifiant $|c_1| = 1$.

2) Décrire les $f \in \mathcal{S}$ vérifiant $|a_2| = 2$. Montrer que pour ces fonctions f, on a $|a_n| = n$ pour tout n.

3) Peut-on améliorer la constante $1/4$ dans le lemme de Koebe ?

10.50. Soit $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ vérifiant $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$. On suppose que f est bornée, et on pose $\mathrm{M} = \|f\|_\infty$.

1) Soit $b \in \mathbb{C}\backslash f(\mathbb{D})$, et soit h la détermination holomorphe de $\sqrt{1 - \frac{f(z)}{b}}$ vérifiant $h(0) = 1$.

a) Justifier l'existence de h, et donner les deux premiers termes de son développement en série entière.

b) Montrer qu'on a $\|h\|_\infty^2 \leqslant 1 + \frac{M}{|b|}$, et en déduire, à l'aide de *a*) et de la formule de Parseval, l'inégalité $|b| \geqslant 1/4M$.

2) Conclure que $f(\mathbb{D})$ contient le disque $D(0, 1/4M)$. Comparer avec le lemme de Koebe (exercice 10.48).

3) Le résultat est-il optimal pour $M = 1$?

10.51. (Théorème de Bloch.)

1) Soit f une fonction holomorphe au voisinage de $\overline{\mathbb{D}}$ et vérifiant $f'(0) = 1$.

a) Montrer que la fonction ω définie par $\omega(t) = t \sup\{|f'(z)|;\ |z| \leqslant 1 - t\}$ est continue sur $[0\,;1]$. En déduire l'existence de $t_0 > 0$ et d'un point $a \in \mathbb{D}$ tels que $|a| \leqslant 1 - t_0$, $|f'(a)| = 1/t_0$ et $|f'(z)| < 1/t$ pour $t < t_0$ et $|z| \leqslant 1 - t$.

b) Montrer qu'on a $|f'(z)| \leqslant 2/t_0$ dans le disque $D(a, t_0/2)$. En déduire que la fonction g définie par $g(z) = f(z) - f(a)$ vérifie $|g(z)| \leqslant 1$ dans $D(a, t_0/2)$.

c) En appliquant l'exercice précédent, montrer que $f(\mathbb{D})$ contient le disque $D(f(a), 1/16)$.

2) Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ vérifiant la propriété suivante : si $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$, alors $f(\mathbb{D})$ contient un disque de rayon $C|f'(0)|$.

10.52. Soit g une fonction entière non constante. En appliquant le théorème de Bloch (exercice précédent) à des fonctions du type $g(\lambda z + b)$, montrer que $g(\mathbb{C})$ contient des disques de rayons arbitrairement grands.

10.53. (Petit théorème de Picard.)

Le but de l'exercice est de montrer que si f une fonction entière telle que $\mathbb{C}\backslash f(\mathbb{C})$ contient au moins deux points, alors f est constante.

0) Montrer qu'on peut supposer que f ne prend pas les valeurs 0 et 1 ; c'est ce qu'on fait dans la suite.

1) Montrer qu'il existe une fonction entière g telle que

$$f(z) \equiv \exp\left[2i\pi(\operatorname{ch} g(z))^2\right],$$

où on a posé $\operatorname{ch} w = \frac{e^w + e^{-w}}{2}$.

2) Montrer que $g(\mathbb{C})$ ne rencontre pas l'ensemble

$$E = \left\{\pm \log\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) + 2ik\pi;\ n \in \mathbb{N},\ k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

3) Montrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que tout disque de rayon δ rencontre E.

4) Conclure en utilisant l'exercice précédent.

10.54. (Petit théorème de Picard, 2.)

Le but de l'exercice est de donner une preuve « géométrique » du théorème de Picard démontré à l'exercice précédent. On rappelle l'énoncé : *si f est une fonction entière non constante, alors $\mathbb{C} \setminus f(\mathbb{C})$ contient au plus deux points.*

A. Si U est un ouvert de $\mathbb{C}$, on appelle **métrique** sur U toute application $\rho : U \to \mathbb{R}$ positive, continue sur U et de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'ouvert $U^\rho = \{z \in U\,;\ \rho(z) \neq 0\}$.

1) Soient U_1, U_2 deux ouverts de $\mathbb{C}$. Constater que si $f : U_1 \to U_2$ est holomorphe et si ρ est une métrique sur U_2, alors l'application $f^*\rho$ définie par $f^*\rho(z) = |f'(z)|\,\rho(f(z))$ est une métrique sur U_1. On dit que $f^*\rho$ est l'**image réciproque** de ρ par f.

2) Si ρ est une métrique sur un ouvert $U \subset \mathbb{C}$, on définit la **courbure** de ρ en un point $z \in U^\rho$ par la formule

$$\kappa_\rho(z) = -\frac{\Delta \log \rho(z)}{\rho(z)^2} .$$

Montrer que la courbure est préservée par transformation holomorphe : si $f : U_1 \to U_2$ est holomorphe et si ρ est une métrique sur U_2, alors $\kappa_{f^*\rho}(z) \equiv \kappa_\rho(f(z))$.

3) La **métrique de Poincaré** est la métrique ρ_0 définie sur le disque unité $\mathbb{D}$ par

$$\rho_0(z) = \frac{1}{1-|z|^2} .$$

Calculer la courbure de cette métrique.

B. Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$, et soit ρ une métrique strictement positive sur U. On suppose qu'on a $\kappa_\rho(z) \leqslant -4$ pour tout $z \in U$. Le but de cette partie est de montrer que si $f : \mathbb{D} \to U$ est holomorphe, alors

$$f^*\rho(z) \leqslant \rho_0(z)$$

pour tout $z \in \mathbb{D}$, où ρ_0 est la métrique de Poincaré.

1) Pour $r \in]0;1[$, on pose $D_r = D(0,r)$ et $\rho_r = h_r^*\rho$, où $h_r : D_r \to \mathbb{D}$ est l'application $z \mapsto z/r$; autrement dit : $\rho_r(z) = \frac{r}{r^2-|z|^2}$. Quelle est la courbure de ρ_r en un point $z \in D_r$?

2) Soit $f : \mathbb{D} \to U$ holomorphe.

a) Montrer que pour tout $r \in]0;1[$, la fonction $v_r = \frac{f^*\rho}{\rho_r}$ possède un maximum sur le disque D_r. Si ce maximum est non nul, quel est le signe de $\Delta \log v_r$ en un point où il est atteint ?

b) Déduire de *a*) qu'on a $f^*\rho(z) \leqslant \rho_r(z)$ pour tout $r \in]0;1[$ et pour tout $z \in D_r$.

3) Conclure.

C. Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$, et soit ρ une métrique strictement positive sur U. On suppose qu'il existe une constante $B > 0$ telle que $\kappa_\rho(z) \leqslant -B$ pour tout $z \in U$. Le but de cette section est de montrer que toute fonction holomorphe $f : \mathbb{C} \to U$ est constante.

1) Soit $R > 0$. Montrer que si $f : D(0,R) \to U$ est holomorphe, alors

$$f^*\rho(z) \leqslant \frac{2}{\sqrt{B}} \frac{R}{R^2-|z|^2}$$

pour tout $z \in D(0,R)$.

2) Montrer que si $f : \mathbb{C} \to U$ est holomorphe, alors $f^*\rho \equiv 0$, et conclure.

D. Soit $U = \mathbb{C} \setminus \{0;1\}$, et soit ρ la métrique définie sur U par

$$\rho(z) = \left[\frac{(1+|z|^{1/3})^{1/2}}{|z|^{5/6}}\right] \times \left[\frac{(1+|z-1|^{1/3})^{1/2}}{|z-1|^{5/6}}\right] .$$

1) Calculer la courbure de ρ.

2) Déterminer les limites de κ_ρ en 0, 1 et ∞, et en déduire que κ_ρ est majorée par une constante strictement négative.

E. Démontrer le théorème de Picard.

10.55. On garde les notations de l'exercice précédent, et on note ρ la métrique de Poincaré sur $\mathbb{D}$, définie par

$$\rho(z) = \frac{1}{1-|z|^2} .$$

1) Montrer que ρ est invariante par les automorphismes de $\mathbb{D}$. En d'autres termes, montrer que si φ est un automorphisme de $\mathbb{D}$, alors $\varphi^*\rho = \rho$.

2) Si $\gamma : [a;b] \to \mathbb{D}$ est un chemin de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, on définit sa **longueur de Poincaré** par la formule

$$l_\rho(\gamma) = \int_a^b \rho(\gamma(t))\,|\gamma'(t)|\,dt .$$

On définit ensuite la **distance de Poincaré** entre deux points $p, q \in \mathbb{D}$ par

$$d_\rho(p,q) = \inf l_\rho(\gamma)$$

où la borne inférieure est prise sur tous les chemins de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux joignant p à q dans $\mathbb{D}$. Montrer que d_ρ est effectivement une distance sur $\mathbb{D}$, et que les automorphismes de $\mathbb{D}$ sont des isométries pour d_ρ.

3) *a*) Pour $r \in [0;1[$, on note $\gamma_r : [0;r] \to \mathbb{D}$ le chemin défini par $\gamma_r(t) = t$. Calculer la longueur de Poincaré de γ_r.

b) Soit $r \in [0;1[$. Montrer que si γ est un chemin de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux joignant p à q dans $\mathbb{D}$, alors $l_\rho(\gamma) \geqslant l_\rho(\mathrm{Re}(\gamma))$, et en déduire qu'on a $l_\rho(\gamma) \geqslant l_\rho(\gamma_r)$. Quelle est la distance de Poincaré entre 0 et r ?

c) Montrer que la distance de Poincaré entre deux points $p, q \in \mathbb{D}$ est donnée par

$$d_\rho(p,q) = \log\left(\frac{1+\left|\frac{p-q}{1-\overline{p}q}\right|}{1-\left|\frac{p-q}{1-\overline{p}q}\right|}\right) .$$

Chapitre 11
Fonctions harmoniques

Dans tout le chapitre, Ω est un ouvert de $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$. On rappelle que le symbole Δ désigne l'opérateur de Laplace $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ agissant sur les fonctions de classe $\mathcal{C}^2$.

11.1. Définition et propriétés élémentaires

Définition 11.1.1. *Une fonction $u : \Omega \to \mathbb{C}$ est dite* **harmonique** *sur Ω si u est de classe $\mathcal{C}^2$ et vérifie $\Delta u = 0$. On note $h(\Omega)$ l'ensemble des fonctions harmoniques sur Ω.*

Cette définition a un sens en dimension quelconque, mais on se limitera au cas de la dimension 2. Cela permettra en particulier de déduire certains résultats sur les fonctions harmoniques des résultats correspondants déjà démontrés pour les fonctions holomorphes.

Exemples. 1) L'identité $\Delta = 4\frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}}$ montre que toute fonction holomorphe est harmonique.

2) On vérifie par un calcul direct que la fonction $z \mapsto \log|z|$ est harmonique sur $\mathbb{C}^*$.

Proposition 11.1.2. *$h(\Omega)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^2(\Omega)$, stable par conjugaison.*

Preuve. Δ est linéaire et commute avec la conjugaison complexe.

Corollaire 11.1.3. *Une fonction est harmonique si et seulement si sa partie réelle et sa partie imaginaire le sont. En particulier, la partie réelle d'une fonction holomorphe est toujours une fonction harmonique.*

Corollaire 11.1.4. *Si f est holomorphe sur Ω et ne s'annule pas, alors $\log|f|$ est harmonique.*

Preuve. D'après la proposition 4.1.5, pour tout disque ouvert $D \subset \Omega$, on peut trouver une fonction g_D holomorphe dans D telle que $e^{g_D} \equiv f$ dans D ; on a alors $\log|f| \equiv \mathrm{Re}(g_D)$ dans D, ce qui prouve que $\log|f|$ est harmonique dans D. Ainsi, $\log|f|$ est harmonique au voisinage de chaque point de Ω, donc harmonique dans Ω.

Remarque 11.1.5. *Contrairement à $\mathcal{H}(\Omega)$, $h(\Omega)$ n'est pas une algèbre. Par exemple, les fonctions $z \mapsto z$ et $z \mapsto \bar{z}$ sont harmoniques, mais la fonction $z \mapsto |z|^2$ ne l'est pas car $\Delta|z|^2 \equiv 4$.*

Il n'est pas difficile de voir que la composée de deux fonctions harmoniques n'est en général pas harmonique. On a cependant le résultat suivant.

Proposition 11.1.6. *Soient V et V' deux ouverts de $\mathbb{C}$. Si $f : \mathrm{V} \to \mathrm{V}'$ est holomorphe et si u est une fonction harmonique sur V', alors $u \circ f$ est harmonique.*

Preuve. Il suffit de vérifier que si $u : \mathrm{V}' \to \mathbb{C}$ est de classe $\mathcal{C}^2$ et si $f : \mathrm{V} \to \mathrm{V}'$ est holomorphe, alors

$$\Delta(u \circ f) = |f'|^2 \times ((\Delta u) \circ f) \ .$$

Fixons u et f. Comme f est holomorphe, on a $\frac{\partial (u \circ f)}{\partial z} = f' \times (\frac{\partial u}{\partial z} \circ f)$, et comme f' est elle aussi holomorphe, on a $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}(f' \times (\frac{\partial u}{\partial z} \circ f)) = |f'|^2 \times (\frac{\partial^2 u}{\partial \bar{z} \partial z} \circ f)$. Ainsi, $\frac{\partial^2 (u \circ f)}{\partial \bar{z} \partial z} = |f'|^2 \times (\frac{\partial^2 u}{\partial \bar{z} \partial z} \circ f)$, ce qui termine la démonstration.

11.2. Harmonicité et holomorphie

On a vu à la section précédente que la partie réelle d'une fonction holomorphe est toujours harmonique. On va maintenant montrer qu'inversement, toute fonction harmonique réelle sur un ouvert simplement connexe est la partie réelle d'une fonction holomorphe.

Lemme 11.2.1. *Soit $u : \Omega \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. Pour une fonction $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, considérons les propriétés suivantes :*

(1) $\mathrm{Re}(f) - u$ *est constante ;*

(2) $f' = 2\,\dfrac{\partial u}{\partial z}$.

Alors (1) *entraîne* (2), *et la réciproque est vraie si Ω est connexe.*

Preuve. Si (1) est vérifiée, alors $\frac{\partial}{\partial z}(f + \overline{f}) = 2\,\frac{\partial u}{\partial z}$, autrement dit $f' = 2\,\frac{\partial u}{\partial z}$ car $\frac{\partial \overline{f}}{\partial z} = 0$. Inversement, supposons (2) vérifiée. On a alors $df = 2\,\frac{\partial u}{\partial z}\,dz$, donc également $d\overline{f} = 2\,\frac{\partial u}{\partial \bar{z}}\,d\bar{z}$ car u est réelle. On obtient ainsi $d(f + \overline{f}) = 2\,du$, autrement dit $d(\mathrm{Re}(f)) = du$. Si Ω est connexe, $\mathrm{Re}(f) - u$ est donc constante.

Corollaire 11.2.2. *Il n'existe pas de fonction $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^*)$ vérifiant $\mathrm{Re}(f(z)) \equiv \log|z|$.*

Preuve. Une telle fonction devrait vérifier $f'(z) \equiv \frac{\partial(\log|z|^2)}{\partial z} = \frac{1}{z}$, mais on sait que la fonction $z \mapsto \frac{1}{z}$ n'admet pas de primitive holomorphe sur $\mathbb{C}^*$.

Théorème 11.2.3. *Si Ω est simplement connexe, alors toute fonction harmonique réelle sur Ω est la partie réelle d'une fonction holomorphe. Une telle fonction holomorphe est unique à l'addition près d'une constante imaginaire pure.*

Preuve. Supposons Ω simplement connexe et fixons $u : \Omega \to \mathbb{R}$ harmonique. La fonction $\frac{\partial u}{\partial z}$ est holomorphe car $\frac{\partial^2 u}{\partial \bar{z} \partial z} = \frac{1}{4}\Delta u = 0$. Comme Ω est simplement connexe, on peut donc trouver une fonction $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ telle que $f' = 2\,\frac{\partial u}{\partial z}$. Quitte à rajouter une constante à f, on peut supposer qu'on a $\mathrm{Re}(f(0)) = u(0)$, et la fonction f répond alors à la question d'après le lemme précédent. Enfin, toujours d'après le lemme précédent, deux fonctions holomorphes sur Ω ayant u comme partie réelle ont la même dérivée – à savoir $2\,\frac{\partial u}{\partial z}$ – donc diffèrent d'une constante, nécessairement imaginaire pure.

Corollaire 11.2.4. *Toute fonction harmonique réelle est localement la partie réelle d'une fonction holomorphe.*

Corollaire 11.2.5. *Toute fonction harmonique est de classe $\mathcal{C}^\infty$. De plus, les dérivées partielles d'une fonction harmonique sont également harmoniques.*

Preuve. La première partie découle immédiatement du corollaire précédent, et la deuxième partie vient du fait que si $u \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$, alors $\Delta(\partial^{\mathbf{k}} u) = \partial^{\mathbf{k}}(\Delta u)$ pour tout biindice $\mathbf{k} \in \mathbb{N}^2$.

Corollaire 11.2.6. *Soit* D *un disque ouvert centré en* 0. *Une fonction $u : \mathrm{D} \to \mathbb{C}$ est harmonique si et seulement si on peut écrire*

$$u(z) = \sum_0^\infty a_n z^n + \sum_0^\infty b_n \bar{z}^n$$

où les deux séries convergent normalement sur les compacts de D.

Preuve. Une fonction admet un développement de ce genre si et seulement si elle est de la forme $\mathrm{F} + \overline{\mathrm{G}}$, où F et G sont holomorphes dans D ; et d'après le théorème 11.2.3, une fonction est harmonique dans D si et seulement si elle s'écrit $f + \overline{f} + i(g + \overline{g})$, où f et g sont holomorphes. Le résultat s'en déduit sans difficulté.

11.3. Analyticité ; principe du prolongement analytique

Définition 11.3.1. *On dit qu'une fonction $u : \Omega \to \mathbb{C}$ est $\mathbb{R}$-analytique si, pour tout point $(x_0, y_0) \in \Omega$, on peut trouver un voisinage V de (x_0, y_0) et une famille de nombres complexes $(c_{pq})_{p,q\in\mathbb{N}}$ tels que pour tout $(x, y) \in \mathrm{V}$, on puisse écrire*

$$u(x, y) = \sum_{p,q} c_{pq}(x - x_0)^p (y - y_0)^q ,$$

où la série double converge normalement sur les compacts de V.

Comme l'harmonicité, la $\mathbb{R}$-analyticité peut être définie en dimension quelconque, mais on se limitera là encore au cas de la dimension 2.

Le lemme suivant est l'analogue du lemme d'Abel pour les séries entières.

Lemme 11.3.2. *Soit (c_{pq}) une suite double de nombres complexes, et soient $r, s > 0$. Si la suite $(c_{pq} r^p s^q)$ est bornée, alors la série $\sum c_{pq}(x - x_0)^p (y - y_0)^q$ et toutes ses séries dérivées convergent normalement sur tout compact du rectangle ouvert*

$$\mathrm{U} = \{(x, y);\ |x - x_0| < r\ ,\ |y - y_0| < s\} .$$

La preuve est laissée en exercice.

Corollaire 11.3.3. *Si on peut écrire*

$$u(x, y) = \sum_{p,q} c_{pq}(x - x_0)^p (y - y_0)^q,$$

où la série converge en tout point d'un certain voisinage de $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, alors la fonction u est de classe C^∞ au voisinage de (x_0, y_0) et on a

$$c_{pq} = \frac{1}{p!q!} \frac{\partial^{p+q} u}{\partial x^p \partial y^q}(x_0, y_0)$$

pour tout $(p, q) \in \mathbb{N}^2$.

Preuve. Comme tout voisinage de (x_0, y_0) contient un rectangle centré en (x_0, y_0), le résultat découle du lemme et du théorème usuel de dérivation terme à terme des séries de fonctions.

Corollaire 11.3.4. *Toute fonction $\mathbb{R}$-analytique est de classe C^∞.*

Montrons maintenant l'analyticité des fonctions harmoniques.

Proposition 11.3.5. *Toute fonction harmonique est $\mathbb{R}$-analytique.*

Preuve. Il suffit de montrer que si u est harmonique au voisinage de 0, alors u admet un développement de la forme $u(x,y) = \sum_{p,q} c_{pq} x^p y^q$ au voisinage de $(0,0)$; fixons u.

D'après le corollaire 11.2.6, on peut écrire $u(z) = \sum_0^\infty a_n z^n + \sum_0^\infty b_n \bar{z}^n$, où les deux séries convergent normalement sur les compacts d'un certain disque $\mathrm{D}(0,r)$.

En écrivant $z = x + iy$, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{cases} z^n &= \sum_0^n \mathrm{C}_n^k \, x^k (iy)^{n-k} \\ \bar{z}^n &= \sum_0^n \mathrm{C}_n^k \, x^k (-iy)^{n-k} \end{cases}$$

On a également $\sum_0^n \mathrm{C}_n^k \, |x|^k |y|^{n-k} = (|x| + |y|)^n$, et donc

$$\sum_0^\infty |a_n| \sum_0^n \mathrm{C}_n^k \, |x|^k |y|^{n-k} + \sum_0^\infty |b_n| \sum_0^n \mathrm{C}_n^k \, |x|^k |y|^{n-k} < +\infty$$

si $|x| + |y| < r$. D'après le théorème de sommation par paquets pour les séries doubles, on en déduit que pour $z = x + iy$ vérifiant $|x| + |y| < r$, on peut écrire

$$u(z) = \sum_{p,q=0}^\infty a_{p+q} \frac{(p+q)!}{p!\,q!} x^p (iy)^q + \sum_{p,q=0}^\infty b_{p+q} \frac{(p+q)!}{p!\,q!} x^p (-iy)^q \ ,$$

où les deux séries doubles convergent normalement sur les compacts de $\mathrm{V} = \{|x| + |y| < r\}$. En regroupant les deux séries, on obtient $u(z) = \sum_{p,q} c_{pq} x^p y^q$, avec

$$c_{pq} = \frac{(p+q)!}{p!\,q!} \left(i^q a_{p+q} + (-i)^q b_{p+q}\right) \ .$$

Corollaire 11.3.6. (Principe du prolongement analytique.)

a) *Soit u une fonction harmonique sur un ouvert connexe. Si u et toutes ses dérivées partielles s'annulent en un même point z_0, alors $u = 0$.*

b) *Si u est harmonique sur un ouvert connexe et si $u \equiv 0$ sur un ouvert non vide V, alors $u = 0$.*

Preuve. Pour démontrer **a**, on procède exactement comme pour les fonctions holomorphes, en montrant que l'ensemble $\mathrm{A} = \left\{z \, ; \, \forall \mathbf{k} \in \mathbb{N}^2 \ \partial^{\mathbf{k}} u(z) = 0\right\}$ est à la fois ouvert et fermé dans l'ouvert considéré. La partie **b** est une conséquence de **a**.

Autre preuve de **b**. La fonction $\frac{\partial u}{\partial z}$ est holomorphe car u est harmonique, et elle est nulle sur V ; d'après le principe du prolongement analytique pour les fonctions holomorphes, on a donc $\frac{\partial u}{\partial z} = 0$. De même, $\frac{\partial \overline{u}}{\partial z} = 0$, et donc $\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} = 0$. Ainsi, $du = \frac{\partial u}{\partial z}\,dz + \frac{\partial u}{\partial \bar{z}}\,d\bar{z} = 0$, donc u est constante ; et comme $u \equiv 0$ sur V, on a $u = 0$.

Remarque 11.3.7. *Le principe des zéros isolés n'est pas vrai pour une fonction harmonique : par exemple, la fonction $z \mapsto \mathrm{Re}(z)$ s'annule sur tout l'axe imaginaire. On peut même montrer qu'une fonction harmonique réelle ne possède aucun zéro isolé (voir l'exercice* 11.17*).*

11.4. Propriété de la moyenne ; principe du maximum

Théorème 11.4.1. *Les fonctions harmoniques possèdent la propriété de la moyenne : si u est harmonique au voisinage d'un disque $\overline{\mathrm{D}}(z_0, r)$, alors*

$$u(z_0) = \int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{i\theta})\,\frac{d\theta}{2\pi}\,.$$

Preuve. En considérant séparément partie réelle et partie imaginaire, on se ramène au cas des fonctions harmoniques réelles ; fixons u harmonique réelle sur Ω.

Soit $\overline{\mathrm{D}} = \overline{\mathrm{D}}(z_0, r)$ un disque fermé contenu dans Ω, et soit D' un disque ouvert tel que $\overline{\mathrm{D}} \subset \mathrm{D}' \subset \Omega$. D'après le théorème 11.2.3, il existe une fonction $f \in \mathcal{H}(\mathrm{D}')$ telle que $\mathrm{Re}(f) \equiv u$ dans D'. Comme f possède la propriété de la moyenne, on a donc

$$u(z_0) = \mathrm{Re}(f(z_0)) = \mathrm{Re}\left(\int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta})\,\frac{d\theta}{2\pi}\right) = \int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{i\theta})\,\frac{d\theta}{2\pi}\,.$$

Corollaire 11.4.2. *Les fonctions harmoniques possèdent la* **propriété de la moyenne pour les disques** *: si u est harmonique au voisinage d'un disque $\overline{\mathrm{D}} = \overline{\mathrm{D}}(z_0, r) \subset \Omega$, alors*

$$u(z_0) = \frac{1}{m(\mathrm{D})} \int_{\mathrm{D}} u\,dm\,.$$

Preuve. La démonstration est identique à celle donnée pour les fonctions holomorphes : on intègre en coordonnées polaires.

Comme on l'a vu au chapitre 4, les fonctions vérifiant la propriété de sous-moyenne satisfont au principe du maximum. Pour les fonctions harmoniques – comme pour les fonctions holomorphes – on peut en dire un peu plus grâce au lemme suivant.

Lemme 11.4.3. *Si Ω est connexe, alors une fonction $u \in h(\Omega)$ est constante si et seulement si $|u|$ est constant.*

Preuve. Si $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$, alors $\Delta|u|^2 = 4\,\frac{\partial^2(|u|^2)}{\partial z \partial \bar{z}} = 4|\frac{\partial u}{\partial z}|^2 + 2\,\mathrm{Re}(u\,\Delta u) + 4|\frac{\partial u}{\partial \bar{z}}|^2$. Si u est de plus harmonique, on obtient donc

$$\Delta|u|^2 = 4\left(\left|\frac{\partial u}{\partial z}\right|^2 + \left|\frac{\partial u}{\partial \bar{z}}\right|^2\right) \cdot$$

On en déduit que si $|u|$ est constant, alors $\frac{\partial u}{\partial z}$ et $\frac{\partial u}{\partial \bar{z}}$ sont toutes les deux identiquement nulles, et donc u elle-même est constante. La réciproque est évidente.

Proposition 11.4.4. *Si u est harmonique sur un ouvert connexe et si $|u|$ admet un maximum local, alors u est constante. La même conclusion vaut si u est harmonique réelle et admet un maximum local.*

Preuve. Compte tenu du lemme précédent, la proposition 4.8.2 entraîne que dans un cas comme dans l'autre, la fonction u est constante au voisinage du point où le maximum local est atteint. Pour conclure, il suffit donc d'appliquer le principe du prolongement analytique.

Théorème 11.4.5. (Principe du maximum.)
Supposons Ω borné. Si $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{C}$ est continue sur $\overline{\Omega}$ et harmonique dans Ω, alors

$$|u(z)| \leqslant \sup\{|u(\zeta)|\,;\ \zeta \in \partial\Omega\}$$

pour tout $z \in \Omega$, avec inégalité stricte si Ω est connexe et si u n'est pas constante. Si u est réelle, le même résultat vaut en remplaçant $|u|$ par u.

Preuve. Compte tenu du lemme 11.4.3, cela découle du théorème 4.8.6 appliqué à $|u|$ dans le premier cas et à u dans le second cas.

Corollaire 11.4.6. *Si Ω est borné et si $u, v : \overline{\Omega} \to \mathbb{C}$ sont continues sur $\overline{\Omega}$, harmoniques dans Ω et coïncident sur $\partial\Omega$, alors $u \equiv v$ sur $\overline{\Omega}$.*

Preuve. On applique le principe du maximum à $u - v$.

11.5. Formule de Poisson

Dans cette section, on démontre la **formule de Poisson**, qui joue dans l'étude des fonctions harmoniques le même rôle que la formule de Cauchy dans l'étude des fonctions holomorphes.

11.5.1. Noyau de Poisson

Définition 11.5.1. *Le* **noyau de Poisson** *du disque unité* $\mathbb{D}$ *est la fonction* $\mathrm{P}_{\mathbb{D}} : \mathbb{D} \times \partial\mathbb{D} \to \mathbb{R}$ *définie par*

$$\mathrm{P}_{\mathbb{D}}(z,\zeta) = \frac{1-|z|^2}{|\zeta - z|^2} \cdot$$

Pour $a \in \mathbb{D}$, *on notera* P_a *la fonction définie sur* $\mathbb{T} = \partial\mathbb{D}$ *par* $\mathrm{P}_a(\zeta) = \mathrm{P}_{\mathbb{D}}(a,\zeta)$.

Le lemme suivant donne trois expressions différentes du noyau de Poisson.

Lemme 11.5.2. **a)** *Pour tout point* $a \in \mathbb{D}$, *on a*

$$\mathrm{P}_a = \frac{|k_a|^2}{\|k_a\|_2^2} = \left(1-|a|^2\right)|k_a|^2 \ ,$$

où k *est le noyau de Cauchy du disque unité, et* $\| \ \|_2$ *est la norme de* $\mathrm{L}^2(\mathbb{T})$.

b) *Si* $a \in \mathbb{D}$, *alors, en notant* ψ_a *l'automorphisme de* $\mathbb{S}_2$ *défini par* $\psi_a(z) = \frac{a-z}{1-\overline{a}z}$, *on a*

$$\mathrm{P}_a(\zeta) = |\psi_a'(\zeta)|$$

pour tout $\zeta \in \partial\mathbb{D}$.

c) *Si* $r \in [0\,;1[$, *alors*

$$\mathrm{P}_r(e^{it}) \equiv \frac{1-r^2}{1-2r\cos t + r^2} \equiv \sum_{-\infty}^{+\infty} r^{|n|} e^{int} \ ,$$

où la série converge normalement sur $\mathbb{R}$. *En particulier,* $\hat{\mathrm{P}}_r(n) = r^{|n|}$ *pour tout* $n \in \mathbb{Z}$.

Preuve. Comme $k(a,\zeta) \equiv \frac{1}{1-\overline{\zeta}a}$, on a $|k_a(\zeta)|^2 \equiv \frac{1}{|\zeta-a|^2}$ et donc $\mathrm{P}_a = (1-|a|^2)|k_a|^2$. D'autre part, comme la fonction f définie par $f(\zeta) = \frac{1}{1-\overline{a}\zeta}$ est holomorphe au voisinage de $\overline{\mathbb{D}}$, on a (d'après la proposition 3.8.4)

$$\frac{1}{1-|a|^2} = f(a) = \langle f_{|\mathbb{T}}, k_a\rangle = \langle k_a, k_a\rangle \, ,$$

où $\langle \ , \ \rangle$ est le produit scalaire usuel sur $\mathrm{L}^2(\mathbb{T})$. Cela prouve **a**.

La partie **b** est laissée en exercice.

Si $r \in [0\,;1[$, alors la série $\sum_{n\in\mathbb{Z}} r^{|n|}e^{int}$ converge normalement sur $\mathbb{R}$, et la somme de cette série vaut $\frac{re^{-it}}{1-re^{-it}} + 1 + \frac{re^{it}}{1-re^{it}}$. En réduisant au même dénominateur, on trouve

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} r^{|n|} e^{int} = \frac{1-r^2}{1-2r\cos t + r^2} = \mathrm{P}_r(e^{it}) \ ,$$

ce qui prouve **c**.

Définition 11.5.3. *Si Δ est un disque quelconque, $\Delta = \mathrm{D}(z_0, \mathrm{R})$, le noyau de Poisson de Δ est la fonction $\mathrm{P}_\Delta : \Delta \times \partial\Delta \to \mathbb{R}$ définie par*

$$\mathrm{P}_\Delta(z,\zeta) = \mathrm{P}_{\mathbb{D}}\left(\frac{z-z_0}{\mathrm{R}}, \frac{\zeta - z_0}{\mathrm{R}}\right) = \frac{\mathrm{R}^2 - |z-z_0|^2}{|\zeta - z|^2} \ .$$

Pour $a \in \Delta$, on notera P_a l'application $\zeta \mapsto \mathrm{P}_\Delta(a,\zeta)$.

11.5.2. Formule de Poisson

Dans ce qui suit, $\Delta = \mathrm{D}(z_0, \mathrm{R})$ est un disque de $\mathbb{C}$, et on note σ la mesure de Lebesgue normalisée sur $\partial\Delta$, c'est-à-dire la mesure de longueur divisée par $2\pi\mathrm{R}$.

Théorème 11.5.4. (Formule de Poisson.)
Si $u : \overline{\Delta} \to \mathbb{C}$ est continue sur $\overline{\Delta}$ et harmonique dans Δ, alors, pour tout point $a \in \Delta$, on a

$$u(a) = \int_{\partial\Delta} \mathrm{P}_a(\zeta)\, u(\zeta)\, d\sigma(\zeta) \ .$$

On va donner 4 démonstrations différentes de ce résultat. La première est une application de la formule de Cauchy. La deuxième réduit le résultat à la formule de la moyenne par un changement de variable homographique. La troisième traduit la formule à démontrer sous la forme d'une famille d'équations de convolution et utilise le développement en série des fonctions harmoniques (corollaire 11.2.6). La quatrième, plus « abstraite », repose sur le principe du maximum et sur le théorème de Hahn-Banach.

Par translation et dilatation, on se ramène au cas du disque unité $\mathbb{D}$.

Première preuve. Il suffit de démontrer le résultat pour une fonction holomorphe au voisinage de $\overline{\mathbb{D}}$. En effet, comme $\mathrm{P}_{\mathbb{D}}$ est une fonction réelle, le théorème 11.2.3 montre que si la formule de Poisson est valable pour toute fonction holomorphe au voisinage de $\overline{\mathbb{D}}$, alors elle est également valable pour toute fonction réelle harmonique au voisinage de $\overline{\mathbb{D}}$. On passe au cas d'une fonction complexe harmonique au voisinage de $\overline{\mathbb{D}}$ en considérant partie réelle et partie imaginaire. Enfin, dans le cas où u est seulement continue sur $\overline{\mathbb{D}}$ et harmonique dans $\mathbb{D}$, on l'approxime par les fonctions u_r $(r < 1)$ définies par $u_r(z) = u(rz)$. Ces fonctions

sont harmoniques au voisinage de $\overline{\mathbb{D}}$, et elles tendent vers u uniformément sur $\overline{\mathbb{D}}$ quand r tend vers 1 car u est uniformément continue sur $\overline{\mathbb{D}}$; par conséquent, si la formule de Poisson est valable pour les u_r, elle est également valable pour u.

Soit donc f holomorphe au voisinage de $\overline{\mathbb{D}}$, et posons $\mathbf{f} = f_{|\partial\mathbb{D}}$; fixons également $a \in \mathbb{D}$.

La fonction $\zeta \mapsto \frac{f(\zeta)}{1-\overline{a}\zeta}$ est holomorphe au voisinage de $\overline{\mathbb{D}}$. D'après la proposition 3.8.4 , on a donc

$$\frac{f(a)}{1-|a|^2} = \langle \mathbf{f}k_a, k_a \rangle = \int_{\partial\mathbb{D}} f(\zeta)\,|k_a(\zeta)|^2\,d\sigma(\zeta)\ .$$

Comme on a de plus $\mathrm{P}_a = (1-|a|^2)|k_a|^2$, cela termine la démonstration.

Deuxième preuve. L'argument d'approximation employé dans la première démonstration permet de se ramener au cas d'une fonction u harmonique au voisinage de $\overline{\mathbb{D}}$; fixons u, et fixons également $a \in \mathbb{D}$.

Soit ψ_a l'automorphisme de $\mathbb{S}_2$ défini par $\psi_a(z) = \frac{a-z}{1-\overline{a}z}$. Comme ψ_a est holomorphe et envoie $\overline{\mathbb{D}}$ dans $\overline{\mathbb{D}}$, la fonction $v = u \circ \psi_a$ est harmonique au voisinage de $\overline{\mathbb{D}}$ d'après la proposition 11.1.6, et $v(0) = u(a)$. D'après la formule de la moyenne, on a donc

$$u(a) = \int_0^{2\pi} u\left(\psi_a(e^{i\theta})\right)\ \frac{d\theta}{2\pi}\ .$$

Comme ψ_a est un automorphisme de $\mathbb{S}_2$ qui envoie $\partial\mathbb{D}$ sur $\partial\mathbb{D}$, on peut écrire $\psi_a(e^{i\theta}) = e^{it} = e^{i\varphi(\theta)}$, où φ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $]0\,;2\pi[$ sur $]0\,;2\pi[$. Comme de plus $\psi_a^{-1} = \psi_a$, on a $e^{i\theta} = \psi_a(e^{it})$, d'où $e^{i\theta}d\theta = \psi_a'(e^{it})e^{it}dt$ et donc $|d\theta| = |\psi_a'(e^{it})|\,|dt|$. Le théorème de changement de variables permet donc d'écrire

$$u(a) = \int_0^{2\pi} u(e^{it})\,\left|\psi_a'(e^{it})\right|\ \frac{dt}{2\pi}\ .$$

Comme $|\psi_a'(e^{it})| = \mathrm{P}_a(e^{it})$ d'après le lemme 11.5.2, cela termine la démonstration.

Troisième preuve. Pour $z = re^{it} \in \mathbb{D}$, on a $\mathrm{P}_{\mathbb{D}}(z,\zeta) = \mathrm{P}_{\mathbb{D}}(re^{it}, e^{i\theta}) = \mathrm{P}_r(e^{i(t-\theta)})$. On en déduit que si $\mathbf{u}$ est une fonction intégrable sur $\mathbb{T}$ et si $z = re^{it} \in \mathbb{D}$, alors

$$\int_{\partial\mathbb{D}} \mathbf{u}(\zeta)\,\mathrm{P}_{\mathbb{D}}(z,\zeta)\,d\sigma(\zeta) = \int_0^{2\pi} \mathbf{u}\left(e^{i\theta}\right)\mathrm{P}_r\left(e^{i(t-\theta)}\right)\frac{d\theta}{2\pi} = \mathrm{P}_r * \mathbf{u}\left(e^{it}\right)\ .$$

D'autre part, le lemme 11.5.2 permet d'écrire

$$\mathrm{P}_r * \mathbf{u}\left(e^{it}\right) = \sum_{-\infty}^{+\infty} r^{|n|}\hat{\mathbf{u}}(n)e^{int}\ ,$$

où la série converge normalement sur $\mathbb{R}$. Il s'agit donc de montrer que si $u : \overline{\mathbb{D}} \to \mathbb{C}$ est continue sur $\overline{\mathbb{D}}$ et harmonique dans $\mathbb{D}$, alors

$$u(re^{it}) \equiv \sum_{-\infty}^{+\infty} r^{|n|} \hat{\mathbf{u}}(n) e^{int} ,$$

où $\mathbf{u}$ est la restriction de u à $\mathbb{T} = \partial\mathbb{D}$. De plus, par l'argument d'approximation habituel, il suffit de traiter le cas d'une fonction u harmonique au voisinage de $\overline{\mathbb{D}}$. Fixons u, et pour $r \leqslant 1$, posons $\mathbf{u}_r(t) = u(re^{it})$.

D'après le corollaire 11.2.6, on peut écrire $u(z) = \sum_1^\infty c_{-n}\bar{z}^n + c_0 + \sum_1^\infty c_n z^n$, où les deux séries convergent normalement sur $\overline{\mathbb{D}}$. On a donc $\mathbf{u}_r(t) = \sum_1^\infty c_{-n} r^n e^{-int} + c_0 + \sum_1^\infty c_n r^n e^{int}$ pour tout $r \leqslant 1$, ce qui peut encore s'écrire $\mathbf{u}_r(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n r^{|n|} e^{int}$. Comme la série converge normalement sur $\mathbb{R}$, on a $\hat{\mathbf{u}}_r(n) = c_n r^{|n|}$ pour tout $r \leqslant 1$ et pour tout n. En particulier, $c_n = \hat{\mathbf{u}}_1(n) = \hat{\mathbf{u}}(n)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$, et on obtient donc bien $\mathbf{u}_r(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} r^{|n|} \hat{\mathbf{u}}(n) e^{int}$.

Quatrième preuve. Notons E l'ensemble des fonctions $u : \overline{\mathbb{D}} \to \mathbb{C}$ continues sur $\overline{\mathbb{D}}$ et harmoniques dans $\mathbb{D}$, et notons $\mathbf{E}$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}(\mathbb{T})$ constitué par les restrictions à $\mathbb{T}$ des éléments de E. On verra plus tard qu'on a en fait $\mathbf{E} = \mathcal{C}(\mathbb{T})$, mais on n'en a pas besoin ici. D'après le principe du maximum (corollaire 11.4.6), une fonction $\mathbf{u} \in \mathbf{E}$ admet un *unique* prolongement $u \in \mathrm{E}$.

Fixons $a \in \mathbb{D}$. D'après le principe du maximum, l'application $\mathbf{u} \mapsto u(a)$ est une forme linéaire continue sur $(\mathbf{E}, \| \ \|_\infty)$. D'après le théorème de Hahn-Banach, il existe donc une mesure de Radon μ_a sur $\mathbb{T}$ telle que $u(a) = \langle \mu_a , \mathbf{u} \rangle$ pour toute fonction $u \in \mathrm{E}$, où $\mathbf{u}$ est la restriction de u à $\mathbb{T}$.

Notons z la fonction $\overline{\mathbb{D}} \ni z \mapsto z$, et $\mathbf{z}$ sa restriction à $\mathbb{T}$. Les fonctions z^n et $\bar{z}^n$ appartiennent à E, donc $a^n = \langle \mu_a , \mathbf{z}^n \rangle$ et $\overline{a}^n = \langle \mu_a , \overline{\mathbf{z}}^n \rangle$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Autrement dit, les coefficients de Fourier de la mesure μ_a sont donnés par

$$\begin{cases} \hat{\mu}_a(n) = \overline{a}^n & n > 0 \\ \hat{\mu}_a(0) = 1 & \\ \hat{\mu}_a(-n) = a^n & n > 0 \end{cases}$$

Comme $|a| < 1$, les séries $\sum a^n \overline{\zeta}^n$ et $\sum \overline{a}^n \zeta^n$ convergent normalement sur $\mathbb{T}$; et comme une mesure sur $\mathbb{T}$ est entièrement déterminée par ses coefficients de Fourier (par densité des polynômes trigonométriques dans $\mathcal{C}(\mathbb{T})$), on en déduit qu'on a $\mu_a = \mathbf{P}_a \sigma$, où $\mathbf{P}_a$ est la fonction continue définie sur $\mathbb{T}$ par

$$\mathbf{P}_a(\zeta) = \sum_1^\infty a^n \overline{\zeta}^n + 1 + \sum_1^\infty \overline{a}^n \zeta^n .$$

On a $\mathbf{P}_a(\zeta) = \frac{a\overline{\zeta}}{1-a\overline{\zeta}} + 1 + \frac{\overline{a}\zeta}{1-\overline{a}\zeta}$, d'où $\mathbf{P}_a(\zeta) = \frac{1-|a|^2}{|1-\overline{a}\zeta|^2} = \mathrm{P}_a(\zeta)$ après réduction au même dénominateur. On obtient donc

$$u(a) = \int_{\partial\mathbb{D}} u(\zeta)\mathrm{P}_a(\zeta)\, d\sigma(\zeta)$$

pour toute fonction $u \in \mathrm{E}$ et pour tout point $a \in \mathbb{D}$, ce qui termine la démonstration.

Remarque 11.5.5. *En prenant $a = z_0$ dans la formule de Poisson, on retrouve la formule de la moyenne car $\mathrm{P}_{z_0} \equiv 1$.*

11.6. Inégalités de Cauchy, inégalités de Harnack

11.6.1. Inégalités de Cauchy

La formule de Poisson permet de montrer que les fonctions harmoniques vérifient des « inégalités de Cauchy » analogues à celles déjà obtenues pour les fonctions holomorphes.

Théorème 11.6.1. *Si K est un compact de Ω et si V est un voisinage compact de K, alors, pour tout $\mathbf{k} \in \mathbb{N}^2$, il existe une constante $\mathrm{C}_\mathbf{k}$ telle que pour toute fonction u harmonique sur Ω, on ait*

$$\sup_{\mathrm{K}} |\partial^\mathbf{k} u| \leqslant \mathrm{C}_\mathbf{k} \sup_{\mathrm{V}} |u| .$$

Preuve. Si $\overline{\Delta} \subset \Omega$ est un disque fermé quelconque, alors, pour tout $\zeta \in \partial\Delta$, l'application $\mathrm{P}^\zeta : z \mapsto \mathrm{P}_\Delta(z,\zeta)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et toutes ses dérivées partielles dépendent continûment de $(z,\zeta) \in \Delta \times \partial\Delta$. On en déduit que si u est une fonction harmonique sur Ω, alors on peut dériver sous l'intégrale dans la formule de Poisson, ce qui donne $\partial^\mathbf{k} u(z) = \int_{\partial\Delta} \partial^\mathbf{k}\mathrm{P}^\zeta(z)\, u(\zeta)\, d\sigma(\zeta)$ pour tout $z \in \Delta$ et pour tout $\mathbf{k} \in \mathbb{N}^2$. En notant a le centre du disque Δ, on a donc $|\partial^\mathbf{k} u(a)| \leqslant \mathrm{C}(\mathbf{k},\Delta) \sup_{\partial\Delta} |u|$, où $\mathrm{C}(\mathbf{k},\Delta) = \sup_{\partial\Delta} |\partial^\mathbf{k}\mathrm{P}^\zeta(a)|$. De plus, par définition de P_Δ, la constante $\mathrm{C}(\mathbf{k},\Delta)$ ne dépend en fait que (de $\mathbf{k}$ et) du rayon du disque Δ.

Si maintenant K est un compact de Ω et si V est un voisinage de K, alors on peut trouver $r > 0$ tel que pour tout $a \in \mathrm{K}$, le disque $\overline{\Delta}_a = \overline{\mathrm{D}}(a,r)$ est contenu dans V. Le résultat suit.

Corollaire 11.6.2. *Si (u_n) est une suite de fonctions harmoniques qui converge uniformément sur les compacts de Ω vers une fonction u, alors*

u est harmonique et toutes les dérivées partielles des u_n convergent vers les dérivées de u correspondantes.

Preuve. D'après les inégalités de Cauchy, la convergence uniforme des u_n sur les compacts entraîne la convergence uniforme de toutes leurs dérivées partielles sur les compacts. Par conséquent, u est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et $\partial^{\mathbf{k}} u_n$ tend vers $\partial^{\mathbf{k}} u$ uniformément sur les compacts pour tout $\mathbf{k} \in \mathbb{N}^2$. En particulier, on a $\Delta u = \lim_n \Delta u_n = 0$.

Corollaire 11.6.3. *Si (u_n) est une suite de fonctions harmoniques sur Ω uniformément bornée sur tout compact, alors (u_n) admet une sous-suite qui converge uniformément sur tout compact vers une fonction harmonique.*

Preuve. On procède exactement comme pour le théorème de Montel.

11.6.2. Inégalités de Harnack

Les inégalités de Harnack concernent les fonctions harmoniques **positives**.

Théorème 11.6.4. (Inégalités de Harnack.)
Si u est une fonction harmonique positive dans un disque $\mathrm{D}(z_0, \mathrm{R})$, alors, pour tout $r < \mathrm{R}$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a

$$\frac{\mathrm{R}-r}{\mathrm{R}+r}\, u(z_0) \leqslant u(z_0 + re^{it}) \leqslant \frac{\mathrm{R}+r}{\mathrm{R}-r}\, u(z_0)\ .$$

Preuve. Fixons u, r et t, et choisissons également s vérifiant $r < s < \mathrm{R}$. D'après la formule de Poisson appliquée dans le disque $\overline{\mathrm{D}}(z_0, s)$, on a

$$u(z_0 + re^{it}) = \int_0^{2\pi} \frac{s^2 - r^2}{|se^{it} - re^{i\theta}|^2}\, u(z_0 + se^{i\theta})\, \frac{d\theta}{2\pi}\ .$$

Comme $s - r \leqslant |re^{it} - se^{i\theta}| \leqslant s + r$, on a

$$\frac{s-r}{s+r} \leqslant \frac{s^2 - r^2}{|se^{i\theta} - re^{i\theta}|^2} \leqslant \frac{s+r}{s-r}$$

pour tout $\theta \in [0\,;2\pi]$; et comme $u \geqslant 0$, on en déduit

$$\frac{s-r}{s+r} \int_0^{2\pi} u(z_0 + se^{i\theta})\, \frac{d\theta}{2\pi} \leqslant u(z_0 + re^{it}) \leqslant \frac{s+r}{s-r} \int_0^{2\pi} u(z_0 + se^{i\theta})\, \frac{d\theta}{2\pi}\ .$$

Comme $\int_0^{2\pi} u(z_0 + se^{i\theta})\, \frac{d\theta}{2\pi} = u(z_0)$ pour tout s, on obtient donc la conclusion souhaitée en faisant tendre s vers R.

Corollaire 11.6.5. *Si $u : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ est harmonique et bornée supérieurement ou inférieurement, alors u est constante.*

Preuve. En considérant $\sup_{\mathbb{C}} u - u$ ou $u - \inf_{\mathbb{C}} u$, on se ramène à prouver que si u est une fonction harmonique positive sur $\mathbb{C}$, alors u est constante ; fixons u. D'après les inégalités de Harnack, on a $u(z) \leqslant \frac{R-|z|}{R+|z|} u(0)$ pour tout $z \in \mathbb{C}$ et pour tout $R > |z|$. En faisant tendre R vers l'infini, on en déduit que u admet un maximum en 0. D'après le principe du maximum, cela prouve que u est constante.

Autre preuve. Comme précédemment, on se ramène au cas d'une fonction positive ; soit donc u harmonique positive sur $\mathbb{C}$. Fixons $a, b \in \mathbb{C}$ et posons $\delta = |b - a|$.

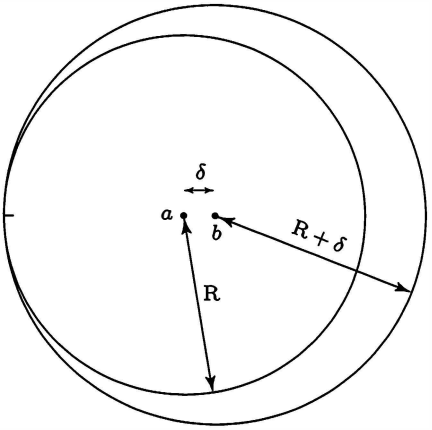


FIG. 49.

Pour tout R>0, le disque D(*a*,R) est contenu dans le disque D(*b*,R+δ). Comme u est positive, on a donc $\int_{D(a,R)} u\, dm \leqslant \int_{D(b,R+\delta)} u\, dm$, et d'après la formule de la moyenne, on en déduit

$$u(a) \leqslant \left(\frac{R+\delta}{R}\right)^2 u(b)$$

pour tout $R > 0$. En faisant tendre R vers l'infini, on obtient $u(a) \leqslant u(b)$, d'où $u(a) = u(b)$ par symétrie. Comme a et b sont deux points quelconques de $\mathbb{C}$, la fonction u est donc constante.

Remarque 11.6.6. *Compte tenu du théorème* 11.2.3, *ce résultat a déjà été démontré au chapitre 4 comme application du lemme de Schwarz. On peut aussi appliquer le théorème de Liouville à $e^{\pm f}$, où f est une fonction entière telle que* $\mathrm{Re}(f) = u$.

Voici une application typique des inégalités de Harnack.

Théorème 11.6.7. (Théorème de Harnack.)
Soit (u_n) une suite **croissante** *de fonctions harmoniques réelles sur un ouvert connexe $\Omega \subset \mathbb{C}$. Alors, ou bien $u_n(z)$ tend vers $+\infty$ uniformément sur les compacts quand n tend vers l'infini, ou bien (u_n) converge uniformément sur les compacts vers une fonction harmonique.*

La démonstration utilise le lemme suivant, qui découle directement des inégalités de Harnack.

Lemme 11.6.8. *Si $\overline{\mathrm{D}}$ est un disque fermé contenu dans Ω, alors il existe des constantes $\mathrm{C_D} > 0$ et $\mathrm{C'_D} < +\infty$ telles que $\mathrm{C_D}\, u(\alpha) \leqslant u(\beta) \leqslant \mathrm{C'_D}\, u(\alpha)$ pour toute fonction u harmonique positive sur Ω et pour tous points $\alpha, \beta \in \mathrm{D}$.*

Preuve du théorème de Harnack. Fixons un point $a \in \Omega$. Comme la suite $(u_n(a))$ est croissante, on a deux possibilités : ou bien $\lim_{n\to\infty} u_n(a) = +\infty$, ou bien $(u_n(a))$ admet une limite finie. On va montrer que dans le premier cas, $u_n(z)$ tend vers $+\infty$ uniformément sur tout compact de Ω, et que dans le deuxième cas, (u_n) converge uniformément sur tout compact vers une fonction harmonique.

Comme Ω est connexe, on peut, pour tout $z \in \Omega$, trouver des disques ouverts $\mathrm{D}_0(z), \dots, \mathrm{D}_{k(z)}(z)$ tels que $\overline{\mathrm{D}}_i(z) \subset \Omega$ pour tout i, $a \in \mathrm{D}_0(z)$, $z \in \mathrm{D}_{k(z)}(z)$, et $\mathrm{D}_i(z) \cap \mathrm{D}_{i+1}(z) \neq \emptyset$ pour tout $i < k(z)$.

Comme les disques $\mathrm{D}_i(z)$ se chevauchent, le lemme 11.6.8 appliqué pas à pas aux fonctions harmoniques positives $u_q - u_p$ et aux disques $\mathrm{D}_0(z), \dots, \mathrm{D}_{k(z)}(z)$ montre que pour chaque point $z \in \Omega$, on peut trouver des constantes $\mathrm{C}(z)$ et $\mathrm{C}'(z)$ vérifiant la propriété suivante : si $p, q \in \mathbb{N}$, $p \leqslant q$, alors

$$\mathrm{C}(z)\,(u_q(a) - u_p(a)) \leqslant u_q(\zeta) - u_p(\zeta) \leqslant \mathrm{C}'(z)\,(u_q(a) - u_p(a))$$

pour tout $\zeta \in \mathrm{W}_z = \mathrm{D}_{k(z)}(z)$.

Si maintenant K est un compact de Ω, alors, en prenant $z_1, \dots, z_l \in \mathrm{K}$ tels que $\mathrm{K} \subset \bigcup_j \mathrm{W}_{z_j}$ et en posant $\mathrm{C_K} = \min_j \mathrm{C}(z_j)$, $\mathrm{C'_K} = \max_j \mathrm{C}'(z_j)$, on obtient

$$\forall n \geqslant 0 \;\; \forall \zeta \in \mathrm{K} \quad u_n(\zeta) - u_0(\zeta) \geqslant \mathrm{C_K}\;(u_n(a) - u_0(a))$$

et

$$\forall p \leqslant q \;\; \forall \zeta \in \mathrm{K} \quad u_q(\zeta) - u_p(\zeta) \leqslant \mathrm{C'_K}\;(u_q(a) - u_p(a))\;.$$

On en déduit que si $u_n(a)$ tend vers $+\infty$, alors u_n tend vers $+\infty$ uniformément sur les compacts, et que si la suite $(u_n(a))$ converge, alors (u_n) est uniformément de Cauchy sur tout compact, donc converge uniformément sur les compacts vers une fonction u, qui est harmonique d'après le corollaire 11.6.2.

11.7. Intégrale de Poisson ; problème de Dirichlet

11.7.1. Intégrale de Poisson

Dans cette section, Δ est un disque de $\mathbb{C}$, et on note comme toujours σ la mesure de Lebesgue normalisée sur $\partial\Delta$.

Définition 11.7.1. *Si* $\mathbf{u}$ *est une fonction intégrable sur* $\partial\Delta$, *l'***intégrale de Poisson** *de la fonction* $\mathbf{u}$ *est la fonction* $\mathrm{P}_\Delta\mathbf{u} : \Delta \to \mathbb{C}$ *définie par*

$$\mathrm{P}_\Delta\mathbf{u}(z) = \int_{\partial\Delta} \mathbf{u}(\zeta)\mathrm{P}_\Delta(z,\zeta)\, d\sigma(\zeta) \ .$$

Dans le cas du disque unité $\mathbb{D}$, l'intégrale de Poisson peut s'exprimer par une convolution. En effet, pour $z = re^{it} \in \mathbb{D}$ et $\zeta = e^{i\theta} \in \partial\mathbb{D}$, on a $\mathrm{P}_\mathbb{D}(z,\zeta) = \mathrm{P}_\mathbb{D}(re^{it}, e^{i\theta}) = \mathrm{P}_r\big(e^{i(t-\theta)}\big)$, donc si $z = re^{it} \in \mathbb{D}$, alors

$$\mathrm{P}_\mathbb{D}\mathbf{u}(z) = \mathrm{P}_r * \mathbf{u}(e^{it}) \ .$$

Une fois posée la définition de l'intégrale de Poisson, on peut traduire comme suit la *formule* de Poisson : *si* u *est une fonction continue sur* $\overline{\Delta}$ *et harmonique dans* Δ, *alors* u *coïncide dans* Δ *avec l'intégrale de Poisson de sa restriction à* $\partial\Delta$. Le lemme suivant est un premier pas vers une réciproque.

Lemme 11.7.2. *Si* $\mathbf{u}$ *est intégrable sur* $\partial\Delta$, *alors* $\mathrm{P}_\Delta\mathbf{u}$ *est harmonique dans le disque* Δ.

Preuve. Par translation et dilatation, on se ramène au cas où Δ est le disque unité $\mathbb{D}$.

Un calcul facile donne

$$\mathrm{P}_\mathbb{D}(z,\zeta) \equiv \mathrm{Re}\left(\frac{\zeta+z}{\zeta-z}\right) \ .$$

Si $\mathbf{u}$ est réelle, on peut donc écrire

$$\mathrm{P}_\mathbb{D}\mathbf{u}(z) = \mathrm{Re}\left(\int_{\partial\mathbb{D}} \frac{\zeta+z}{\zeta-z}\, \mathbf{u}(\zeta)\, d\sigma(\zeta)\right)$$

pour tout $z \in \mathbb{D}$, ce qui prouve que $\mathrm{P}_\mathbb{D}\mathbf{u}$ est la partie réelle d'une fonction holomorphe et est donc harmonique. Dans le cas général, on considère séparément la partie réelle et la partie imaginaire de $\mathbf{u}$.

Autre preuve. On se ramène au cas du disque unité.

Pour $z = re^{it} \in \mathbb{D}$, on a $\mathrm{P}_\mathbb{D}(z) = \mathrm{P}_r * \mathbf{u}(e^{it})$. En intégrant terme à terme terme à terme l'identité $\mathbf{u}(e^{i\theta})\mathrm{P}_r(e^{i(t-\theta)}) = \sum_{-\infty}^{+\infty} r^{|n|}e^{in(t-\theta)}u(e^{i\theta})$

par rapport à θ, on en déduit

$$\mathrm{P}_{\mathbb{D}}\mathbf{u}(re^{it}) = \sum_{-\infty}^{+\infty} r^{|n|}\hat{\mathbf{u}}(n)e^{int} ,$$

autrement dit

$$\mathrm{P}_{\mathbb{D}}\mathbf{u}(z) = \sum_{1}^{\infty} \hat{\mathbf{u}}(-n)\,\bar{z}^{\,n} + \hat{\mathbf{u}}(0) + \sum_{1}^{\infty} \hat{\mathbf{u}}(n)\,z^{n}$$

pour $z = re^{it} \in \mathbb{D}$, où les deux séries convergent normalement sur les compacts de $\mathbb{D}$. Le résultat découle donc du corollaire 11.2.6.

Remarque 11.7.3. *Plus généralement, on définit l'intégrale de Poisson d'une mesure borélienne complexe μ sur $\partial\Delta$ par la formule*

$$\mathrm{P}_{\Delta}\mu(z) = \int_{\partial\Delta} \mathrm{P}_{\Delta}(z,\zeta)\, d\mu(\zeta) ,$$

et on montre de la même façon que $\mathrm{P}_{\Delta}\mu$ est une fonction harmonique.

On va maintenant montrer que si $\mathbf{u}$ est une fonction continue sur $\partial\Delta$, alors on peut retrouver $\mathbf{u}$ grâce à son intégrale de Poisson $\mathrm{P}_{\Delta}\mathbf{u}$. On obtient ainsi une réciproque complète à la formule de Poisson.

Théorème 11.7.4. *Soit $\mathbf{u}$ une fonction intégrable sur $\partial\Delta$, et soit $u = \mathrm{P}_{\Delta}\mathbf{u}$ son intégrale de Poisson. Si $\zeta_0 \in \partial\Delta$ est un point de continuité de $\mathbf{u}$, alors $u(z)$ tend vers $\mathbf{u}(\zeta_0)$ quand z tend vers ζ_0.*

La démonstration repose sur le lemme suivant.

Lemme 11.7.5. *La famille $(\mathrm{P}_z)_{z\in\Delta}$ vérifie les propriétés suivantes.*

(1) $\int_{\partial\Delta} \mathrm{P}_z\, d\sigma = 1$ *pour tout z.*

(2) (P_z) *est bornée en norme L^1 ; en fait $\|\mathrm{P}_z\|_1 = 1$ pour tout z.*

(3) *Si $\zeta_0 \in \partial\Delta$, alors, pour tout $\delta > 0$, $\mathrm{P}_z(\zeta)$ tend vers 0 uniformément sur $\{|\zeta - \zeta_0| \geqslant \delta\}$ quand z tend vers ζ_0.*

Preuve. Par translation et dilatation, on se ramène au cas du disque unité.

On a $\int_{\partial\mathbb{D}} \mathrm{P}_z\, d\sigma = 1$ car $\mathrm{P}_z = |k_z|^2/\|k_z\|_2^2$; comme P_z est positif, on en déduit $\|\mathrm{P}_z\|_1 = 1$. La propriété (3) découle immédiatement de la définition de P.

Remarque 11.7.6. *Pour montrer qu'on a $\int_{\partial\mathbb{D}} \mathrm{P}_z\, d\sigma = 1$, on peut également intégrer terme à terme l'identité $\mathrm{P}_r(e^{it}) = \sum_{-\infty}^{+\infty} r^{|n|}e^{int}$.*

Preuve du théorème 11.7.4.

Soit $\zeta_0 \in \partial\Delta$ un point de continuité de $\mathbf{u}$. Comme $\int_{\partial\Delta} \mathrm{P}_z d\sigma = 1$, on peut écrire, pour tout $z \in \Delta$,

$$u(z) - \mathbf{u}(\zeta_0) = \int_{\partial\Delta} (\mathbf{u}(\zeta) - \mathbf{u}(\zeta_0))\, \mathrm{P}_z(\zeta)\, d\sigma(\zeta)\ .$$

Choisissons $\delta > 0$ tel que $|\mathbf{u}(\zeta) - \mathbf{u}(\zeta_0)| < \varepsilon$ pour $|\zeta - \zeta_0| < \delta$. Comme $\|\mathrm{P}_z\|_1 = 1$, on obtient alors, pour tout point $z \in \Delta$:

$$|u(z) - \mathbf{u}(\zeta_0)| \leqslant \varepsilon + (\|\mathbf{u}\|_1 + |\mathbf{u}(\zeta_0)|) \sup\{\mathrm{P}_z(\zeta);\ |\zeta - \zeta_0| \geqslant \delta\ \}\ ,$$

et la propriété (3) du lemme 11.7.5 permet d'achever la démonstration.

Corollaire 11.7.7. *Si* $\mathbf{u}$ *est une fonction continue sur* $\partial\Delta$, *alors la fonction* $u : \overline{\mathbb{D}} \to \mathbb{C}$ *égale à* $\mathbf{u}$ *sur* $\partial\Delta$ *et à* $\mathrm{P}_\Delta\mathbf{u}$ *sur* $\mathbb{D}$ *est continue sur* $\overline{\mathbb{D}}$.

11.7.2. Problème de Dirichlet

Si V est un ouvert de $\mathbb{C}$, et si $\mathbf{u} : \partial\mathrm{V} \to \mathbb{C}$ est une fonction continue, le **problème de Dirichlet** pour $\mathbf{u}$ et V consiste à trouver une fonction $u : \overline{\mathrm{V}} \to \mathbb{C}$ continue sur $\overline{\mathrm{V}}$, harmonique dans V, et vérifiant $u_{|\partial\mathrm{V}} = \mathbf{u}$.

Le problème de Dirichlet peut très bien ne pas admettre de solution (voir par exemple l'exercice 11.39). Quoi qu'il en soit, dans le cas d'un ouvert borné, le principe du maximum (corollaire 11.4.6) montre qu'il y a toujours *unicité* d'une solution éventuelle.

Théorème 11.7.8. *Soit* Δ *un disque ouvert de* $\mathbb{C}$. *Si* $\mathbf{u} : \partial\Delta \to \mathbb{C}$ *est une fonction continue, alors le problème de Dirichlet pour* $\mathbf{u}$ *et* Δ *admet une unique solution.*

Preuve. D'après le lemme 11.7.2 et le théorème 11.7.4, la fonction u définie par

$$\begin{cases} u(\zeta) = \mathbf{u}(\zeta) & \text{si } \zeta \in \partial\Delta \\ u(z) = \mathrm{P}_\Delta\mathbf{u}(z) & \text{si } z \in \Delta \end{cases}$$

est une solution au problème de Dirichlet. L'unicité vient du principe du maximum, ou de la formule de Poisson.

Autre preuve. Il suffit de traiter le cas du disque unité $\mathbb{D}$. Notons E l'ensemble des fonctions $u : \overline{\mathbb{D}} \to \mathbb{C}$ continues sur $\overline{\mathbb{D}}$ et harmonique dans $\mathbb{D}$. D'après le corollaire 11.6.2, E est un sous-espace fermé de $\mathcal{C}(\overline{\mathbb{D}})$, donc $(\mathrm{E}, \|\ \|_\infty)$ est un espace de Banach.

Soit $\mathrm{R} : \mathrm{E} \to \mathcal{C}(\mathbb{T})$ l'opérateur de restriction, défini par $\mathrm{R}u = u_{|\mathbb{T}}$. D'après le principe du maximum, R est une isométrie de E dans $\mathcal{C}(\mathbb{T})$, donc $\mathrm{Im}(\mathrm{R})$ est un sous-espace fermé de $\mathcal{C}(\mathbb{T})$. D'autre part, l'image de

R contient tous les polynômes trigonométriques car les fonctions $z \mapsto z^n$ et $z \mapsto \bar{z}^n$ appartiennent à E pour tout $n \in \mathbb{N}$; par conséquent, Im(R) est dense dans $\mathcal{C}(\mathbb{T})$. On en déduit que l'opérateur R est une isométrie surjective, ce qui termine la démonstration.

Corollaire 11.7.9. *Dans le cas d'un domaine de Jordan, le problème de Dirichlet admet toujours une solution unique.*

Preuve. Soit Ω un domaine de Jordan, et soit $\mathbf{u} : \partial\Omega \to \mathbb{C}$ continue.

Soit φ un biholomorphisme de $\mathbb{D}$ sur Ω. D'après le théorème de Carathéodory 10.6.2, φ se prolonge en un homéomorphisme de $\overline{\mathbb{D}}$ sur $\overline{\Omega}$, encore noté φ. La fonction $\mathbf{v} = \mathbf{u} \circ \varphi$ est continue sur $\partial\mathbb{D}$, et si v résout le problème de Dirichlet pour $\mathbf{v}$ et $\partial\mathbb{D}$, alors $u = v \circ \varphi^{-1}$ résout le problème de Dirichlet pour $\mathbf{u}$ et $\partial\Omega$ (la fonction u est harmonique d'après la proposition 11.1.6, car v est harmonique et φ^{-1} est holomorphe).

11.7.3. Une application : harmonicité et propriété de la moyenne

Dans cette section, on utilise le théorème 11.7.8 pour montrer que la propriété de la moyenne caractérise les fonctions harmoniques. Ce résultat est à rapprocher du théorème de Morera établi au chapitre 4. Pour une autre démonstration, voir la section 11.10.

Théorème 11.7.10. *Pour une fonction $u \in \mathcal{C}^0(\Omega)$, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(1) *u est harmonique ;*

(2) *u vérifie la propriété de la moyenne ;*

(2′) *u vérifie* **localement** *la propriété de la moyenne, ce qui signifie que pour tout point $z_0 \in \Omega$, on peut trouver $r_0 > 0$ tel que*

$$u(z_0) = \int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{i\theta}) \frac{d\theta}{2\pi}$$

pour tout $r < r_0$.

Preuve. Il suffit de montrer que (2′) entraîne (1). Supposons donc que u vérifie localement la propriété de la moyenne. Pour montrer que u est harmonique, il suffit de prouver qu'elle est harmonique dans tout disque Δ vérifiant $\overline{\Delta} \subset \Omega$; fixons Δ.

Soit $v : \overline{\Delta} \to \mathbb{C}$ la solution du problème de Dirichlet pour $u_{|\partial\Delta}$ et Δ. La fonction $f = u - v$ est continue sur $\overline{\Delta}$ et vérifie localement la propriété de la moyenne dans l'ouvert Δ. D'après le théorème 4.8.6 et la remarque suivant ce théorème, la fonction $|f|$ satisfait donc au principe du maximum, et comme $f \equiv 0$ sur $\partial\Delta$, on a $f \equiv 0$ dans tout le disque Δ. Ainsi, $u \equiv v$ sur Δ, donc u est harmonique sur Δ.

Remarque 11.7.11. *Le théorème* 11.7.10 *permet de redémontrer qu'une limite uniforme de fonctions harmoniques est encore harmonique : en effet, une telle fonction possède la propriété de la moyenne par passage à la limite. En revanche, on n'obtient pas de la sorte la convergence des dérivées.*

Le résultat suivant montre que la propriété de la moyenne pour les disques caractérise elle aussi les fonctions harmoniques.

Proposition 11.7.12. *Une fonction $u \in \mathcal{C}^0(\Omega)$ est harmonique si et seulement si elle vérifie la propriété de la moyenne pour les disques, et il revient encore au même de dire que u vérifie localement cette propriété.*

Preuve. On sait qu'une fonction harmonique possède la propriété de la moyenne pour les disques. Au vu de la preuve du théorème 11.7.10, il suffit donc de vérifier que si une fonction f possède localement la propriété de la moyenne pour les disques, alors $|f|$ satisfait au principe du maximum. Ce résultat s'obtient en recopiant la preuve du théorème 4.8.6.

Autre preuve. On va montrer directement que les deux propriétés de la moyenne sont équivalentes, et que leurs versions « locales » le sont également.

Soit u une fonction continue dans un disque $\mathrm{D}(z_0, r_0)$. Pour $r \in]0, r_0[$, posons

$$\mathrm{I}(r) = \int_0^{2\pi} u(re^{i\theta}) \, \frac{d\theta}{2\pi}$$

et

$$\mathrm{A}(r) = \frac{1}{\pi r^2} \int_{\mathrm{D}(z_0,r)} u \, dm \, .$$

En intégrant en coordonnées polaires, on obtient

$$\mathrm{A}(r) = \frac{2}{r^2} \int_0^r s\mathrm{I}(s) \, ds \, .$$

Comme I est visiblement une fonction continue, cela montre que la fonction A est de classe $\mathcal{C}^1$, avec

$$\mathrm{I}(r) \equiv \mathrm{A}(r) + \frac{r}{2}\mathrm{A}'(r) \, .$$

De ces deux identités, on déduit immédiatement que si $\mathrm{I}(r) = u(z_0)$ pour tout $r < r_0$, alors $\mathrm{A}(r) = u(z_0)$ pour tout $r < r_0$, et qu'inversement, si $\mathrm{A}(r) \equiv u(z_0)$, alors $\mathrm{I}(r) \equiv \mathrm{A}(r) \equiv u(z_0)$. Cela prouve l'équivalence des deux propriétés de la moyenne et celle de leurs deux versions locales.

11.8. Convergence des séries de Fourier au sens d'Abel-Poisson

Si $\mathbf{u}$ est une fonction intégrable sur $\mathbb{T}$, il est naturel de chercher à « reconstituer » $\mathbf{u}$ à l'aide de ses coefficients de Fourier. On se heurte toutefois très vite à des difficultés. Par exemple, il existe des fonctions $\mathbf{u} \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$ dont la série de Fourier ne converge pas en un point donné (voir l'exercice 11.45), et on peut même construire des fonctions intégrables dont la série de Fourier ne converge en *aucun* point (Kolmogorov, 1926).

Il existe cependant des résultats positifs très généraux si on remplace la notion « naïve » de convergence de la série (convergence des sommes partielles symétriques) par une notion plus faible. Le plus célèbre est sans doute le *théorème de Fejér*, qui affirme que si $\mathbf{u} \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$, alors la série de Fourier de $\mathbf{u}$ converge uniformément vers $\mathbf{u}$ au sens de Cesàro, et que si $\mathbf{u} \in \mathrm{L}^p(\mathbb{T})$, $1 \leqslant p < \infty$, alors la série de Fourier converge vers $\mathbf{u}$ en norme L^p au sens de Cesàro. On peut également montrer que si $\mathbf{u} \in \mathrm{L}^1(\mathbb{T})$, alors la série de Fourier de $\mathbf{u}$ converge presque partout vers $\mathbf{u}$ au sens de Cesàro (Lebesgue, 1905).

Dans cette section, on va démontrer les mêmes résultats pour un procédé de sommation différent de celui de Cesàro, qu'on appelle habituellement **procédé d'Abel-Poisson**. Avant de donner plus de détails, signalons que la convergence d'une série au sens de Cesàro entraîne toujours sa convergence au sens d'Abel-Poisson (Frobenius, 1880 ; voir l'exercice 11.46). Les résultats qu'on va démontrer ici sont donc des conséquences des théorèmes mentionnés plus haut, mais on va tout de même en donner des preuves directes car le procédé d'Abel-Poisson est plus directement lié à l'analyse complexe que le procédé de Cesàro.

On dit qu'une série $\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n$ **converge au sens d'Abel-Poisson** si les propriétés suivantes sont vérifiées :

$$\begin{cases} \text{Pour tout } r \in [0\,;1[,\ \text{la série } \displaystyle\sum r^{|n|}\, a_n \text{ est convergente ;} \\ \displaystyle\sum_{-\infty}^{+\infty} r^{|n|}\, a_n \text{ admet une limite quand } r \text{ tend vers } 1^- . \end{cases}$$

Cette définition a un sens pour une série à termes scalaires, ou plus généralement pour une série à termes dans un espace vectoriel X où on dispose d'une notion de convergence. On va s'intéresser ici à la convergence au sens d'Abel-Poisson de la série de Fourier d'une fonction $\mathbf{u} \in \mathrm{L}^1(\mathbb{T})$, autrement dit de la série $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{\mathbf{u}}(n) e_n$, où e_n est la fonction définie sur $\mathbb{T}$ par $e_n(\zeta) = \zeta^n$.

Pour $\mathbf{u} \in \mathrm{L}^1(\mathbb{T})$, on notera $\mathbf{u}_r$, $r < 1$ les fonctions définies par

$$\mathbf{u}_r(e^{it}) = \sum_{-\infty}^{+\infty} r^{|n|}\hat{\mathbf{u}}(n)\, e^{int}\,.$$

Cette définition a un sens et $\mathbf{u}_r$ est même une fonction continue, car la série $\sum r^{|n|}\hat{\mathbf{u}}(n)e^{int}$ est normalement convergente (on a $r^{|n|}\,|\hat{\mathbf{u}}(n)\,e^{int}| \leqslant r^{|n|}\,||\mathbf{u}||_1$). On va montrer que les $\mathbf{u}_r$ convergent vers $\mathbf{u}$ quand r tend vers 1, uniformément si $\mathbf{u} \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$, en norme L^p si $\mathbf{u} \in \mathrm{L}^p$, $1 \leqslant p < \infty$, et presque partout si $\mathbf{u} \in \mathrm{L}^1$.

Comme pour le théorème de Fejér, la clé de tous ces résultats réside dans le fait que les fonctions $\mathbf{u}_r$ peuvent s'exprimer comme convolution à l'aide d'un noyau possédant de bonnes propriétés, en l'occurrence ici le noyau de Poisson. En effet, en observant qu'on a $\mathrm{P}_{\mathbb{D}}(re^{it}, e^{i\theta}) \equiv \mathrm{P}_r\big(e^{i(t-\theta)}\big)$ et en intégrant terme à terme l'identité $\mathbf{u}(e^{i\theta})\mathrm{P}_r(e^{i(t-\theta)}) = \sum_{-\infty}^{+\infty} r^{|n|}e^{in(t-\theta)}u(e^{i\theta})$ par rapport à θ, on obtient

$$\mathbf{u}_r(e^{it}) \equiv \mathrm{P}_{\mathbb{D}}\mathbf{u}(re^{it})\,,$$

ou, de manière équivalente :

$$\mathbf{u}_r = \mathrm{P}_r * \mathbf{u}\,.$$

11.8.1. Convergence en norme

Théorème 11.8.1. **a)** *Si* $\mathbf{u}$ *est une fonction continue sur* $\mathbb{T}$, *alors* $\mathbf{u}_r$ *tend vers* $\mathbf{u}$ *uniformément quand* r *tend vers* 1.

b) *Si* $\mathbf{u} \in \mathrm{L}^p(\mathbb{T})$, $1 \leqslant p < \infty$, *alors* $\mathbf{u}_r$ *tend vers* $\mathbf{u}$ *en norme* L^p.

La démonstration repose sur les deux lemmes suivants.

Lemme 11.8.2. *La famille* (P_r) *est bornée en norme* L^1 *; en fait, on a* $\|\mathrm{P}_r\|_1 = 1$ *pour tout* $r < 1$.

Preuve. P_r est positif, et en intégrant l'identité $\mathrm{P}_r(e^{i\theta}) = \sum_{-\infty}^{+\infty} r^{|n|}e^{in\theta}$, on trouve $\int_0^{2\pi} \mathrm{P}_r(e^{i\theta})\,d\theta = 2\pi$.

Lemme 11.8.3. *Soient* $(\mathrm{X}, \|\ \|)$, $(\mathrm{Y}, \|\ \|)$ *deux espaces vectoriels normés, et soit* $(\mathrm{T}_r)_{0<r<1}$ *une famille d'opérateurs linéaires continus,* $\mathrm{T}_r : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$. *On suppose que les deux propriétés suivantes sont vérifiées :*

(i) $\sup_r \|\mathrm{T}_r\| < +\infty$ *;*

(ii) *quand* r *tend vers* 1, $\mathrm{T}_r(x)$ *tend vers* 0 *pour tout* $x \in \mathrm{A}$, *où* A *est une partie dense de* X.

Alors on peut conclure que $\mathrm{T}_r(x)$ *tend vers* 0 *pour tout* $x \in \mathrm{X}$.

Preuve. Si $x \in \mathrm{X}$, on peut trouver $a \in \mathrm{A}$ tel que $\|x - a\|$ soit petite, puis trouver $r_0 < 1$ tel que $\|\mathrm{T}_r(a)\|$ soit petite pour tout $r \geqslant r_0$. En

écrivant $\|T_r(x)\| \leqslant \|T_r(a)\| + \|T_r(x-a)\| \leqslant \|T_r(a)\| + M\|x-a\|$, où $M = \sup_r \|T_r\|$, on constate alors que $\|T_r(x)\|$ est petite si $r \geqslant r_0$, ce qui termine la démonstration.

Preuve du théorème 11.8.1. Si $\mathbf{u}$ est continue sur $\mathbb{T}$, alors, d'après le théorème 11.7.4, la fonction u définie par $u(e^{it}) = \mathbf{u}(t)$ et $u(re^{it}) = \mathbf{u}_r(t) = P_{\mathbb{D}}\mathbf{u}(re^{it})$ si $r < 1$ est continue sur le compact $\overline{\mathbb{D}}$; elle est donc uniformément continue, et par conséquent $\mathbf{u}_r(\zeta)$ tend vers $\mathbf{u}(\zeta)$ uniformément sur $\mathbb{T}$ quand r tend vers 1. Cela prouve **a**.

Pour démontrer **b**, fixons $p \in [1;\infty[$, et considérons les opérateurs $T_r : L^p(\mathbb{T}) \to L^p(\mathbb{T})$ définis par

$$T_r\mathbf{u} = \mathbf{u}_r - \mathbf{u}.$$

Si $\mathbf{u} \in L^p(\mathbb{T})$, alors $\|\mathbf{u}_r\|_p = \|P_r * \mathbf{u}\|_p \leqslant \|P_r\|_1\|\mathbf{u}\|_p = \|\mathbf{u}\|_p$, et donc $\|T_r\mathbf{u}\|_p \leqslant 2\|\mathbf{u}\|_p$. Par conséquent, les opérateurs T_r sont tous de norme inférieure ou égale à 2. D'après **a**, si $\mathbf{u}$ est continue, alors $T_r\mathbf{u}$ tend vers 0 uniformément, donc *a fortiori* en norme L^p. Comme les fonctions continues sont denses dans $L^p(\mathbb{T})$, on peut appliquer le lemme 11.8.3 pour conclure que $T_r\mathbf{u}$ tend vers 0 en norme L^p pour toute $\mathbf{u} \in L^p(\mathbb{T})$, ce qui est le résultat souhaité.

Variante. Si $\mathbf{u}$ est un polynôme trigonométrique, $\mathbf{u}(t) = \sum_{-N}^{N} c_n e^{int}$, alors $\mathbf{u}_r(t) = \sum_{-N}^{N} r^{|n|} c_n e^{int}$ pour tout r. On a donc $\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_r\|_\infty \leqslant \sum_{-N}^{N}(1 - r^{|n|})|c_n|$, ce qui prouve que $\mathbf{u}_r$ tend vers $\mathbf{u}$ uniformément. Comme les polynômes trigonométriques sont denses dans $\mathcal{C}(\mathbb{T})$, on obtient alors **a** en appliquant le lemme 11.8.3 aux opérateurs $T_r : \mathcal{C}(\mathbb{T}) \to \mathcal{C}(\mathbb{T})$ définis par $T_r\mathbf{u} = \mathbf{u}_r - \mathbf{u}$, qui sont tous de norme inférieure ou égale à 2 car $\|\mathbf{u}_r\|_\infty = \|P_r * \mathbf{u}\|_\infty \leqslant \|P_r\|_1\|\mathbf{u}\|_\infty = \|\mathbf{u}\|_\infty$ si $\mathbf{u} \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$. La partie **b** découle de **a** comme plus haut.

Corollaire 11.8.4. *L'application* $\mathbf{u} \mapsto P_{\mathbb{D}}\mathbf{u}$ *est injective sur* $L^1(\mathbb{T})$.

Remarques. 1) La première démonstration du théorème 11.8.1 est plus « élémentaire » que la deuxième, car elle n'utilise pas la densité des polynômes trigonométriques dans $\mathcal{C}(\mathbb{T})$.

2) En fait, on peut même *déduire* la densité des polynômes trigonométriques du théorème 11.8.1 : en effet, si $\mathbf{u} \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$, alors chaque $\mathbf{u}_r$ est limite uniforme de polynômes trigonométriques car la série $\sum r^{|n|}\hat{\mathbf{u}}(n)e^{int}$ converge normalement sur $\mathbb{R}$, donc $\mathbf{u}$ elle-même est limite uniforme de polynômes trigonométriques.

11.8.2. Convergence préfaible

Si $\mathbf{u} \in \mathrm{L}^\infty(\mathbb{T})$, on ne peut pas espérer en général que $\mathbf{u}_r$ converge vers $\mathbf{u}$ en norme L^∞, sauf si $\mathbf{u}$ est continue. On obtient seulement une convergence « faible ». Avant d'énoncer le résultat, rappelons que $\mathrm{L}^\infty(\mathbb{T})$ s'identifie au dual de $\mathrm{L}^1(\mathbb{T})$ via l'« accouplement »

$$\mathrm{L}^\infty \times \mathrm{L}^1 \ni (f,g) \mapsto \langle f,g\rangle = \int_{\mathbb{T}} fg\, d\sigma\ .$$

Proposition 11.8.5. *Si $\mathbf{u} \in \mathrm{L}^\infty(\mathbb{T})$, alors $\mathbf{u}_r$ tend vers $\mathbf{u}$ préfaiblement dans $\mathrm{L}^\infty(\mathbb{T})$ quand r tend vers 1 ; autrement dit, $\langle \mathbf{u}_r, g\rangle$ tend vers $\langle \mathbf{u}, g\rangle$ pour toute fonction $g \in \mathrm{L}^1(\mathbb{T})$.*

Preuve. Soit $\mathbf{u} \in \mathrm{L}^\infty(\mathbb{T})$. Comme $\hat{\mathbf{u}}_r(n) \equiv r^{|n|}\hat{\mathbf{u}}(n)$, les coefficients de Fourier de $\mathbf{u}_r$ tendent vers ceux de $\mathbf{u}$ quand r tend vers 1, donc $\langle \mathbf{u}_r, \mathrm{P}\rangle$ tend vers $\langle \mathbf{u}, \mathrm{P}\rangle$ pour tout polynôme trigonométrique P. De plus, la famille $(\mathbf{u}_r)$ est bornée dans $\mathrm{L}^\infty(\mathbb{T}) = (\mathrm{L}^1(\mathbb{T}))^*$ car $\|\mathbf{u}_r\|_\infty \leqslant \|\mathrm{P}_r\|_1 \|\mathbf{u}\|_\infty = \|\mathbf{u}\|_\infty$ pour tout r. Comme les polynômes trigonométriques sont denses dans $\mathrm{L}^1(\mathbb{T})$, une nouvelle application du lemme 11.8.3 permet de conclure que $\langle \mathbf{u}_r, g\rangle$ tend vers $\langle \mathbf{u}, g\rangle$ pour toute fonction $g \in \mathrm{L}^1(\mathbb{T})$.

Remarque 11.8.6. *Le même raisonnement montre que si μ est une mesure sur $\mathbb{T}$ et si on pose $\mathbf{u}_r(e^{it}) = \mathrm{P}_{\mathbb{D}}\mu(re^{it})$, alors les mesures $\mathbf{u}_r\sigma$ tendent vers μ préfaiblement dans $\mathcal{M}(\mathbb{T}) = (\mathcal{C}(\mathbb{T}))^*$. En particulier, l'application $\mu \mapsto \mathrm{P}_{\mathbb{D}}\mu$ est injective sur $\mathcal{M}(\mathbb{T})$.*

11.8.3. Convergence presque partout

Pour terminer cette section, on va démontrer un résultat de convergence presque partout dû à Fatou (1906). Ce théorème est considérablement plus difficile que les résultats de convergence démontrés jusqu'à maintenant.

Théorème 11.8.7. (Théorème de Fatou.)
Si $\mathbf{u}$ est une fonction intégrable sur $\mathbb{T}$, alors $\mathbf{u}_r(\zeta)$ tend vers $\mathbf{u}(\zeta)$ pour presque tout point $\zeta \in \mathbb{T}$.

La démonstration utilise le **théorème de dérivation de Lebesgue**, que l'on admettra. Une démonstration est proposée à l'exercice 11.48.

Théorème 11.8.8. *Si f une fonction localement intégrable sur $\mathbb{R}$, et si on pose $\mathrm{F}(t) = \int_0^t f(s)\, ds$, alors F est dérivable en presque tout point $x \in \mathbb{R}$, et $\mathrm{F}' = f$ presque partout.*

On aura également besoin de la formule d'intégration par parties suivante.

Lemme 11.8.9. *Si f est une fonction localement intégrable sur $\mathbb{R}$ et si on pose $\mathrm{F}(t) = \int_0^t f(s)\,ds$, alors la formule d'intégration par parties*

$$\int_a^b f(t)\varphi(t)\,dt = [\mathrm{F}\varphi]_a^b - \int_a^b \mathrm{F}(t)\varphi'(t)\,dt$$

est valable pour toute fonction φ de classe $\mathcal{C}^1$.

Preuve. Si φ est de classe $\mathcal{C}^1$, on peut écrire $\varphi(t) = \varphi(a) + \int_a^t \varphi'(s)\,ds$, et donc

$$(*)\quad \int_a^b f(t)\varphi(t)\,dt = \varphi(a)(\mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a)) + \int_a^b f(t)\left(\int_a^t \varphi'(s)\,ds\right)\,dt\ .$$

D'après le théorème de Fubini, on a

$$\int_a^b f(t)\left(\int_a^t \varphi'(s)\,ds\right)dt = \int_a^b \varphi'(s)\left(\int_s^b f(t)\,dt\right)ds = \int_a^b \varphi'(s)(\mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(s))\,ds\,,$$

autrement dit

$$\int_a^b f(t)\left(\int_a^t \varphi'(s)\,ds\right)dt = \mathrm{F}(b)(\varphi(b) - \varphi(a)) - \int_a^b \varphi'(s)\mathrm{F}(s)\,ds\ ,$$

et on obtient le résultat voulu en reportant cette expression dans $(*)$.

Remarque 11.8.10. *Si $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, alors, en choisissant un intervalle $[a\,;b]$ contenant le support de φ, on obtient $\int_{\mathbb{R}} f\varphi\,dm = -\int_{\mathbb{R}} \mathrm{F}\varphi'\,dm$. Cela montre qu'on a $\mathrm{F}' = f$ au sens des distributions.*

Pour $r < 1$, on notera encore P_r la fonction 2π-périodique associée au noyau de Poisson P_r ; autrement dit, on écrira

$$\mathrm{P}_r(t) = \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos t + r^2}\ .$$

La fonction P_r est visiblement paire et de classe $\mathcal{C}^1$. De plus, P_r est positive, croissante sur $[-\pi; 0]$, décroissante sur $[0\,;\pi]$, et on a

$$\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{P}_r(t)\,\frac{dt}{2\pi} = 1\ .$$

Notons également que pour $t \in [-\pi;\pi]$, $t \neq 0$, on a $\lim_{r\to 1}\mathrm{P}_r(t) = 0$.

Le lemme suivant joue un rôle essentiel dans la preuve du théorème de Fatou.

Lemme 11.8.11. La famille (P_r) vérifie les propriétés suivantes.

(1) $\lim_{r\to 1} \int_{\delta\leqslant|t|\leqslant\pi} |\mathrm{P}'_r(t)|\,dt = 0$ pour tout $\delta \in]0\,;\pi]$.

(2) $\sup_{r<1}(\int_{-\pi}^{\pi} |t|\,|\mathrm{P}'_r(t)|\,dt) < +\infty$.

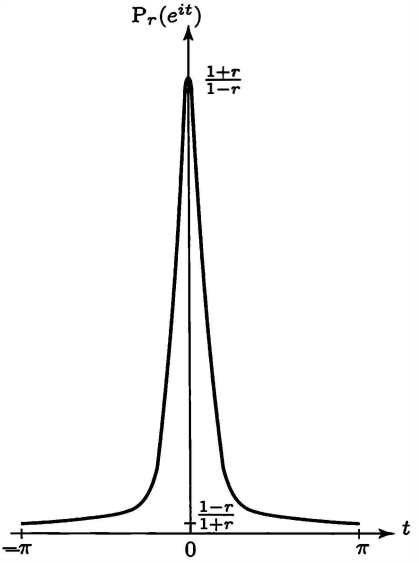


FIG. 50.

Preuve. Comme P_r est paire et décroissante sur $[0;\pi]$, sa dérivée est impaire et négative sur $[0;\pi]$. Pour $\delta \in]0;\pi]$, on a donc

$$\int_{\delta \leqslant |t| \leqslant \pi} |P'_r(t)|\,dt = -2\int_{\delta}^{\pi} P'_r(t)\,dt = 2(P_r(\delta) - P_r(\pi)),$$

ce qui prouve (1) car $P_r(\delta)$ et $P_r(\pi)$ tendent tous les deux vers 0 quand r tend vers 1.

Comme P'_r est impaire et négative sur $[0;\pi]$, la fonction $t \mapsto tP'_r(t)$ est paire et négative sur $[-\pi;\pi]$. On a donc $\int_{-\pi}^{\pi} |tP'_r(t)|\,dt = -2\int_0^{\pi} tP'_r(t)\,dt = -2\pi P_r(\pi) + 2\int_0^{\pi} P_r(t)\,dt$ pour tout $r < 1$. Comme P_r est positif et $\int_0^{\pi} P_r(t)\,dt = \pi$, on en déduit $\int_{-\pi}^{\pi} |tP'_r(t)|\,dt \leqslant 2\pi$ pour tout r, ce qui prouve (2).

Preuve du théorème de Fatou. Soit $\mathbf{u}$ une fonction intégrable sur $\mathbb{T}$, et notons encore $\mathbf{u}$ et $\mathbf{u}_r$ les fonctions 2π-périodiques correspondantes. D'après le théorème de dérivation de Lebesgue, il suffit de montrer que $\mathbf{u}_r(t)$ tend vers $\mathbf{u}(t)$ en tout point où u est la dérivée de son intégrale indéfinie ; fixons un tel point t_0.

Comme $\int_{-\pi}^{\pi} P_r(t)\,\frac{dt}{2\pi} = 1$, on peut écrire

$$\mathbf{u}_r(t_0) - \mathbf{u}(t_0) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \mathrm{P}_r(t) \frac{dt}{2\pi} ,$$

où $f(t) = \mathbf{u}(t_0 - t) - \mathbf{u}(t_0)$. Il s'agit de montrer que le second membre de cette égalité tend vers 0 quand r tend vers 1.

En posant

$$\mathrm{F}(t) = \int_0^t f(s)\, ds$$

et en intégrant par parties grâce au lemme 11.8.9, on obtient

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \mathrm{P}_r(t)\, dt = [\mathrm{F}\mathrm{P}_r]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{F}(t) \mathrm{P}'_r(t)\, dt$$

pour tout $r < 1$. Comme $\mathrm{P}_r(\pi) = \mathrm{P}_r(-\pi)$ tend vers 0 quand r tend vers 1, tout revient donc à montrer qu'on a

$$\lim_{r \to 1} \left(\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{F}(t) \mathrm{P}'_r(t)\, dt \right) = 0 .$$

Soit $\varepsilon > 0$. Par hypothèse sur t_0, la fonction F est dérivable en 0 et $\mathrm{F}'(0) = f(0) = 0$. On a donc $\mathrm{F}(t) = o(t)$ au voisinage de 0, et on peut ainsi trouver $\delta \in]0\,;\pi]$ tel que $|\mathrm{F}(t)| \leqslant \varepsilon |t|$ pour $|t| \leqslant \delta$. On a alors

$$\left| \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{F}(t) \mathrm{P}'_r(t)\, dt \right| \leqslant \varepsilon \int_{-\delta}^{\delta} |t|\, |\mathrm{P}'_r(t)|\, dt + \mathrm{M} \int_{\delta \leqslant |t| \leqslant \pi} |\mathrm{P}'_r(t)|\, dt$$

pour tout $r < 1$, où $\mathrm{M} = \sup_{[-\pi;\pi]} |\mathrm{F}|$.

D'après le lemme 11.8.11, la première intégrale est majorée par une constante C indépendante de r et de δ, et la deuxième tend vers 0 quand r tend vers 1. On obtient donc

$$\overline{\lim_{r \to 1}} \left| \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{F}(t) \mathrm{P}'_r(t)\, dt \right| \leqslant \mathrm{C}\varepsilon$$

pour tout $\varepsilon > 0$, ce qui termine la démonstration.

11.9. Espaces h^p

Rappelons qu'on note $h(\mathbb{D})$ l'ensemble des fonctions harmoniques sur le disque unité $\mathbb{D}$. On munit $h(\mathbb{D})$ de la topologie de la convergence uniforme sur les compacts.

Si $u \in h(\mathbb{D})$, on pose, pour $r < 1$:

$$\mathbf{u}_r(e^{it}) = u(re^{it}) ,$$

et

$$u_r(z) = u(rz) .$$

Les fonctions $\mathbf{u}_r$ sont continues sur $\mathbb{T}$, et les fonctions u_r sont harmoniques au voisinages de $\overline{\mathbb{D}}$.

On notera $\mathcal{M}(\mathbb{T})$ l'espace des mesures boréliennes complexes sur $\mathbb{T}$, muni de sa norme naturelle : si $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{T})$, alors $\|\mu\| = |\mu|(\mathbb{T})$, où $|\mu|$ est la variation totale de μ, et $\|\mu\|$ est également la norme de μ considérée comme forme linéaire continue sur $\mathcal{C}(\mathbb{T})$.

Enfin, on note $\| \ \|_p$ la norme de $\mathrm{L}^p(\mathbb{T})$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$.

Lemme 11.9.1. *Si $p \in [1;\infty]$, alors l'application $(u,r) \mapsto \|\mathbf{u}_r\|_p$ est croissante par rapport à $r \in [0;1[$, et continue par rapport à $u \in h(\mathbb{D})$.*

Preuve. Si u est fixée et si $r_1 < r_2 < 1$, la formule de Poisson appliquée à la fonction u_{r_2} permet d'écrire

$$\mathbf{u}_{r_1} = \mathrm{P}_{r_1/r_2} * \mathbf{u}_{r_2} \ .$$

On en déduit $\|\mathbf{u}_{r_1}\|_p \leqslant \|\mathrm{P}_{r_1/r_2}\|_1 \|\mathbf{u}_{r_2}\|_p = \|\mathbf{u}_{r_2}\|_p$, ce qui prouve la croissance par rapport à r.

La continuité par rapport à u est immédiate car pour $r < 1$ fixé, le cercle $\{|z| = r\}$ est un compact de $\mathbb{D}$.

Remarque 11.9.2. *Les cas $p = 2$ et $p = \infty$ peuvent se traiter différemment. En effet, la croissance de $\|\mathbf{u}_r\|_2$ est une conséquence de la formule de Parseval (si $u(z) = \sum_1^\infty c_{-n}\bar{z}^n + c_0 + \sum_1^\infty c_n z^n$, alors $\|\mathbf{u}_r\|_2^2 = \sum_{-\infty}^{+\infty} r^{2n}|c_n|^2$ pour tout $r < 1$), et la croissance de $\|\mathbf{u}_r\|_\infty$ découle du principe du maximum.*

Pour $u \in h(\mathbb{D})$ et $p \in [1;\infty]$, on pose

$$\|u\|_{h^p} = \sup_{r<1} \|\mathbf{u}_r\|_p \ .$$

Cette quantité n'est pas nécessairement finie, mais elle a un sens pour toute fonction $u \in h(\mathbb{D})$. On utilisera plusieurs fois la remarque suivante.

Remarque 11.9.3. *Si (u_n) est une suite convergeant dans $h(\mathbb{D})$ vers une fonction u, alors*

$$\|u\|_{h^p} \leqslant \liminf_n \ \|u_n\|_{h^p} \ .$$

Preuve. D'après le lemme 11.9.1, les fonctions $u \mapsto \|\mathbf{u}_r\|_p$ sont continues sur $h(\mathbb{D})$. On a donc $\|\mathbf{u}_r\|_p = \lim_{n\to\infty} \|(\mathbf{u}_n)_r\|_p$, d'où $\|\mathbf{u}_r\|_p \leqslant \liminf_n \|u_n\|_{h^p}$ pour tout $r < 1$ puisque $\|(\mathbf{u}_n)_r\|_p \leqslant \|\mathbf{u}_n\|_{h^p}$.

Définition 11.9.4. *Pour $p \in [1;\infty]$, on note $h^p(\mathbb{D})$ l'ensemble des fonctions $u \in h(\mathbb{D})$ vérifiant $\|u\|_{h^p} < +\infty$.*

Exemples. 1) $h^\infty(\mathbb{D})$ est l'ensemble des fonctions harmoniques bornées sur $\mathbb{D}$, et $\| \ \|_{h^\infty} = \| \ \|_\infty$.

2) Si $u \in h(\mathbb{D})$ s'écrit $u(z) = \sum_1^\infty c_{-n}\bar{z}^n + c_0 + \sum_1^\infty c_n z^n$, alors $\|\mathbf{u}_r\|_2^2 = \sum_{-\infty}^{+\infty} r^{2n}|c_n|^2$ pour tout $r < 1$, et donc

$$\|u\|_{h^2}^2 = \sum_{-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 \ .$$

Par conséquent, $(h^2(\mathbb{D}), \| \ \|_{h^2})$ est un espace de Hilbert qui s'identifie « canoniquement » à $l^2(\mathbb{Z})$. D'autre part, l'espace de Hardy $\mathrm{H}^2(\mathbb{D})$ introduit au chapitre 3 est exactement l'ensemble des fonctions de $h^2(\mathbb{D})$ qui sont de plus holomorphes, et pour $f \in \mathrm{H}^2(\mathbb{D})$, on a

$$\|f\|_{\mathrm{H}^2} = \|f\|_{h^2} \ .$$

3) Si u est une fonction harmonique positive sur $\mathbb{D}$, alors $u \in h^1(\mathbb{D})$ et

$$\|u\|_{h^1} = u(0) \ .$$

En effet, si u est positive, alors $\|\mathbf{u}_r\|_1 = \int_0^{2\pi} u(re^{i\theta}) \frac{d\theta}{2\pi} = u(0)$ pour tout $r < 1$.

Proposition 11.9.5. *Pour tout $p \in [1;\infty]$, $(h^p(\mathbb{D}), \| \ \|_{h^p})$ est un espace de Banach, et la convergence dans $h^p(\mathbb{D})$ entraîne la convergence uniforme sur les compacts.*

Preuve. On vérifie sans difficulté que $h^p(\mathbb{D})$ est un espace vectoriel, et que $\| \ \|_{h^p}$ est une semi-norme sur $h^p(\mathbb{D})$. D'autre part, si $u \in h^p(\mathbb{D})$ vérifie $\|u\|_{h^p} = 0$, alors $\|\mathbf{u}_r\|_p = 0$ pour tout $r < 1$; comme les fonctions $\mathbf{u}_r$ sont continues, on a donc $\mathbf{u}_r(e^{it}) \equiv 0$ pour tout r, et donc $u = 0$. Ainsi, $\| \ \|_{h^p}$ est une norme sur $h^p(\mathbb{D})$.

Si $u \in h(\mathbb{D})$ et si $r < 1$, la formule de Poisson appliquée à la fonction u_r permet d'écrire $\mathbf{u}_s = \mathrm{P}_{s/r} * \mathbf{u}_r$ pour tout $s < r$. D'après l'inégalité de Hölder, on en déduit

$$\|\mathbf{u}_s\|_\infty \leqslant \|\mathrm{P}_{s/r}\|_q \|\mathbf{u}_r\|_p \ \leqslant \|\mathrm{P}_{s/r}\|_q \|u\|_{h^p}$$

pour tout $s < r$, où q est l'exposant conjugué de p.

En fixant s et en faisant tendre r vers 1, on obtient $\|\mathbf{u}_s\|_\infty \leqslant \mathrm{C}_s \|u\|_{h^p}$, où $\mathrm{C}_s = \|\mathrm{P}_s\|_q$. D'après le principe du maximum, on a donc

$$\sup_{\overline{\mathrm{D}}(0,s)} |u(z)| \leqslant \mathrm{C}_s \, \|u\|_{h^p}$$

pour toute fonction $u \in h(\mathbb{D})$ et pour tout $s < 1$. On en déduit immédiatement que la convergence dans $h^p(\mathbb{D})$ entraîne la convergence uniforme sur les compacts.

Soit maintenant (u_n) une suite de Cauchy dans $h^p(\mathbb{D})$. D'après l'inégalité précédente, la suite (u_n) est uniformément de Cauchy sur tout compact, et converge donc uniformément sur les compacts vers une fonction u, qui est harmonique d'après le corollaire 11.6.2. On a $\|u\|_{h^p} \leqslant \liminf_n \|u_n\|_{h^p} < +\infty$ car (u_n) est bornée dans $h^p(\mathbb{D})$, donc $u \in h^p(\mathbb{D})$. Enfin, on a $\|u_n - u\|_{h^p} \leqslant \liminf_m \|u_n - u_m\|_{h^p}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, ce qui prouve que (u_n) converge vers u pour la norme de $h^p(\mathbb{D})$. Ainsi $(h^p(\mathbb{D}), \| \ \|_{h^p})$ est un espace de Banach.

On a vu à la section 11.7.1 que l'intégrale de Poisson d'une fonction intégrable sur $\mathbb{T}$ ou d'une mesure borélienne sur $\mathbb{T}$ est toujours une fonction harmonique. Le théorème suivant apporte des précisions supplémentaires.

Théorème 11.9.6. *Si* $\mathbf{u} \in \mathrm{L}^p(\mathbb{T})$, *alors* $\mathrm{P}_{\mathbb{D}}\mathbf{u} \in h^p(\mathbb{D})$ *et* $\|\mathrm{P}_{\mathbb{D}}\mathbf{u}\|_{h^p} = \|\mathbf{u}\|_p$. *De même, si* $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{T})$, *alors* $\mathrm{P}_{\mathbb{D}}\mu \in h^1(\mathbb{D})$ *et* $\|\mathrm{P}_{\mathbb{D}}\mu\|_{h^1} = \|\mu\|$.

La démonstration utilise la remarque suivante.

Remarque 11.9.7. *Si* X *est un espace de Banach et si* (x_n^*) *est une suite dans* X^* *convergeant préfaiblement vers* $x^* \in \mathrm{X}^*$, *alors* $\|x^*\| \leqslant \liminf_n \|x_n^*\|$.

Preuve. On a $|\langle x^*, x\rangle| = \lim_{n\to\infty} |\langle x_n^*, x\rangle| \leqslant \liminf_n \|x_n^*\|$ pour tout $x \in \mathrm{X}$ de norme 1.

Preuve du théorème 11.9.6. Soit $\mathbf{u} \in \mathrm{L}^p(\mathbb{T})$, et posons $u = \mathrm{P}_{\mathbb{D}}\mathbf{u}$; la fonction u est harmonique d'après le lemme 11.7.2.

Par définition de u, on a $\mathbf{u}_r = \mathrm{P}_r * \mathbf{u}$, et donc $\|\mathbf{u}_r\|_p \leqslant \|\mathrm{P}_r\|_1 \|\mathbf{u}\|_p = \|\mathbf{u}\|_p$ pour tout $r < 1$. Par conséquent, $u \in h^p(\mathbb{D})$ et $\|u\|_{h^p} \leqslant \|\mathbf{u}\|_p$.

D'autre part, on a vu à la section 11.8 que si $p < \infty$, alors $\mathbf{u}_r$ tend vers $\mathbf{u}$ en norme L^p, et que si $p = \infty$, alors $\mathbf{u}_r$ tend vers $\mathbf{u}$ préfaiblement. Dans les deux cas, on a $\|\mathbf{u}\|_p \leqslant \liminf_{r\to 1} \|\mathbf{u}_r\|_p \leqslant \|u\|_{h^p}$ d'après 11.9.7, d'où finalement $\|u\|_{h^p} = \|\mathbf{u}\|_p$.

La démonstration est analogue dans le cas d'une mesure μ. En posant $u = \mathrm{P}_{\mathbb{D}}\mu$, on a $\mathbf{u}_r = \mathrm{P}_r * \mu$ pour tout $r < 1$, la convolée d'une fonction $f \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$ par une mesure $\nu \in \mathcal{M}(\mathbb{T})$ étant la fonction continue définie par la formule $f * \nu(\zeta) = \int f(\eta^{-1}\zeta)\, d\nu(\eta)$. On en déduit $\|u\|_{h^1} \leqslant \|\mu\|$. L'inégalité inverse vient du fait que les mesures $\mathbf{u}_r\sigma$ convergent préfaiblement vers μ dans $\mathcal{M}(\mathbb{T})$ et sont toutes de norme inférieure à $\|u\|_{h^1}$.

Le théorème suivant est une réciproque au théorème 11.9.6.

Théorème 11.9.8. *Toute fonction* $u \in h^1(\mathbb{D})$ *est l'intégrale de Poisson d'une mesure* $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{T})$. *Si* $p > 1$, *alors toute fonction* $u \in h^p(\mathbb{D})$ *est l'intégrale de Poisson d'une fonction* $\mathbf{u} \in \mathrm{L}^p(\mathbb{T})$.

Preuve. Soit $u \in h^1(\mathbb{D})$, et pour $r < 1$, notons μ_r la mesure $\mathbf{u}_r\sigma$, où σ est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{T}$.

On a $\|\mu_r\| = \|\mathbf{u}_r\|_1$ pour tout r, donc la famille (μ_r) est bornée dans $\mathcal{M}(\mathbb{T})$ puisque $u \in h^1(\mathbb{D})$. Comme $\mathcal{M}(\mathbb{T})$ s'identifie au dual de $\mathcal{C}(\mathbb{T})$, le théorème de Banach-Alaoglu montre qu'il existe une suite (r_n) tendant vers 1 et une mesure $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{T})$ telles que la suite (μ_{r_n}) converge préfaiblement vers μ dans $\mathcal{M}(\mathbb{T})$. On a ainsi

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{T}} \varphi\, \mathbf{u}_{r_n}\, d\sigma = \int_{\mathbb{T}} \varphi\, d\mu$$

pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$.

Si maintenant $z \in \mathbb{D}$, alors $\mathrm{P}_z \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$, et comme la fonction u_{r_n} est harmonique au voisinage de $\overline{\mathbb{D}}$, on a $\int_{\mathbb{T}} \mathrm{P}_z \mathbf{u}_{r_n} d\sigma = u_{r_n}(z) = u(r_n z)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En appliquant ce qui précède à $\varphi = \mathrm{P}_z$, on obtient

$$\lim_{n\to\infty} u(r_n z) = \int_{\mathbb{T}} \mathrm{P}_z\, d\mu\ ,$$

autrement dit $u(z) = \mathrm{P}_{\mathbb{D}}\mu(z)$ pour tout $z \in \mathbb{D}$. Cela prouve la première partie du théorème.

Pour démontrer la deuxième partie, on procède exactement de la même manière en remarquant que si $p > 1$, alors $\mathrm{L}^p(\mathbb{T})$ s'identifie au dual de $\mathrm{L}^q(\mathbb{T})$, où q est l'exposant conjugué de p.

Variante. On peut éviter le recours au théorème de Banach-Alaoglu en démontrant directement que μ_r admet une limite préfaible $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{T})$ quand r tend vers 1. La preuve repose sur l'identité

$$\int f\,(\mathrm{P}_r * \mathbf{v})\, d\sigma = \int (\mathrm{P}_r * f)\, \mathbf{v}\, d\sigma\ ,$$

valable par exemple pour $f \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$ et $\mathbf{v} \in \mathrm{L}^1(\mathbb{T})$.

Si $r_1 < r_2 < 1$, la formule de Poisson permet d'écrire $\mathbf{u}_{r_1} = \mathrm{P}_{r_1/r_2} * \mathbf{u}_{r_2}$. En notant $\langle \mu, f\rangle$ le résultat de l'action d'une mesure $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{T})$ sur une fonction $f \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$ et toujours μ_r la mesure $\mathbf{u}_r\sigma$, il découle donc de l'identité précédente que si $f \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$ et $r_1 < r_2 < 1$, alors

$$\langle \mu_{r_2}, f\rangle - \langle \mu_{r_1}, f\rangle = \langle \mu_{r_2}, f - \mathrm{P}_{r_1/r_2} * f\rangle\,.$$

Comme la famille (μ_r) est bornée en norme et comme $\mathrm{P}_r * f$ converge uniformément vers f quand r tend vers 1, on constate donc que $|\langle \mu_{r_2}, f\rangle - \langle \mu_{r_1}, f\rangle|$ est petit si r_1 et r_2 sont proches de 1. Par conséquent (critère de Cauchy), pour toute fonction $f \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$, $\langle \mu_r, f\rangle$ admet une limite $\mathrm{L}(f)$ quand r tend vers 1. L'application L est visiblement une forme linéaire sur $\mathcal{C}(\mathbb{T})$, et elle est continue car $||\mu_r|| \leqslant ||u||_{h^1}$ pour tout r et

donc $|\mathrm{L}(f)| \leqslant \|u\|_{h^1} \|f\|_\infty$ pour toute fonction $f \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$. On a donc montré que μ_r converge préfaiblement vers une mesure $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{T})$, et la preuve du théorème s'achève comme précédemment.

Corollaire 11.9.9. *Toute fonction harmonique positive dans $\mathbb{D}$ est l'intégrale de Poisson d'une mesure positive.*

Preuve. Soit $u \in h(\mathbb{D})$, $u \geqslant 0$. On sait que u appartient à $h^1(\mathbb{D})$, avec $\|u\|_{h^1} = u(0)$. La fonction u est donc l'intégrale de Poisson d'une mesure $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{T})$ vérifiant $\|\mu\| = u(0) = \int_{\mathbb{T}} d\mu$, autrement dit $|\mu|(\mathbb{T}) = \mu(\mathbb{T})$. D'après le théorème de Radon-Nikodym, on peut écrire $\mu = \varphi\,|\mu|$, où φ est une fonction borélienne de module identiquement égal à 1. On a $\int \varphi\, d|\mu| = \mu(\mathbb{T}) = |\mu|(\mathbb{T}) = \int |\varphi|\, d|\mu|$, et donc $\varphi = |\varphi| = 1$, $|\mu|$-presque partout. Ainsi $\mu = |\mu|$, donc μ est une mesure positive.

Remarque 11.9.10. *Inversement, l'intégrale de Poisson d'une mesure positive est une fonction harmonique positive, car le noyau de Poisson est positif.*

En combinant les deux théorèmes précédents, on obtient finalement le

Théorème 11.9.11. *L'intégrale de Poisson définit un isomorphisme isométrique de $\mathcal{M}(\mathbb{T})$ sur $h^1(\mathbb{D})$, et un isomorphisme isométrique de $\mathrm{L}^p(\mathbb{T})$ sur $h^p(\mathbb{D})$ si $p > 1$.*

Si $u \in h^p(\mathbb{D})$ est l'intégrale de Poisson d'une fonction $\mathbf{u} \in \mathrm{L}^p(\mathbb{T})$, on dit que $\mathbf{u}$ est la **valeur au bord** de la fonction u. Cette terminologie est justifiée par les résultats de la section 11.8.

Notons que si $u \in h(\mathbb{D})$ s'écrit sous la forme

$$u(z) = \sum_1^\infty c_{-n} \bar{z}^n + c_0 + \sum_1^\infty c_n z^n\,,$$

et si on suppose que u appartient à $h^1(\mathbb{D})$ et admet une valeur au bord $\mathbf{u} \in \mathrm{L}^1(\mathbb{T})$, alors $\mathbf{u}_r = \mathrm{P}_r * \mathbf{u}$ pour tout $r < 1$, donc

$$r^{|n|} c_n = \hat{\mathbf{u}}_r(n) = \hat{\mathrm{P}}_r(n)\, \hat{\mathbf{u}}(n) = r^{|n|} \hat{\mathbf{u}}(n),$$

et donc

$$\hat{\mathbf{u}}(n) = c_n$$

pour tout $n \in \mathbb{Z}$. Inversement, si les c_n sont les coefficients de Fourier d'une fonction $\mathbf{u} \in \mathrm{L}^1(\mathbb{T})$, alors u est l'intégrale de Poisson de $\mathbf{u}$ car $\mathrm{P}_{\mathbb{D}}\mathbf{u}(re^{it}) \equiv \sum_n r^{|n|} \hat{\mathbf{u}}(n) e^{int} \equiv \sum_{n>0} \hat{\mathbf{u}}(-n) \bar{z}^n + \hat{\mathbf{u}}(0) + \sum_{n>0} \hat{\mathbf{u}}(n) z^n$, où on a posé $z = re^{it}$.

En particulier, pour $p = 2$, l'existence d'une valeur au bord pour une fonction $u \in h^2(\mathbb{D})$ découle immédiatement de l'identité $\|u\|_{h^2}^2 =$

$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n|^2$ et du théorème de Riesz-Fisher. Il est inutile d'invoquer le théorème 11.9.8 dans ce cas.

11.10. Formule de Green et applications

On a souvent utilisé dans ce chapitre le lien entre harmonicité et holomorphie, ce qui a permis de démontrer rapidement certaines propriétés des fonctions harmoniques, en particulier la formule de la moyenne. Cette méthode présente l'inconvénient de ne pas se généraliser en dimension supérieure : l'harmonicité a un sens dans $\mathbb{R}^n$, mais l'holomorphie n'en a plus. Pour terminer ce chapitre, on va présenter une autre approche des fonctions harmoniques, basée sur la **formule de Green**. Cette approche ne fait pas référence aux fonctions holomorphes, et peut ainsi se transposer en toutes dimensions.

11.10.1. Formule de Green

Dans cette section $K \subset \mathbb{C}$ est un compact à bord régulier de classe $\mathcal{C}^2$.

On note σ la **mesure de longueur** sur ∂K, c'est-à-dire la somme des mesures de longueur associées aux composantes connexes de ∂K. Rappelons par exemple que si K est un disque $\overline{D}(0, r_0)$, alors $\int_{\partial K} f d\sigma = r_0 \int_0^{2\pi} f(r_0 e^{i\theta})\, d\theta$ pour toute fonction f borélienne bornée sur ∂K, et que si K est une couronne $\{r_1 \leqslant |z| \leqslant r_2\}$, alors

$$\int_{\partial K} f d\sigma = r_1 \int_0^{2\pi} f(r_1 e^{i\theta})\, d\theta + r_2 \int_0^{2\pi} f(r_2 e^{i\theta})\, d\theta\ .$$

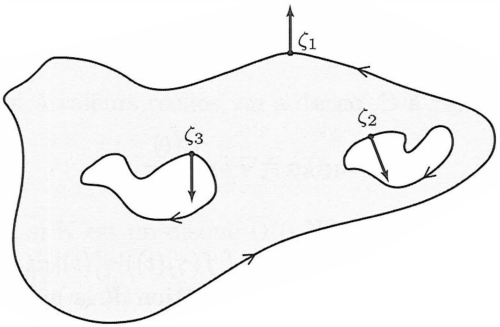


FIG. 51. Normale extérieure

Si ζ_0 est un point de ∂K, la **normale extérieure** à ∂K en ζ_0 est le vecteur $\mathbf{n}_K(\zeta_0) \in \mathbb{R}^2$ défini de la façon suivante : $\mathbf{n}_K(\zeta_0)$ est le vecteur unitaire indirectement orthogonal à $\gamma'(0)$, où $\gamma : [-\varepsilon; \varepsilon] \to \partial K$ est n'importe

quel chemin de Jordan régulier de classe $\mathcal{C}^2$, positivement orienté relativement à $\mathring{\mathrm{K}}$, tel que $\gamma(0) = \zeta_0$. Cette définition est cohérente car deux tels chemins sont nécessairement équivalents et se déduisent même l'un de l'autre par un changement de paramètre croissant de classe $\mathcal{C}^2$ (voir la preuve du lemme 1.4.4), donc leurs dérivées en 0 sont colinéaires et de même sens. Par exemple, si K est un disque $\overline{\mathrm{D}}(0, r_0)$, alors $\mathbf{n}_{\mathrm{K}}(\zeta) = e^{i\theta}$ pour tout point $\zeta = r_0 e^{i\theta} \in \partial\mathrm{K}$; et si K est une couronne $\{r_1 \leqslant |z| \leqslant r_2\}$, alors $\mathbf{n}_{\mathrm{K}}(r_2 e^{i\theta}) \equiv e^{i\theta}$ et $\mathbf{n}_{\mathrm{K}}(r_1 e^{i\theta}) \equiv -e^{i\theta}$.

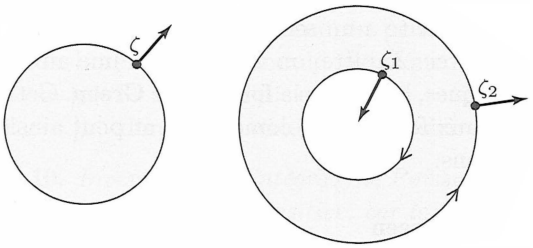


FIG. 52.

Le théorème suivant est une traduction de la formule de Stokes. Ici, ∇u est le **gradient** de la fonction u, c'est-à-dire la fonction vectorielle $\nabla u = (\partial_1 u\,, \partial_2 u) = (\frac{\partial u}{\partial x}\,, \frac{\partial u}{\partial y})$.

Théorème 11.10.1. *Si u est une fonction réelle de classe $\mathcal{C}^1$ au voisinage de* K, *alors*

$$\int_{\mathrm{K}} \nabla u \, dm = \int_{\partial\mathrm{K}} u\, \mathbf{n}_{\mathrm{K}} \, d\sigma \ .$$

Preuve. Fixons u, et paramétrons les composantes connexes de $\partial\mathrm{K}$ par des chemins réguliers $\gamma_1, \dots, \gamma_k$ positivement orientés relativement à $\mathring{\mathrm{K}}$.

En identifiant $\mathbb{R}^2$ à $\mathbb{C}$, on a

$$\mathbf{n}_{\mathrm{K}}(\zeta) = -i\,\frac{\gamma_j'(t)}{|\gamma_j'(t)|}$$

pour tout point $\zeta = \gamma_j(t) \in \partial\mathrm{K}$.

D'autre part, on a $\int_{\partial\mathrm{K}} f\, d\sigma = \sum_j \int f(\gamma_j(t))|\gamma_j'(t)|\, dt$ pour toute fonction scalaire f continue sur $\partial\mathrm{K}$, par définition de la mesure de longueur. En considérant $u\,\mathbf{n}_{\mathrm{K}}$ comme une fonction à valeurs complexes, on a donc

$$\int_{\partial\mathrm{K}} u\, \mathbf{n}_{\mathrm{K}}\, d\sigma = -i \sum_{j=1}^{k} \int u(\gamma_j(t))\, \gamma_j'(t)\, dt = -i \int_{\partial\mathrm{K}} u\, dz \ .$$

D'après la formule de Stokes, on en déduit

$$\int_{\partial K} u\,\mathbf{n}_K\,d\sigma = -i\int_K \frac{\partial u}{\partial \overline{z}}\,d\overline{z}\wedge dz = 2\int_K \frac{\partial u}{\partial \overline{z}}\,dm\ .$$

Enfin, en identifiant $\mathbb{C}$ et $\mathbb{R}^2$, on a $\frac{\partial u}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\,\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{1}{2}\,\nabla u$. Cela termine la démonstration.

Le corollaire suivant porte le nom de **formule de la divergence**.

Corollaire 11.10.2. Si p est un champ de vecteurs de classe $\mathcal{C}^1$ au voisinage de K, alors

$$\int_K \operatorname{div}(p)\,dm = \int_{\partial K} \langle p\,,\mathbf{n}_K\rangle\,d\sigma\ ,$$

où on a noté $\langle\ ,\ \rangle$ le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^2$.

Preuve. Un **champ de vecteurs** sur un ouvert $V\subset\mathbb{R}^2$ est une application $p : V\to\mathbb{R}^2$. En écrivant $p=(p_1,p_2)$, la **divergence** de p est par définition la fonction $\operatorname{div}(p)=\partial_1 p_1+\partial_2 p_2$.

En notant (e_1,e_2) la base canonique de $\mathbb{R}^2$, on a $\operatorname{div}(p)=\langle\nabla p_1,e_1\rangle+\langle\nabla p_2,e_2\rangle$. D'après le théorème précédent, on en déduit

$$\int_K \operatorname{div}(p)\,dm = \int_{\partial K}[p_1\langle e_1,\mathbf{n}_K\rangle + p_2\langle e_2,\mathbf{n}_K\rangle]\,d\sigma = \int_{\partial K}\langle p\,,\mathbf{n}_K\rangle\,d\sigma\ .$$

La formule de Green va découler très simplement de la formule de la divergence ; mais avant de l'énoncer, on a encore besoin d'une définition. Si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ au voisinage de K, la **dérivée normale** de f sur ∂K est la fonction $\frac{\partial f}{\partial n} : \partial K\to\mathbb{C}$ définie par

$$\frac{\partial f}{\partial n}(\zeta) = df(\zeta)\cdot\mathbf{n}_K(\zeta)\ .$$

Lorsque f est à valeurs réelles, on a donc

$$\frac{\partial f}{\partial n} \equiv \langle\nabla f,\mathbf{n}_K\rangle\ .$$

Par exemple, si K est un disque $\overline{D}(0,r_0)$, alors

$$\frac{\partial f}{\partial n}(r_0e^{i\theta}) \equiv df(r_0e^{i\theta})\cdot e^{i\theta} \equiv \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial r}(r_0,\theta),$$

où $\mathbf{f}$ est l'application $(r,\theta)\mapsto f(re^{i\theta})$. On peut donc écrire dans ce cas, avec un léger abus de notation :

$$\frac{\partial f}{\partial n} = \frac{\partial f}{\partial r}\ .$$

De même, si K est une couronne $\{r_1 \leqslant |z| \leqslant r_2\}$, alors

$$\frac{\partial f}{\partial n} = \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial r} & \text{sur } \partial \mathrm{D}(0, r_2)\,, \\ -\dfrac{\partial f}{\partial r} & \text{sur } \partial \mathrm{D}(0, r_1)\,. \end{cases}$$

Voici maintenant la formule de Green.

Corollaire 11.10.3. (Formule de Green.)
Si u, v sont deux fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ au voisinage du compact à bord régulier K, *alors*

$$\int_{\mathrm{K}} (u\,\Delta v - v\,\Delta u)\; dm = \int_{\partial \mathrm{K}} \left(u\,\frac{\partial v}{\partial n} - v\,\frac{\partial u}{\partial n} \right) d\sigma\,.$$

Preuve. On peut visiblement supposer u et v réelles, ce qui permet de parler des champs de vecteurs ∇u et ∇v. Un calcul facile donne

$$\operatorname{div}(u\,\nabla v) = \langle \nabla u\,, \nabla v \rangle + u \operatorname{div}(\nabla v) = \langle \nabla u\,, \nabla v \rangle + u\,\Delta v\,,$$

et de même

$$\operatorname{div}(v\,\nabla u) = \langle \nabla v\,, \nabla u \rangle + v\,\Delta u\,.$$

En appliquant la formule de la divergence, on en déduit

$$\int_{\mathrm{K}} (u\,\Delta v - v\,\Delta u)\; dm = \int_{\partial \mathrm{K}} [u\,\langle \nabla v\,, \mathbf{n}_{\mathrm{K}} \rangle - v\,\langle \nabla u\,, \mathbf{n}_{\mathrm{K}} \rangle]\; d\sigma\,,$$

d'où le résultat.

11.10.2. Une formule du type « Cauchy-Pompeiu »

La formule de Green va maintenant permettre d'obtenir un résultat de « représentation » analogue à la formule de Cauchy-Pompeiu, où l'opérateur de Cauchy-Riemann $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ et la fonction $z \mapsto \frac{1}{z}$ sont remplacés respectivement par l'opérateur de Laplace Δ et la fonction $z \mapsto \log|z|$. Dans ce qui suit, on note $\log|z|$ cette fonction, définie arbitrairement en 0.

Lemme 11.10.4. *La fonction* $\log|z|$ *est localement intégrable sur* $\mathbb{C}$.

Preuve. Cette fonction est mesurable, et

$$\int_{\mathrm{D}(0,\mathrm{R})} |\log|z||\, dm(z) = 2\pi \int_0^{\mathrm{R}} r|\log r|\, dr < +\infty$$

pour tout disque $\mathrm{D}(0, \mathrm{R})$, car la fonction $r \mapsto r \log r$ se prolonge par continuité en 0 et est donc intégrable sur $[0\,;\mathrm{R}]$.

Théorème 11.10.5. *Si u est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ au voisinage d'un disque fermé $\overline{\mathrm{D}} = \overline{\mathrm{D}}(z_0, r)$, alors*

$$u(z_0) = \int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{i\theta})\, \frac{d\theta}{2\pi} + \frac{1}{2\pi} \int_{\overline{\mathrm{D}}} \Delta u(z)\, \log \frac{|z - z_0|}{r}\, dm(z)\ .$$

Preuve. Par translation et dilatation, on se ramène au cas du disque unité $\mathbb{D}$; soit donc u de classe $\mathcal{C}^2$ au voisinage de $\overline{\mathbb{D}}$. Pour $\varepsilon \in]0\,;1[$, notons K_ε la couronne $\{\varepsilon \leqslant |z| \leqslant 1\}$. On va appliquer la formule de Green pour K_ε aux fonctions u et $v = \log|z|$.

La fonction v est harmonique sur $\mathbb{C}^*$, elle est identiquement nulle sur $\partial\mathbb{D}$, et $\frac{\partial v}{\partial r} \equiv \frac{1}{r}$. La formule de Green s'écrit donc

$$-\int_{\mathrm{K}_\varepsilon} \Delta u(z)\, \log|z|\, dm(z) = \int_{\partial\mathbb{D}} u\, d\sigma - \frac{1}{\varepsilon} \int_{\partial \mathrm{D}(0,\varepsilon)} u\, d\sigma_\varepsilon - \log\varepsilon \int_{\partial \mathrm{D}(0,\varepsilon)} \frac{\partial u}{\partial n}\, d\sigma_\varepsilon,$$

où on a noté σ la mesure de longueur sur $\partial\mathbb{D}$ et σ_ε la mesure de longueur sur $\partial\mathrm{D}(0,\varepsilon)$.

Comme $\log|z|$ est intégrable sur $\overline{\mathbb{D}}$, le membre de gauche tend vers $-\int_{\overline{\mathbb{D}}} \Delta u(z)\, \log|z|\, dm(z)$ quand ε tend vers 0. De plus, la différentielle de u est bornée sur le compact $\overline{\mathbb{D}}$, donc $\int_{\partial \mathrm{D}(0,\varepsilon)} \frac{\partial u}{\partial n}\, d\sigma_\varepsilon = \mathrm{O}(\varepsilon)$ au voisinage de 0. Par conséquent $\lim_{\varepsilon\to 0}(\log\varepsilon \int_{\partial \mathrm{D}(0,\varepsilon)} \frac{\partial u}{\partial n}\, d\sigma_\varepsilon) = 0$. Enfin, $\frac{1}{\varepsilon} \int_{\partial \mathrm{D}(0,\varepsilon)} u\, d\sigma_\varepsilon$ tend vers $2\pi\, u(0)$ par continuité de u.

En passant à la limite, on obtient donc

$$-\int_{\overline{\mathbb{D}}} \Delta u(z)\, \log|z|\, dm(z) = \int_{\partial\mathbb{D}} u\, d\sigma - 2\pi\, u(0)\ ,$$

ce qui est le résultat souhaité.

Corollaire 11.10.6. *Notons σ la mesure de longueur normalisée sur $\partial\mathbb{D}$. Si u est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ au voisinage de $\overline{\mathbb{D}}$, alors, pour tout point $a \in \mathbb{D}$, on a*

$$u(a) = \int_{\partial\mathbb{D}} \mathrm{P}_a(\zeta)\, u(\zeta)\, d\sigma(\zeta) + \frac{1}{2\pi} \int_{\overline{\mathbb{D}}} \Delta u(z)\, \log \left| \frac{z - a}{1 - \overline{a}z} \right| dm(z)\ .$$

En particulier, si u est harmonique au voisinage de $\overline{\mathbb{D}}$, alors

$$u(a) = \int_{\partial \mathrm{D}} \mathrm{P}_a(\zeta)\, u(\zeta)\, d\sigma(\zeta)$$

pour tout $a \in \mathbb{D}$.

Preuve. Notons ψ_a l'automorphisme de $\mathbb{S}_2$ défini par $\psi_a(z) = \frac{a - z}{1 - \overline{a}z}$. En appliquant le théorème précédent à $u \circ \psi_a$, on obtient

$$u(a) = \int_{\partial\mathbb{D}} u(\psi_a(\zeta))\, d\sigma(\zeta) + \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{D}} \Delta(u \circ \psi_a)(z)\, \log|z|\, dm(z)\ .$$

Comme dans la deuxième preuve de la formule de Poisson, on montre que la première intégrale est égale à $\int_{\partial\mathbb{D}} u\mathrm{P}_a\, d\sigma$. D'autre part, on a $\Delta(u\circ\psi_a) = (\Delta u\circ\psi_a)\,|\psi_a'|^2$, et comme $\psi_a^{-1} = \psi_a$, le théorème de changement de variable montre que la deuxième intégrale est égale à $\int_{\mathbb{D}} \Delta u(z)\log|\psi_a(z)|\,dm(z)$. Cela termine la démonstration.

Corollaire 11.10.7. *Une fonction $u \in \mathcal{C}^0(\Omega)$ est harmonique si et seulement si elle possède la propriété de la moyenne.*

Preuve. Le fait qu'une fonction harmonique possède la propriété de la moyenne découle immédiatement du théorème 11.10.5. Inversement, supposons que u possède la propriété de la moyenne, et montrons que u est harmonique. Comme $\mathrm{Re}(u)$ et $\mathrm{Im}(u)$ possèdent également la propriété de la moyenne, on se ramène au cas où u est réelle.

Supposons avoir montré que u est de classe $\mathcal{C}^2$. D'après le théorème 11.10.5, on a alors

$$\int_{\overline{\mathrm{D}}} \Delta u(z)\,\log\frac{|z-z_0|}{r}\,dm(z) = 0$$

pour tout disque $\overline{\mathrm{D}} = \overline{\mathrm{D}}(z_0,r) \subset \Omega$. Si u n'était pas harmonique, alors on aurait par exemple $\Delta u(z_0) > 0$ pour un certain $z_0 \in \Omega$, donc $\Delta u(z) \geqslant \varepsilon > 0$ dans un certain disque $\overline{\mathrm{D}} = \overline{\mathrm{D}}(z_0,r)$. Comme $\log(|z-z_0|/r)$ est strictement négatif dans $\mathrm{D}(z_0,r)$, on aurait alors

$$\int_{\overline{\mathrm{D}}} \Delta u(z)\,\log\frac{|z-z_0|}{r}\,dm(z) \leqslant \varepsilon\int_{\overline{\mathrm{D}}} \log\frac{|z-z_0|}{r}\,dm(z) < 0\ ,$$

d'où une contradiction. Ainsi, u est harmonique dans Ω.

Pour achever la démonstration, il suffit donc de prouver que u est de classe $\mathcal{C}^2$.

Fixons $z_0 \in \Omega$. Choisissons $r > 0$ tel que $\overline{\mathrm{D}} = \overline{\mathrm{D}}(z_0,2r)$ soit contenu dans Ω, et choisissons également une fonction $\rho \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{C})$ radiale (c'est-à-dire telle que $\rho(z)$ ne dépend que de $|z|$) à support contenu dans le disque $\mathrm{D}(0,r)$ et vérifiant $\int \rho\,dm = 1$. La fonction $\mathbf{1}_{\mathrm{D}}u$, prolongée par 0 en dehors de Ω, est intégrable sur $\mathbb{C}$, donc la convolée $(\mathbf{1}_{\mathrm{D}}u) * \rho$ est bien définie, et elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ car ρ est de classe $\mathcal{C}^\infty$. Si $z \in \mathrm{D}(z_0,r)$, alors $z - \mathrm{D}(0,r) = \mathrm{D}(z,r) \subset \mathrm{D}$, donc

$$(\mathbf{1}_{\mathrm{D}}u)*\rho(z) = \int_{\mathrm{D}(0,r)} u(z-w)\rho(w)\,dm(w) = \int_0^r s\rho(s)\left(\int_0^{2\pi} u(z-se^{i\theta})\,d\theta\right)ds.$$

Comme u vérifie la propriété de la moyenne, on a $\int_0^{2\pi} u(z-se^{i\theta})\,d\theta = 2\pi\,u(z)$ pour tout $s \in [0\,;r]$; et comme $2\pi\int_0^r s\rho(s)\,ds = \int \rho\,dm = 1$, on en déduit

$$(\mathbf{1}_{\mathrm{D}}u) * \rho(z) = u(z)$$

pour tout $z \in \mathrm{D}(z_0, r)$. Comme $(\mathbf{1}_{\mathrm{D}} u) * \rho$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$, cela entraîne que u est de classe $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de tout point $z_0 \in \Omega$.

Le résultat suivant est l'analogue du corollaire 3.3.5.

Proposition 11.10.8. *Si $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ à support compact, alors, pour tout point $z_0 \in \mathbb{C}$, on a*

$$\int_{\mathbb{C}} \Delta\varphi(z)\, \log|z - z_0|\, dm(z) = 2\pi\, \varphi(z_0)\ .$$

Preuve. En choisissant $r > 0$ tel que $\mathrm{supp}(\varphi)$ soit contenu dans le disque ouvert $\mathrm{D}(z_0, r)$ et en appliquant le théorème 11.10.5, on obtient

$$\int_{\mathbb{C}} \Delta\varphi(z)\, \log|z - z_0|\, dm(z) - \log r \int_{\mathbb{C}} \Delta\varphi\, dm = 2\pi\varphi(z_0)\ .$$

Comme φ est à support compact, on a $\int_{\mathbb{C}} \Delta\varphi\, dm = 0$, d'où le résultat.

Corollaire 11.10.9. *Au sens des distributions, on a $\Delta(\log|z|) = 2\pi\, \delta_0$.*

11.10.3. Potentiel logarithmique

Rappelons que si f est une fonction localement intégrable sur $\mathbb{C}$ et si μ est une mesure sur $\mathbb{C}$ à support compact, alors on peut définir la convolée $f * \mu$ presque partout par la formule

$$f * \mu\,(z) = \int_{\mathbb{C}} f(z - \zeta)\, d\mu(\zeta)\ ,$$

la fonction $f * \mu$ étant de plus localement intégrable sur $\mathbb{C}$. Cela a été démontré au chapitre 3 dans la section consacrée à la transformée de Cauchy d'une mesure.

Définition 11.10.10. *Si μ est une mesure borélienne complexe sur $\mathbb{C}$ à support compact, le* **potentiel logarithmique** *de μ est la fonction*

$$\mathrm{U}^\mu = \frac{1}{2\pi} \log|z| * \mu.$$

En d'autres termes, U^μ est la fonction localement intégrable définie presque partout par la formule

$$\mathrm{U}^\mu(z) = \frac{1}{2\pi} \int \log|z - \zeta|\ d\mu(\zeta)\ .$$

L'utilité du potentiel logarithmique apparaîtra au chapitre suivant. On se contente ici de souligner deux résultats analogues à ceux établis au chapitre 3 pour la transformée de Cauchy.

Proposition 11.10.11. *On a* $\Delta \mathrm{U}^\mu = \mu$ *au sens des distributions.*

Preuve. Cela découle du corollaire 11.10.9.

Corollaire 11.10.12. *Si* $\mathrm{U}^\mu = 0$ *presque partout, alors* $\mu = 0$.

Proposition 11.10.13. $\mathrm{U}^\mu(z)$ *est défini en tout point* $z \in \mathbb{C}\backslash\mathrm{supp}(\mu)$, *et la fonction* U^μ *est harmonique dans* $\mathbb{C}\backslash\mathrm{supp}(\mu)$.

Preuve. On dérive sous l'intégrale et on utilise l'harmonicité de $\log|z|$ sur $\mathbb{C}^*$.

Exercices

11.1. 1) Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{C}^*$ par $\varphi(z) = \log \frac{|z|^2}{(1+|z|^4)^2}$. Montrer qu'on a $\Delta\varphi + 32e^\varphi = 0$.

2) Soit f une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}^*$ telle que $f'(z) \neq 0$ pour tout z. Montrer que la fonction ψ définie par

$$\psi(z) = \log \frac{|f(z)|^2\,|f'(z)|^2}{\left(1+|f(z)|^4\right)^2}$$

vérifie également $\Delta\psi + 32e^\psi = 0$.

11.2. Montrer que si f est une fonction harmonique telle que la fonction $z \mapsto zf(z)$ est également harmonique, alors f est holomorphe.

11.3. Montrer que si u une fonction harmonique sur un ouvert connexe telle que u^2 est également harmonique, alors u ou $\overline{u}$ est holomorphe. En déduire que dans un ouvert connexe, le carré d'une fonction harmonique réelle non constante n'est jamais harmonique.

11.4. Soient u et v deux fonctions harmoniques réelles sur un ouvert connexe. Montrer que uv est harmonique si et seulement si il existe une constante $c \in \mathbb{R}$ telle que $u + icv$ est holomorphe.

11.5. Déterminer toutes les fonctions harmoniques radiales sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

11.6. Soit $u : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ harmonique, et soit v la **conjuguée harmonique** de u, qui est par définition l'unique fonction v harmonique réelle dans $\mathbb{D}$ telle que $v(0) = 0$ et $u + iv \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$. On écrit $u(z) = \sum_1^\infty c_{-n}\bar{z}^n + c_0 + \sum_1^\infty c_n z^n$, et $v(z) = \sum_1^\infty d_{-n}\bar{z}^n + d_0 + \sum_1^\infty d_n z^n$. Exprimer les coefficients d_n à l'aide des c_n.

11.7. Soit u harmonique réelle sur un ouvert connexe de $\mathbb{C}$. Que peut-on dire de l'ensemble $\{z;\ \nabla u(z) = 0\}$?

11.8. Soit $u : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ définie par $u(x+iy) = e^x\,(x\cos y - y\sin y)$. Montrer que u est harmonique et trouver une fonction entière f telle que $u = \mathrm{Re}(f)$.

11.9. Montrer que si u est une fonction harmonique réelle sur $\mathbb{C}^*$, alors il existe une fonction $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^*)$ et une constante $b \in \mathbb{R}$ telles que $u = \mathrm{Re}(f) + b \log|z|$. On pourra s'inspirer de la démonstration du théorème 11.2.3.

11.10. Montrer que Ω est simplement connexe si et seulement si toute fonction harmonique réelle sur Ω est la partie réelle d'une fonction holomorphe.

11.11. Montrer que si u est harmonique et s'annule une infinité de fois sur un segment $[a\,;b] \subset \Omega$, alors $u(x) \equiv 0$ sur $[a\,;b]$.

11.12. (Inégalité de Borel-Carathéodory.)

1) Soit g une fonction holomorphe au voisinage d'un disque fermé $\overline{\mathrm{D}}(0,\mathrm{R})$, et soit $v = \mathrm{Re}(g)$. En considérant d'abord les parties réelles, montrer que pour tout $z \in \mathrm{D}(0,\mathrm{R})$, on a

$$g(z) - g(0) = \int_0^{2\pi} \frac{2z}{\mathrm{R}e^{i\theta} - z}\, v(\mathrm{R}e^{i\theta})\, \frac{d\theta}{2\pi}\,\cdot$$

2) Soit f une fonction holomorphe au voisinage d'un disque fermé $\overline{\mathrm{D}}(0,\mathrm{R})$. Pour $r \leqslant \mathrm{R}$, on pose

$$\mathrm{M}(r) = \sup\{|f(z)|;\ |z| = r\} \quad \text{et} \quad \mathrm{A}(r) = \sup\{\mathrm{Re}(f(z));\ |z| = r\}\,.$$

En appliquant 1) à la fonction $f - f(0)$, montrer que pour tout $r < \mathrm{R}$, on a

$$\mathrm{M}(r) \leqslant \frac{2r}{\mathrm{R} - r}\,\mathrm{A}(\mathrm{R}) + \frac{\mathrm{R} + r}{\mathrm{R} - r}\,|f(0)|\,\cdot$$

11.13. Soit u une fonction harmonique sur $\mathbb{C}$. Montrer que pour toute fonction $\rho \in \mathrm{L}^\infty(\mathbb{C})$ radiale, à support compact et vérifiant $\int \rho\, dm = 1$, on a $u * \rho = u$.

11.14. Soit (u_n) une suite de fonctions harmoniques sur $\mathbb{C}$. On suppose que (u_n) tend vers 0 au sens des distributions.

1) En utilisant l'exercice précédent, montrer que (u_n) converge simplement vers 0.

2) Montrer que la convergence est en fait uniforme sur tout compact. On pourra penser à appliquer le théorème de Banach-Steinhaus dans un espace du type $\mathcal{D}_\mathrm{K} = \{\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{C});\ \mathrm{supp}(\varphi) \subset \mathrm{K}\}$, où K est un compact de $\mathbb{C}$.

11.15. Soit $\mathrm{D} \subset \mathbb{C}$ un disque ouvert de centre a. Montrer que si $u : \mathrm{D} \to \mathbb{C}$ est harmonique et intégrable sur D, alors $u(a) = \frac{1}{m(\mathrm{D})} \int_\mathrm{D} u\, dm$.

11.16. (Une caractérisation des disques.)

Soit $\mathrm{V} \subset \mathbb{C}$ un ouvert borné. On suppose qu'il existe un point $a \in \mathrm{V}$ tel que pour toute fonction $u : \mathrm{V} \to \mathbb{C}$ harmonique et intégrable sur V, on a $u(a) = \frac{1}{m(\mathrm{V})} \int_\mathrm{V} u\, dm$. Le but de l'exercice est de montrer que V est un disque de centre a.

0) On pose $r = d(a, \partial\mathrm{V})$. Montrer qu'on a $\mathrm{D}(a,r) \subset \mathrm{V}$ et qu'il existe un point $b \in \partial\mathrm{V}$ tel que $|b - a| = r$. On notera D le disque $\mathrm{D}(a,r)$.

1) On définit $u : V \to \mathbb{R}$ par

$$u(z) = \frac{|z-a|^2 - r^2}{|z-b|^2} + 1 .$$

Vérifier qu'on a $u(z) \equiv 2\ \mathrm{Re}(\frac{z-a}{z-b})$, et montrer que u est intégrable sur V.

2) En utilisant l'hypothèse faite sur V et l'exercice précédent, montrer qu'on a $\int_{V\setminus D} u\, dm = 0$. En déduire qu'on a $m(V\setminus D) = 0$.

3) Conclure.

11.17. Soit u une fonction harmonique réelle sur Ω.

1) Soit $a \in \Omega$ vérifiant $u(a) = 0$. Montrer que pour tout disque $\overline{D} = \overline{D}(a,r) \subset \Omega$, on a $\sup_{\partial D} u \geqslant 0$ et $\inf_{\partial D} u \leqslant 0$.

2) Montrer que u n'a aucun zéro isolé.

11.18. On note $\mathcal{B}$ l'ensemble des fonctions $f \in A(\mathbb{D})$ vérifiant $|f(\zeta)| \equiv 1$ sur $\mathbb{T}$. Le but de l'exercice est de montrer que la boule unité de $A(\mathbb{D})$ est l'enveloppe convexe fermée de $\mathcal{B}$.

1) Soit $f \in A(\mathbb{D})$ une fonction polynomiale vérifiant $\|f\|_\infty < 1$.

a) On note g la fonction $z \mapsto z^N$, où $N = \deg(f)$, et pour $w \in \overline{\mathbb{D}}$, on pose

$$f_w = \frac{f + wg}{1 + wg\overline{f}} .$$

Justifier la définition, et montrer que si $w \in \mathbb{T}$, alors $f_w \in \mathcal{B}$.

b) Montrer qu'on peut écrire

$$f = \int_0^{2\pi} f_{e^{i\theta}} \frac{d\theta}{2\pi} ,$$

où l'intégrale est à valeurs dans $A(\mathbb{D})$.

c) En déduire que f appartient à l'enveloppe convexe fermée de $\mathcal{B}$.

2) Conclure.

11.19. Le but de l'exercice est de montrer qu'une fonction $f \in A(\mathbb{D})$ vérifie $|f(\zeta)| \equiv 1$ sur $\mathbb{T}$ si et seulement si elle est de la forme

$$f(z) = \lambda \prod_{i=1}^{n} \frac{z - a_i}{1 - \overline{a}_i z} ,$$

où $|\lambda| = 1$ et $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{D}$.

1) Soit $f \in A(\mathbb{D})$, sans zéros dans $\mathbb{D}$ et vérifiant $|f(\zeta)| \equiv 1$ sur $\mathbb{T}$. En appliquant le principe du maximum à $\log|f|$, montrer que f est constante.

2) Montrer que si $f \in A(\mathbb{D})$ vérifie $|f(\zeta)| \equiv 1$ sur $\mathbb{T}$, alors f n'a qu'un nombre fini de zéros dans $\mathbb{D}$.

3) Conclure.

11.20. (Inégalité de von Neumann.)

Soit H un espace de Hilbert, et soit $T \in \mathcal{L}(H)$ vérifiant $\|T\| < 1$. D'après l'exercice 3.48 appliqué à $A = \mathcal{L}(H)$, on peut définir $f(T)$ pour toute fonction $f \in A(\mathbb{D})$, et l'application $f \mapsto f(T)$ est continue de $A(\mathbb{D})$ dans $\mathcal{L}(H)$.

1) Soit $a \in \mathbb{D}$. Calculer $\|(T - aId)x\|^2 - \|(Id - \overline{a}T)x\|^2$ pour $x \in H$, et en déduire que si φ_a est la transformation de Moebius associée à a, $\varphi_a(z) = \frac{a-z}{1-\overline{a}z}$, alors $\|\varphi_a(T)\| \leqslant 1$.

2) En utilisant les deux exercices précédents, montrer que pour toute fonction $f \in A(\mathbb{D})$, on a

$$\|f(T)\| \leqslant \|f\|_\infty .$$

3) Montrer que l'inégalité précédente est encore vraie si on suppose seulement $\|T\| \leqslant 1$.

11.21. Montrer que si Ω est un demi-plan, alors la fonction $z \mapsto d(z, \partial\Omega)$ est harmonique sur Ω.

11.22. (Une caractérisation des demi-plans.)

On suppose que la fonction r définie par $r(z) = d(z, \partial\Omega)$ est harmonique sur Ω. Le but de l'exercice est de montrer que Ω est un demi-plan.

1) Montrer qu'on peut se ramener au cas où Ω contient un point $x_0 > 0$ tel que $r(x_0) = x_0$. Le disque $D(x_0, x_0)$ est alors contenu dans Ω.

2) *a*) Montrer qu'on a $r(x) = x$ pour tout $x \in]0\,;x_0]$.

b) En utilisant l'exercice 11.11 , montrer qu'on a en fait $r(x) = x$ pour tout $x \in]0\,;2x_0[$.

c) En déduire qu'on a $2x_0 \in \Omega$ et $r(2x_0) = 2x_0$; on a alors $D(2x_0, 2x_0) \subset \Omega$.

3) On note U le demi-plan $\{\mathrm{Re}(z) > 0\}$.

a) Observer qu'on a $U = \bigcup_0^\infty D(2^n x_0, 2^n x_0)$, puis montrer que U est contenu dans Ω.

b) Déduire de *a*) que la fonction $z \mapsto r(z) - \mathrm{Re}(z)$ est positive sur U, puis montrer qu'on a $r(z) = \mathrm{Re}(z)$ pour tout $z \in U$.

c) Montrer qu'on a $\Omega \cap \partial U = \emptyset$, et conclure.

11.23. Soit $u : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ la fonction harmonique définie par $u(z) = P(z\,,1)$, où P est le noyau de Poisson du disque unité. On note v la conjuguée harmonique de u (voir l'exercice 11.6). Donner une formule simple pour $v(re^{it})$.

11.24. (Formule de Poisson dans le demi-plan supérieur.)

1) Montrer que l'homographie ψ définie par $\psi(w) = i\,\frac{w+1}{1-w}$ envoie le disque unité $\mathbb{D}$ sur le demi-plan supérieur $\mathbf{U} = \{\mathrm{Im}(z) > 0\}$ et $\partial\mathbb{D}$ sur $\partial_{\mathbf{S}_2}\mathbf{U} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

2) *a*) Déterminer l'image par ψ de la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{T} = \partial\mathbb{D}$.

b) Pour $(z\,,t) \in \mathbf{U} \times \mathbb{R}$, calculer $P_{\mathbf{D}}(\psi^{-1}(z), \psi^{-1}(t))$.

3) Soit $f : \overline{\mathbf{U}} \to \mathbb{C}$ harmonique dans $\mathbf{U}$, continue sur $\overline{\mathbf{U}}$ et admettant une limite en ∞. Montrer que pour $z = x + iy \in \mathbf{U}$, on peut écrire

$$f(z) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y}{y^2 + (x-t)^2}\, \mathbf{f}(t)\, dt\ ,$$

où $\mathbf{f} = f_{|\mathbb{R}}$.

11.25. (Formule de Poisson « opératorielle ».)

Dans tout l'exercice, H est un espace de Hilbert complexe. On note $\mathcal{L}(H)$ l'ensemble des opérateurs linéaires continus sur H.

1) Pour $S \in \mathcal{L}(H)$ vérifiant $\|S\| < 1$, on pose

$$P_S = \sum_1^\infty S^n + Id + \sum_1^\infty S^{*n},$$

où S^* est l'adjoint de l'opérateur S. Justifier la définition de P_S en montrant que les deux séries convergent en norme dans $\mathcal{L}(H)$.

2) Soit $T \in \mathcal{L}(H)$ vérifiant $\|T\| < 1$.

a) Montrer que l'application $\theta \mapsto P_{e^{-i\theta}T}$ est continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{L}(H)$.

b) Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer l'intégrale (vectorielle) $\int_0^{2\pi} e^{in\theta} P_{e^{-i\theta}T}\, d\theta$.

c) En déduire que pour tout polynôme $Q \in \mathbb{C}[X]$, on a la « formule de Poisson opératorielle »

$$Q(T) = \int_0^{2\pi} Q(e^{i\theta}) P_{e^{-i\theta}T} \frac{d\theta}{2\pi}.$$

11.26. (Inégalité de von Neumann, 2.)

On conserve les notations de l'exercice précédent.

1) Montrer que si $S \in \mathcal{L}(H)$ vérifie $\|S\| < 1$, alors

$$P_S = (Id - S^*)^{-1} - Id + (Id - S)^{-1} = (Id - S^*)^{-1}(Id - S^*S)\,(Id - S)^{-1}.$$

En déduire que P_S est un opérateur **positif**, ce qui signifie qu'on a $\langle P_S x, x\rangle \geqslant 0$ pour tout $x \in H$.

2) Soit $[a;b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$, et soit $u : [a;b] \to \mathcal{L}(H)$ continue. On suppose que pour tout $t \in [a;b]$, $u(t)$ est un opérateur positif. Soit également $\varphi : [a;b] \to \mathbb{C}$ continue.

a) On note A l'opérateur $\int_a^b \varphi(t)u(t)\, dt$. Montrer que si $x, y \in H$, alors

$$|\langle Ax, y\rangle| \leqslant \|\varphi\|_\infty \left[\int_a^b \langle u(t)x, x\rangle\, dt\right]^{1/2} \left[\int_a^b \langle u(t)y, y\rangle\, dt\right]^{1/2}$$

b) Déduire de *a*) qu'on a

$$\left\|\int_a^b \varphi(t)u(t)\, dt\right\| \leqslant \|\varphi\|_\infty \left\|\int_a^b u(t)\, dt\right\|.$$

3) Pour $Q \in \mathbb{C}[X]$, on pose $\|Q\|_\infty = \sup\{|Q(\zeta)|;\ |\zeta| = 1\}$. Montrer que si $T \in \mathcal{L}(H)$ vérifie $\|T\| < 1$, alors

$$\|Q(T)\| \leqslant \|Q\|_\infty$$

pour tout polynôme $Q \in \mathbb{C}[X]$.

4) Montrer que l'inégalité précédente est encore valable si on suppose seulement $\|T\| \leqslant 1$.

11.27. (Lemme de Weyl.)

Soit u une fonction continue sur $\mathbb{R}^n$ et vérifiant $\Delta u = 0$ au sens des distributions. Le but de l'exercice est de montrer que u est harmonique.

1) Montrer que si $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{C})$, alors la fonction $u * \varphi$ est harmonique.

2) Soit $\rho \in \mathcal{D}(\mathbb{C})$ vérifiant $\int \rho \, dm = 1$, et pour $\varepsilon > 0$, posons $u_\varepsilon = u * \rho_\varepsilon$, où $\rho_\varepsilon(z) = \frac{1}{\varepsilon^2}\rho(\frac{z}{\varepsilon})$. Montrer que la famille $(u_\varepsilon)_{\varepsilon \leqslant 1}$ est uniformément bornée sur tout compact.

3) Conclure.

11.28. Soit (u_n) une suite de fonctions harmoniques positives dans $\mathbb{D}$. On suppose que $u_n(0)$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini. Montrer que la suite (u_n) tend vers 0 uniformément sur tout compact de $\mathbb{D}$.

11.29. (Un autre théorème de Harnack.)

Soit (u_n) une suite de fonctions harmoniques positives sur $\mathbb{D}$. Montrer que l'une des deux conclusions suivantes a lieu.

(1) (u_n) admet une sous-suite qui converge uniformément sur tout compact.

(2) (u_n) admet une sous-suite qui tend vers $+\infty$ uniformément sur tout compact.

11.30. Soit u une fonction harmonique positive dans $\mathbb{D}$.

1) *a*) Montrer que pour $r \in]0;1[$ et $|h| = 1$ on a $|u(rh) - u(0)| \leqslant \frac{2r}{1-r}\, u(0)$. En déduire l'inégalité

$$|\nabla u(0)| \leqslant 2\, u(0)\,.$$

b) Redémontrer cette inégalité en dérivant la formule de Poisson.

2) Montrer que pour tout $a \in \mathbb{D}$, on a

$$|\nabla u(a)| \leqslant \frac{2}{1-|a|^2}\, u(a)\,.$$

11.31. Soit u harmonique réelle sur $\mathbb{C}$. Pour $r \geqslant 0$, on pose

$$\mathrm{M}(r) = \sup\{u(z);\ |z| = r\}\,.$$

1) En utilisant les inégalités de Harnack, montrer que si $0 < r \leqslant \mathrm{R}$, alors

$$\mathrm{M}(r) \leqslant \frac{2r}{\mathrm{R}+r}\,\mathrm{M}(\mathrm{R}) + \frac{\mathrm{R}-r}{\mathrm{R}+r}\,u(0)\,.$$

2) En déduire que si u vérifie $\liminf_{\mathrm{R}\to\infty} \frac{\mathrm{M}(\mathrm{R})}{\mathrm{R}} \leqslant 0$, alors u est constante.

11.32. Soit $\mathbf{u}$ une fonction réelle intégrable sur $\mathbb{T}$, que l'on considérera comme une fonction 2π-périodique sur $\mathbb{R}$. On note u l'intégrale de Poisson de $\mathbf{u}$, et v la conjuguée harmonique de u (voir l'exercice 11.6).

1) Montrer que pour $r < 1$, on a

$$v(re^{i\theta}) \equiv \int_{-\pi}^{\pi} \mathbf{u}(\theta - t)\, \mathrm{Q}_r(t)\, \frac{dt}{2\pi}\,,$$

où Q_r est le **noyau de Poisson conjugué**, défini par

$$\mathrm{Q}_r(t) = \frac{2r\,\sin t}{1 - 2r\,\cos t + r^2}\,.$$

2) Soit $\theta_0 \in \mathbb{R}$; on suppose que la fonction $\mathbf{u}$ est dérivable en θ_0. Montrer que la fonction $t \mapsto \mathbf{u}(\theta_0 - t) \operatorname{cotan} \frac{t}{2}$ est intégrable sur $[-\pi;\pi]$, et qu'on a

$$\lim_{r\to 1} v_r(e^{i\theta_0}) = \int_{-\pi}^{\pi} \mathbf{u}(\theta_0 - t) \operatorname{cotan}\left(\frac{t}{2}\right) \frac{dt}{2\pi} \cdot$$

11.33. (Zéros des fonctions de $A(\mathbb{D})$.)

On a vu au chapitre 4 – corollaire 4.4.13 – que si f est une fonction de $A(\mathbb{D})$ non identiquement nulle, alors l'ensemble $\{\zeta \in \mathbb{T};\ f(\zeta) = 0\}$ est un fermé de mesure de Lebesgue nulle dans $\mathbb{T}$. Le but de l'exercice est de montrer la réciproque : *si $E \subset \mathbb{T}$ est un fermé de mesure nulle, alors il existe une fonction $f \in A(\mathbb{D})$ telle que $f^{-1}(0) = E$; de plus, on peut imposer $\operatorname{Re}(f) < 0$ en tout point de $\overline{\mathbb{D}} \setminus E$.* Dans la suite, on fixe un tel fermé E.

1) Montrer qu'il existe une fonction $\mathbf{u} : \mathbb{T} \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ vérifiant les propriétés suivantes :

(i) $\mathbf{u}$ est continue, $\mathbf{u} \leqslant -1$, et $\mathbf{u}$ est intégrable sur $\mathbb{T}$;

(ii) $\mathbf{u} \equiv -\infty$ sur E;

(iii) $\mathbf{u}$ est à valeurs réelles sur $\mathbb{T} \setminus E$, et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{T} \setminus E$.

2) En utilisant l'exercice précédent, en déduire l'existence d'une fonction $h \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ vérifiant les propriétés suivantes :

(i) $\operatorname{Re}(h) \leqslant -1$;

(ii) $\lim_{r\to 1} |h(r\zeta)| = +\infty$ pour tout $\zeta \in E$;

(iii) $h(r\zeta)$ admet une limite dans $\mathbb{C}$ pour tout $\zeta \in \mathbb{T} \setminus E$.

3) Conclure.

11.34. Soit $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$.

1) Soit $z_0 \in \Omega$ et soit R tel que $D(z_0, R) \subset \Omega$. Pour $r < R$, on pose $I(r) = \int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{i\theta}) \frac{d\theta}{2\pi}$.

a) Montrer que I est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0;R[$, et montrer, en utilisant l'expression du laplacien en coordonnées polaires, qu'on a

$$\frac{d}{dr}\left(rI'(r)\right) \equiv r \int_0^{2\pi} \Delta u(z_0 + re^{i\theta}) \frac{d\theta}{2\pi} \cdot$$

b) Montrer qu'on a

$$\lim_{r\to 0} \frac{I(r) - I(0)}{r^2} = \frac{1}{4} \Delta u(z_0) \cdot$$

2) Déduire de 1) une démonstration du fait que u est harmonique si et seulement si elle possède la propriété de la moyenne.

11.35. Soit $a \in \Omega$, et soit u une fonction continue sur Ω et harmonique sur $\Omega \setminus \{a\}$. Montrer que u est harmonique sur Ω.

11.36. Soit $\mathbf{U}$ le demi-plan supérieur $\{\operatorname{Im}(z) > 0\}$ et soit $f : \overline{\mathbf{U}} \to \mathbb{C}$ continue, harmonique dans $\mathbf{U}$, nulle sur $\mathbb{R} = \partial\mathbf{U}$. Montrer qu'on définit une extension harmonique de f à $\mathbb{C}$ tout entier en posant

$$\mathrm{F}(z) = \begin{cases} f(z) & \text{si } z \in \overline{\mathrm{U}}, \\ -f(\bar{z}) & \text{sinon.} \end{cases}$$

11.37. Convenons d'appeler *fonction radiale normalisée* toute fonction $\rho \in \mathrm{L}^\infty(\mathbb{C})$ radiale, à support compact et vérifiant $\int \rho\, dm = 1$. Montrer que pour une fonction u continue sur $\mathbb{C}$, les propriétés suivantes sont équivalentes :

(1) u est harmonique ;

(2) $u * \rho = u$ pour toute fonction radiale normalisée ρ ;

(3) $u * \rho = u$ pour toute fonction radiale normalisée ρ de classe $\mathcal{C}^\infty$.

11.38. Montrer qu'une fonction continue $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est affine si et seulement si on a $u(t) = \frac{1}{2}(u(t-r) + u(t+r))$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ et pour tout $r > 0$.

11.39. Soit $\mathrm{V} = \mathbb{D}\backslash\{0\}$, et soit $\mathbf{u} : \partial\mathrm{V} \to \mathbb{R}$ définie par $\mathbf{u}(0) = 1$ et $\mathbf{u}(\zeta) = 0$ pour $\zeta \in \partial\mathbb{D}$. Dans cet exercice, on va montrer de deux manières qu'on ne peut pas résoudre le problème de Dirichlet pour $\mathbf{u}$ et V.

1) Démontrer le résultat en utilisant l'exercice 11.35.

2) Supposons que le problème de Dirichlet pour $\mathbf{u}$ et V admette une solution u.

a) Montrer que si λ est un nombre complexe de module 1, alors la fonction $z \mapsto u(\lambda z)$ est également solution du problème de Dirichlet pour $\mathbf{u}$ et V. En déduire que u est une fonction radiale.

b) Montrer qu'il existe deux constantes $a, b \in \mathbb{R}$ telles que $u(r) \equiv a + b \log r$ sur $]0\,;1[$.

c) Conclure.

11.40. Soit $u : \mathbb{C}^* \to \mathbb{R}$ une fonction harmonique vérifiant $u(z) = o(\log|z|)$ au voisinage de 0.

1) Soit $v : \overline{\mathbb{D}} \to \mathbb{R}$ la solution du problème de Dirichlet pour $u_{|\partial\mathbb{D}}$ et $\mathbb{D}$. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, on a $v(z) + \varepsilon \log|z| \leqslant u(z) \leqslant v(z) - \varepsilon \log|z|$ sur $\partial\mathrm{V}_\delta$ si $\delta > 0$ est suffisamment petit, où V_δ est la couronne $\{\delta < |z| < 1\}$.

2) Montrer que u se prolonge en une fonction harmonique sur $\mathbb{C}$.

11.41. Soit V un demi-plan ou une bande ouverte de $\mathbb{C}$. Montrer que si $\mathbf{f} : \overline{\mathrm{V}} \to \mathbb{C}$ est continue sur $\overline{\mathrm{V}}$, harmonique sur V et admet une limite en ∞, alors le problème de Dirichlet pour V et $\mathbf{f}$ admet une unique solution.

11.42. (Intégrale de Poisson dans le demi-plan supérieur.)

Le **noyau de Poisson** du demi-plan supérieur $\mathbf{U} = \{\mathrm{Im}(z) > 0\}$ est la fonction $\mathrm{P}_\mathbf{U} : \mathbf{U} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$\mathrm{P}_\mathbf{U}(z\,,t) = \frac{1}{\pi}\,\frac{\mathrm{Im}(z)}{|z-t|^2} = \frac{1}{\pi}\,\frac{y}{(x-t)^2+y^2}\,,$$

où on a posé $z = x + iy$. Pour $z \in \mathbf{U}$, on note P_z la fonction $t \mapsto \mathrm{P}_\mathbf{U}(z\,,t)$.

L'**intégrale de Poisson** d'une fonction $\mathbf{f} \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}, \frac{dt}{1+t^2})$ est la fonction $\mathrm{P}_\mathbf{U}\mathbf{f} : \mathbf{U} \to \mathbb{C}$ définie par

$$\mathrm{P}_\mathbf{U}\mathbf{f}\,(x+iy) = \int_\mathbb{R} \mathbf{f}(t)\mathrm{P}_z(t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{f}(t)\mathrm{P}_y(x-t)\,dt\,.$$

1) Montrer que la fonction $P_{\mathbf{U}}\mathbf{f}$ est bien définie, et qu'elle est harmonique sur $\mathbf{U}$.

2) Montrer que si $\mathbf{f}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, alors $P_{\mathbf{U}}\mathbf{f}(z)$ tend vers 0 quand z tend vers l'infini en restant dans un demi-plan $\{\mathrm{Im}(z) \geqslant \delta\}$, $\delta > 0$.

11.43. (Problème de Dirichlet dans le demi-plan supérieur.)

On garde les notations de l'exercice précédent, en écrivant P_y au lieu de P_{iy} pour $y > 0$.

1) Montrer que la famille $(P_y)_{y>0}$ est un noyau de sommabilité sur $\mathbb{R}$, autrement dit qu'elle vérifie les propriétés suivantes :

$$\begin{cases} \int P_y \, dm = 1 \ \text{ pour tout } y\,; \\ (P_y)_{y>0} \ \text{ est bornée en norme } L^1\,; \\ \lim\limits_{y\to 0} \int_{|t|\geqslant\delta} |P_y(t)|\, dt = 0 \ \text{ pour tout } \delta > 0\,. \end{cases}$$

2) Soit $\mathbf{f} : \partial\mathbf{U} \to \mathbb{C}$ continue bornée.

a) Montrer que le problème de Dirichlet pour $\mathbf{U}$ et $\mathbf{f}$ admet une solution et expliciter une telle solution.

b) Y a-t-il une seule solution au problème de Dirichlet ?

c) En utilisant l'exercice 11.36 , montrer qu'il y a existence et unicité d'une solution bornée.

11.44. En utilisant l'exercice précédent, montrer que la formule de Poisson établie à l'exercice 11.24 reste valable si on suppose seulement f harmonique dans $\mathbf{U}$, et continue bornée sur $\overline{\mathbf{U}}$.

11.45. Le but de l'exercice est de montrer de manière « abstraite » qu'il existe des fonctions continues dont la série de Fourier diverge en 0. Pour $\mathbf{u} \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$ et $N \in \mathbb{N}$, on posera $\varphi_N(\mathbf{u}) = S_N\mathbf{u}(0) = \sum_{-N}^{N} \hat{\mathbf{u}}(n)$.

1) Vérifier l'identité $\varphi_N(\mathbf{u}) = \int_0^{2\pi} D_N(t)\, \mathbf{u}(e^{it})\, dt$, où

$$D_N(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{\sin(N+1/2)t}{\sin(t/2)}$$

(**noyau de Dirichlet**). En déduire que les φ_N sont des formes linéaires continues sur $\mathcal{C}(\mathbb{T})$ et majorer $||\varphi_N||$.

2) En approchant la fonction $t \mapsto sgn(D_N(t))$ par des fonctions continues convenables, montrer que pour tout $N \in \mathbb{N}$, on a $||\varphi_N|| = \int_0^{2\pi} |D_N(t)|\, dt$.

3) Montrer que $||\varphi_N||$ tend vers l'infini avec N, et conclure à l'aide du théorème de Banach-Steinhaus.

11.46. (Un théorème de Frobenius.)

Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite dans un espace de Banach X ; on pose $A_n = \sum_0^n a_k$.

1) Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $T_n = \sum_0^n A_k$. Montrer que si la série $\sum T_n\, z^n$ est convergente pour un certain $z \in \mathbb{C}$, alors la série $\sum a_n\, z^n$ l'est également, avec

$$\sum_0^\infty a_n\, z^n = (1-z)^2 \sum_0^\infty T_n\, z^n\,.$$

2) On suppose que la série $\sum a_n$ est sommable au sens de Cesàro, autrement dit que $\sigma_n = \frac{1}{n+1} \sum_0^n A_k$ admet une limite $l \in X$. Montrer que $\sum a_n$ converge au sens d'Abel-Poisson vers cette même limite l.

11.47. (Procédés de sommation.)

Soit Ω un espace topologique, et soit ω_0 un point non isolé de Ω. On dira qu'une suite (c_j) de fonctions à valeurs complexes définies sur $\Omega \setminus \{\omega_0\}$ est un *bon procédé de sommation* si elle vérifie la propriété suivante : pour toute suite numérique (x_j) admettant une limite l, toutes les séries $\sum c_j(\omega)\, x_j$ convergent, et $\lim_{\omega \to \omega_0} \sum_0^\infty c_j(\omega)\, x_j = l$.

1) On suppose que la suite (c_j) vérifie les conditions suivantes (**conditions de Toeplitz**) :

(1) $\sup_\Omega \sum_0^\infty |c_j(\omega)| < +\infty$;

(2) $\lim_{\omega \to \omega_0} \sum_0^\infty c_j(\omega) = 1$;

(3) $\lim_{\omega \to \omega_0} c_j(\omega) = 0$ pour tout $j \geqslant 0$.

Montrer que (c_j) est un bon procédé de sommation.

2) Montrer que 1) permet de retrouver le théorème de Cesàro et le théorème d'Abel sur les séries entières.

3) Montrer que tout bon procédé de sommation vérifie les conditions (1), (2), (3). Pour (1), on pourra penser au théorème de Banach-Steinhaus.

11.48. (Théorème de dérivation de Lebesgue.)

Le but de l'exercice est de démontrer le théorème de dérivation de Lebesgue, dont on rappelle l'énoncé : *si f est une fonction localement intégrable sur $\mathbb{R}$ et si on pose $F(x) = \int_0^x f(t)\, dt$, alors F est dérivable en presque tout point $x \in \mathbb{R}$ et $F' = f$ presque partout.* Comme toujours, on notera m la mesure de Lebesgue.

1) Montrer que le théorème est vrai pour une fonction continue.

2) Pour toute fonction φ intégrable sur $\mathbb{R}$, on définit la fonction $M_\varphi : \mathbb{R} \to [0\,; +\infty]$ par

$$M_\varphi(x) = \sup \left\{ \frac{1}{m(I)} \int_I |\varphi(t)|\, dt \right\} ,$$

où la borne supérieure est prise sur tous les intervalles bornés non triviaux contenant x.

Montrer que si f est intégrable sur $\mathbb{R}$, si $x \in \mathbb{R}$ est fixé et si g est une fonction continue à support compact vérifiant $g(x) = f(x)$, alors

$$\overline{\lim_{h \to 0}} \left| \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t)\, dt - f(x) \right| \leqslant M_{f-g}(x) .$$

3) Le but de cette question est d'établir le résultat suivant : *pour tout $\alpha > 0$, il existe une constante C_α telle que pour toute fonction φ intégrable sur $\mathbb{R}$, on ait*

$$m(\{x;\ M_\varphi(x) > \alpha\}) \leqslant C_\alpha \, ||\varphi||_1 .$$

a) Pour tout intervalle borné $I \subseteq \mathbb{R}$, on note $3I$ l'intervalle de même centre et de longueur triple. Montrer que si $\mathcal{I}$ est une famille finie d'intervalles bornés, alors on peut trouver une sous-famille $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{I}$ formée d'intervalles deux à deux disjoints et telle que $\bigcup_{I \in \mathcal{I}} I \subseteq \bigcup_{J \in \mathcal{J}} 3J$.

b) Soit φ une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$, et soit $\alpha > 0$. Montrer que si J_1, ..., J_N sont des intervalles bornés deux à deux disjoints tels que $\int_{J_k} |\varphi(t)|\,dt > \alpha m(J_k)$ pour tout k, alors $m(\cup_1^N J_k)) < \frac{1}{\alpha}\,||\varphi||_1$.

c) Soit φ une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$ et soit $\alpha > 0$. Montrer que si $x \in \mathbb{R}$ vérifie $M_\varphi(x) > \alpha$, alors il existe un intervalle *ouvert* borné I contenant x tel que $\int_I |\varphi(t)|\,dt > \alpha\, m(I)$.

d) Soit φ une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$ et soit $\alpha > 0$. Déduire de *a*), *b*) et *c*) que pour tout compact $K \subset \{x;\ M_\varphi(x) > \alpha\}$, on a $m(K) \leqslant \frac{1}{\alpha}\,||\varphi||_1$.

e) Conclure.

4) Déduire de 2) et 3) que le théorème de dérivation de Lebesgue est valable pour toute fonction f intégrable sur $\mathbb{R}$.

5) Conclure.

11.49. (Intégration par parties.)

Soient f et g deux fonctions localement intégrables sur $\mathbb{R}$; on note F et G les fonctions définies par $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ et $G(x) = \int_0^x g(t)\,dt$. Montrer que pour tout intervalle $[a\,;b] \subset \mathbb{R}$, on a

$$\int_a^b fG = [FG]_a^b - \int_a^b Fg\,.$$

11.50. Soit $p \in [1;\infty[$. Le but de l'exercice est de montrer qu'une fonction harmonique $u : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ appartient à $h^p(\mathbb{D})$ si et seulement si la fonction $|u|^p$ admet un **majorant harmonique**, ce qui signifie qu'il existe une fonction harmonique $v : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ telle que $|u(z)|^p \leqslant v(z)$ pour tout $z \in \mathbb{D}$.

1) Montrer que si $|u|^p$ admet un majorant harmonique, alors $u \in h^p$.

2) Pour $r < 1$, on note v_r la solution du problème de Dirichlet pour $|u|^p$ et $\Omega_r = D(0,r)$

a) Montrer que pour tout $r < 1$, on a $|u|^p \leqslant v_r$ dans Ω_r.

b) À l'aide du principe du maximum, montrer que si $r_1 \leqslant r_2 < 1$, alors $v_{r_1} \leqslant v_{r_2}$ dans Ω_{r_1}.

3) Déduire de 2) que si $u \in h^p$, alors $|u|^p$ admet un majorant harmonique.

11.51. Soit (u_n) une suite bornée dans $h^1(\mathbb{D})$. Montrer que (u_n) admet une sous-suite qui converge uniformément sur tout compact vers une fonction harmonique.

11.52. Soit f une fonction holomorphe sur $\mathbb{D}$, $f(z) = \sum_0^\infty a_n z^n$.

1) Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, on a

$$|a_n| \leqslant \frac{||f'||_{h^1}}{n}\,.$$

2) En déduire que si f' appartient à $h^1(\mathbb{D})$, alors la restriction de f à $[0\,;1[$ est intégrable sur $[0\,;1[$.

11.53. Soit $\zeta_0 \in \mathbb{T}$ et soit $u : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ la fonction harmonique positive définie par $u(z) = P(z, \zeta_0)$, où P est le noyau de Poisson du disque unité. Quelle est la mesure $\mu \in \mathcal{M}_+(\mathbb{T})$ correspondant à u ?

11.54. (Théorème de Herglotz.)

Soit f une fonction holomorphe sur $\mathbb{D}$ vérifiant $\mathrm{Re}(f(z)) \geqslant 0$ pour tout $z \in \mathbb{D}$ et $f(0) > 0$. Montrer qu'il existe une mesure positive $\mu \in \mathcal{M}_+(\mathbb{T})$ telle que

$$f(z) \equiv \int_{\mathbb{T}} \frac{\zeta + z}{\zeta - z}\, d\mu(\zeta)\ .$$

11.55. Soit u une fonction harmonique réelle sur $\mathbb{D}$, et soit v sa conjuguée harmonique (voir l'exercice 11.6).

1) Montrer que si $u \in h^2(\mathbb{D})$, alors $v \in h^2(\mathbb{D})$.

2) Trouver un exemple où $u \in h^1(\mathbb{D})$ mais $v \notin h^1(\mathbb{D})$.

3) Trouver un exemple où $u \in h^\infty(\mathbb{D})$ mais $v \notin h^\infty(\mathbb{D})$.

11.56. Pour $z \in \mathbb{D}$, on pose $u(z) = \mathrm{Im}((1+z)^2/(1-z)^2)$.

1) Montrer que u est harmonique et qu'on a $\lim_{r\to 1} u(r\zeta) = 0$ pour tout $\zeta \in \mathbb{T}$.

2) La fonction u appartient-elle à $h^1(\mathbb{D})$?

11.57. Soit $f \in \mathrm{H}^\infty(\mathbb{D})$; on note $\mathbf{f}^* \in \mathrm{L}^\infty(\mathbb{T})$ la valeur au bord de f.

1) En s'inspirant de la preuve du théorème 4.4.11 , montrer qu'on a

$$\log|f(0)| \leqslant \int_0^{2\pi} \log\left|\mathbf{f}^*(e^{i\theta})\right| \frac{d\theta}{2\pi}\ ,$$

le sens de l'intégrale étant à préciser.

2) Montrer que si f n'est pas identiquement nulle, alors $\log|\mathbf{f}^*|$ est intégrable sur $\mathbb{T}$. En particulier, l'ensemble $\{\zeta;\ \mathbf{f}^*(\zeta) = 0\}$ est de mesure nulle dans $\mathbb{T}$.

11.58. Soit $\mathrm{B} = \prod_{n\geqslant 0} b_n$ un produit de Blaschke associé à une suite $(a_n) \subset \mathbb{D}$ (voir le chapitre 4) ; on note $\mathbf{B}^* \in \mathrm{L}^\infty(\mathbb{T})$ la valeur au bord de B.

1) Pour $\mathrm{N} \geqslant 0$, on pose $\mathrm{B}_\mathrm{N} = \prod_{n>\mathrm{N}} b_n$. En utilisant l'exercice précédent, montrer que pour tout $\mathrm{N} \geqslant 0$, on a $\log|\mathrm{B}_\mathrm{N}(0)| \leqslant \int_0^{2\pi} \log|\mathbf{B}^*(e^{i\theta})| \frac{d\theta}{2\pi}$.

2) Montrer qu'on a $|\mathbf{B}^*(\zeta)| = 1$ presque partout sur $\mathbb{T}$.

11.59. Comparer la méthode de l'exercice précédent à celle de 4.80.

11.60. Soit $\mathrm{B} = \prod_0^\infty b_n$ un produit de Blaschke associé à une suite $(a_n) \subset \mathbb{D}$. À quelle condition B se prolonge-t-il continûment à $\overline{\mathbb{D}}$? On pourra utiliser l'exercice 11.58.

11.61. (Espace de Hardy $\mathrm{H}^1(\mathbb{D})$.)

On note $\mathrm{H}^1(\mathbb{D})$ l'ensemble des fonctions $f \in h^1(\mathbb{D})$ qui sont de plus holomorphes.

0) Montrer que toute fonction de $\mathrm{H}^1(\mathbb{D})$ appartient à la classe de Nevanlinna $\mathcal{N}$ définie à la section 4.4.3 **b**.

1) Soit $f \in \mathrm{H}^1(\mathbb{D})$ non constante, et soit $\mathrm{B} = \prod_0^\infty b_n$ le produit de Blaschke associé à la suite des zéros de f.

a) Montrer qu'on peut écrire $f = \mathrm{B}g$, où g est holomorphe dans $\mathbb{D}$ et ne s'annule pas.

b) Pour $N \geqslant 0$, on pose $B_N = \prod_0^N b_N$. Montrer que $|B_N(r\zeta)|$ tend vers 1 uniformément sur $\mathbb{T}$ quand r tend vers 1, et en déduire qu'on a $f/B_N \in H^1(\mathbb{D})$, avec $\|f/B_N\|_{H^1} \leqslant \|f\|_{H^1}$.

c) Montrer que $g = f/B$ appartient à $H^1(\mathbb{D})$.

2) *a*) Montrer que si $g \in H^1(\mathbb{D})$ ne s'annule pas dans $\mathbb{D}$, alors il existe une fonction $u \in H^2(\mathbb{D})$ telle que $g = u^2$.

b) En déduire, à l'aide de 1), que si $f \in H^1(\mathbb{D})$, alors on peut trouver deux fonctions $u, v \in H^2(\mathbb{D})$ telles que $f = uv$.

3) En utilisant 2) , montrer que toute fonction $f \in H^1(\mathbb{D})$ est l'intégrale de Poisson d'une fonction $\mathbf{f} \in L^1(\mathbb{T})$.

11.62. (Théorème des frères Riesz.)

Soit μ une mesure complexe sur le cercle $\mathbb{T}$ dont les coefficients de Fourier vérifient $\hat{\mu}(n) = 0$ pour tout $n < 0$.

1) Montrer que $P_{\mathbb{D}}\mu$ appartient à $H^1(\mathbb{D})$ (voir l'exercice précédent).

2) Montrer que μ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue sur le cercle, autrement dit qu'il existe une fonction $\mathbf{f} \in L^1(\mathbb{T})$ telle que $\mu = \mathbf{f}\sigma$.

11.63. (Théorème de Rudin-Carleson.)

Le but de l'exercice est de démontrer le résultat suivant : si $E \subset \mathbb{T}$ est un fermé de mesure nulle, alors toute fonction $f \in \mathcal{C}(E)$ se prolonge en une fonction de $A(\mathbb{D})$.

1) Soient X, Y deux espaces de Banach, et soit $T : X \to Y$ un opérateur linéaire continu. On note $T^* : X^* \to Y^*$ l'opérateur adjoint. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

(1) T est surjectif ;

(2) Il existe $c > 0$ telle que $\|T^* y^*\| \geqslant c\|y^*\|$ pour tout $y^* \in Y^*$.

2) Soit $\mathbf{A}(\mathbb{T})$ l'adhérence des fonctions polynomiales dans $\mathcal{C}(\mathbb{T})$. En considérant $L^1(\mathbb{T})$ comme un sous-espace de $\mathcal{M}(\mathbb{T})$, montrer que $\mathbf{A}(\mathbb{T})^*$ s'identifie isométriquement au quotient $\mathcal{M}(\mathbb{T})/\mathcal{F}$, où $\mathcal{F}$ est un sous-espace fermé de $\mathcal{M}(\mathbb{T})$ contenu dans $L^1(\mathbb{T})$. On pourra utiliser le théorème des frères Riesz (exercice précédent).

3) Soit E un fermé de $\mathbb{T}$, et soit $T : \mathbf{A}(\mathbb{T}) \to \mathcal{C}(E)$ l'opérateur de restriction, défini par $Tf = f_{|E}$.

a) En notant $\mathcal{M}(E)$ l'espace des mesures sur E, identifier l'opérateur $T^* : \mathcal{M}(E) \to \mathcal{M}(\mathbb{T})/\mathcal{F}$.

b) Montrer que si E est de mesure nulle, alors T^* est une isométrie.

4) Conclure.

11.64. Soit X un espace topologique compact, et soit E un fermé de X ; soit également $\mathcal{A}$ une sous-algèbre fermée de $\mathcal{C}(X)$. On pose $\mathcal{A}_E = \{f_{|E};\ f \in \mathcal{A}\}$.

1) On suppose qu'il existe une fonction $\varphi \in \mathcal{A}$ identiquement égale à 1 sur E et de module strictement inférieur à 1 en tout point de $X \setminus E$.

a) Montrer que pour toute fonction $f \in \mathcal{A}_E$, il existe une fonction $\tilde{f} \in \mathcal{A}$ vérifiant $\tilde{f}_{|E} = f$ et $\|\tilde{f}\|_\infty \leqslant 2\|f\|_\infty$.

b) En déduire que $\mathcal{A}_E$ est une partie fermée de $\mathcal{C}(E)$.

2) Conclure que si l'hypothèse de la question 1) est vérifiée et si de plus $\mathcal{A}_E$ est dense dans $\mathcal{C}(E)$, alors toute fonction $f \in \mathcal{C}(E)$ se prolonge en une fonction de $\mathcal{A}$.

3) Montrer que le résultat de 2) permet de démontrer le théorème de Tietze-Urysohn dans un espace métrique compact.

4) En utilisant l'exercice 11.33 et le théorème de Runge, montrer que le résultat de 2) permet également de démontrer le théorème de Rudin-Carleson (exercice précédent).

11.65. Montrer qu'une fonction $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ est harmonique si et seulement si elle vérifie

$$\int_{\partial D} \frac{\partial u}{\partial n}\, d\sigma = 0$$

pour tout disque fermé $\overline{D} \subset \Omega$.

11.66. Soit $K \subset \mathbb{C}$ un compact à bord régulier. On note $\mathcal{C}^2(K)$ l'ensemble des fonctions $u : K \to \mathbb{R}$ qui se prolongent en une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ au voisinage de K.

1) Montrer que si $u \in \mathcal{C}^2(K)$ est harmonique dans $\mathring{K}$, alors

$$\int_{\partial K} u \frac{\partial u}{\partial n}\, d\sigma = \int_K |\nabla u|^2\, dm\,.$$

2) Que peut-on dire d'une fonction $u \in \mathcal{C}^2(K)$ harmonique dans l'intérieur de K et dont la dérivée normale est identiquement nulle sur ∂K ?

11.67. (Principe de Dirichlet.)

Soit V un ouvert borné de $\mathbb{C}$; on suppose que V est l'intérieur d'un compact à bord régulier. On note $\mathcal{C}^2(\overline{V})$ l'ensemble des fonctions $u : \overline{V} \to \mathbb{R}$ qui se prolongent en une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ au voisinage de $\overline{V}$. Si $\mathbf{u} : \partial V \to \mathbb{R}$ est une fonction continue, on pose

$$\mathcal{A}_{\mathbf{u}} = \{v \in \mathcal{C}^2(\overline{V});\ v_{|\partial V} = \mathbf{u}\}\,.$$

1) Montrer qu'une fonction $u \in \mathcal{C}^2(\overline{V})$ est harmonique dans V si et seulement si $\int_V \langle \nabla u\,, \nabla \varphi\rangle\, dm = 0$ pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{A}_0$.

2) Soit $\mathbf{u} : \partial V \to \mathbb{R}$ continue. Montrer qu'une fonction $u \in \mathcal{A}_{\mathbf{u}}$ est solution du problème de Dirichlet pour V et $\mathbf{u}$ si et seulement si on a

$$\int_V |\nabla u|^2\, dm = \inf\left\{\int_V |\nabla v|^2\, dm;\ v \in \mathcal{A}_{\mathbf{u}}\right\}\,.$$

11.68. (Intégration par parties.)

Soit $K \subset \mathbb{R}^2$ un compact à bord régulier de classe $\mathcal{C}^2$. On note $\mathbf{n} = (n_1, n_2)$ la normale extérieure à ∂K. Montrer que si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ au voisinage de K et si p est un champ de vecteurs de classe $\mathcal{C}^1$ au voisinage de K, alors on a la **formule d'intégration par parties**

$$\int_K f\ \mathrm{div}(p)\, dm = \int_{\partial K} f\, \langle p\,, \mathbf{n}\rangle\, d\sigma - \int_K \langle \nabla f, p\rangle\, dm\,.$$

En particulier, si u et v sont deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ au voisinage de K, alors, pour $i = 1, 2$:

$$\int_{\mathrm{K}} u\,\partial_i v\,dm = \int_{\partial \mathrm{K}} uv\,n_i\,d\sigma - \int_{\mathrm{K}} v\,\partial_i u\,dm\ .$$

11.69. Montrer que si u est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ au voisinage d'un intervalle compact $[t_0 - r; t_0 + r] \subset \mathbb{R}$, alors

$$u(t_0) = \frac{u(t_0 - r) + u(t_0 + r)}{2} + \frac{1}{2}\int_{t_0 - r}^{t_0 + r} (|t - t_0| - r)\,u''(t)\,dt\ .$$

11.70. (Formule de la divergence dans $\mathbb{R}^n$.)

Soit n un entier au moins égal à 3. Le but de l'exercice est de montrer que si $\mathrm{B} \subset \mathbb{R}^n$ est une boule fermée euclidienne et si $p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est un champ de vecteurs de classe $\mathcal{C}^1$ au voisinage de B, alors

$$\int_{\mathrm{B}} \mathrm{div}(p)\,dm = \int_{\partial \mathrm{B}} \langle p(\zeta), \zeta\rangle\,d\sigma(\zeta)\ ,$$

où σ est la mesure de surface sur ∂B.

1) On prend pour B la boule unité euclidienne.

a) Soit U_{n-1} est la boule unité ouverte de $\mathbb{R}^{n-1}$, et soit $\varphi : \mathrm{U}_{n-1} \to \mathbb{R}$ l'application définie par $\varphi(u) = \sqrt{1 - |u|^2}$, où $|\ |$ est la norme euclidienne. Montrer que pour toute fonction borélienne bornée $g : \partial\mathrm{B} \to \mathbb{R}$, on a

$$\int_{\partial \mathrm{B}} g\,d\sigma = \int_{\mathrm{U}_{n-1}} \Big(g(u\,,\varphi(u)) + g(u\,,-\varphi(u))\Big)\sqrt{1 + |\nabla\varphi(u)|^2}\ dm_{n-1}(u)\ ,$$

où m_{n-1} est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^{n-1}$.

b) En déduire que si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ au voisinage de B, alors

$$\int_{\partial \mathrm{B}} x_n f\,d\sigma = \int_{\mathrm{B}} \frac{\partial f}{\partial x_n}\,dm\ .$$

2) Conclure.

11.71. (Formule de la divergence, 2.)

Dans cet exercice, on donne un autre preuve, beaucoup plus compliquée, de la formule établie à l'exercice précédent : si $\mathrm{B} \subset \mathbb{R}^n$ est une boule fermée euclidienne et si $p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est un champ de vecteurs de classe $\mathcal{C}^1$ au voisinage de B, alors

$$\int_{\mathrm{B}} \mathrm{div}(p)\,dm = \int_{\partial \mathrm{B}} \langle p(\zeta), \zeta\rangle\,d\sigma(\zeta)\ .$$

1) *a*) Soit ψ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Pour $a \in \mathbb{R}^n$ fixé, $|a| = 1$, établir l'identité

$$\sum_1^n \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{x_j}{|x|}\,\psi\right)(ra) = \frac{n-1}{r}\,\psi(ra) + \frac{d}{dr}\,[\psi(ra)]\ .$$

b) Soit $R > 0$. Montrer que si ψ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ au voisinage de $\overline{B}(0,R) \setminus \{0\}$ telle que la fonction $\sum_1^n \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{x_j}{|x|}\psi\right)$, arbitrairement définie en 0, est intégrable sur $B = \overline{B}(0,R)$, alors

$$\int_B \sum_1^n \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{x_j}{|x|}\psi\right) dm = \int_{\partial B} \psi \, d\sigma \, .$$

2) Soit φ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$ à support compact, et soit $i \in \{1; \dots ; n\}$. Montrer que si θ est une fonction radiale bornée de classe $\mathcal{C}^1$, alors

$$\int \theta \times \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{x_j}{r}\frac{x_i}{r}\varphi\right) dm = \int \theta \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dm \, .$$

3) Déduire de 1) et 2) que si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ au voisinage d'une boule $B = \overline{B}(0,R)$, alors

$$\int_B \frac{\partial f}{\partial x_i} dm = \int_{\partial B} \frac{x_i}{R} f \, d\sigma$$

pour tout $i \in \{1; \dots ; n\}$.

4) Conclure.

11.72. (Formule de la divergence, 3.)

Dans cet exercice, on donne une troisième démonstration de la formule établie à l'exercice 11.70. Dans ce qui suit, on note B la boule unité de $\mathbb{R}^n$ et S la sphère unité.

1) Soit $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ un multi-indice. Pour $x \in \mathbb{R}^n$, on pose $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$.

a) Montrer qu'on a $\int_B x^\alpha \, dm = \frac{1}{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n + n} \int_S x^\alpha \, d\sigma$.

b) Si l'un des α_j est impair, quelle est la valeur de $\int_S x^\alpha \, d\sigma$?

c) On suppose que tous les α_j sont pairs, et on pose $\beta_j = \frac{1+\alpha_j}{2}$. En calculant l'intégrale $\int_{\mathbb{R}^n} x^\alpha e^{-|x|^2} \, dm$ de deux façons différentes, montrer qu'on a

$$\int_S x^\alpha \, d\sigma = \frac{2\,\Gamma(\beta_1) \cdots \Gamma(\beta_n)}{\Gamma(\alpha_1 + \cdots + \alpha_n)} \, .$$

2) Déduire de 1) que si P est une fonction polynomiale sur $\mathbb{R}^n$, alors, pour tout $i \in \{1; \dots ; n\}$, on a

$$\int_B \frac{\partial P}{\partial x_i} dm = \int_S x_i P \, d\sigma \, .$$

3) Conclure.

11.73. Établir une formule de Green pour une boule euclidienne de $\mathbb{R}^n$, puis pour un compact $K \subset \mathbb{R}^n$ de la forme $\overline{B} \setminus \bigcup_1^k B_i$, où B et les B_i sont des boules euclidiennes et $\overline{B}_i \subset B$ pour tout i.

11.74. Soit n un entier au moins égal à 3 ; on note $|\ |$ la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$ et r la fonction $x \mapsto |x|$.

1) Calculer Δr^{2-n} sur $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$, puis établir l'analogue du théorème 11.10.5 pour une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ au voisinage d'une boule de $\mathbb{R}^n$.

2) Déterminer le laplacien de r^{2-n} au sens des distributions.

3) Montrer qu'une fonction continue $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ est harmonique si et seulement si elle possède la propriété de la moyenne pour les sphères.

4) Montrer qu'une fonction continue $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ est harmonique si et seulement si elle possède la propriété de la moyenne pour les boules.

Chapitre 12
Fonctions sous-harmoniques

On a vu au chapitre 4 que les fonctions continues possédant la propriété de sous-moyenne vérifient le principe du maximum. Dans ce chapitre, on étudie plus en détail les fonctions possédant la propriété de sous-moyenne. La présentation est très largement inspirée de [57], dont on ne saurait trop recommander la lecture.

Comme toujours, Ω est un ouvert de $\mathbb{C}$.

12.1. Définitions et propriétés élémentaires

12.1.1. Semi-continuité

Pour des raisons de « flexibilité », les fonctions sous-harmoniques ne seront pas supposées a priori continues, mais seulement *semi-continues supérieurement*. Il est donc nécessaire de rappeler quelques propriétés des fonctions semi-continues.

Définition 12.1.1. *Soit* X *est un espace topologique. On dit qu'une fonction* $u : X \to [-\infty ; +\infty[$ *est* **semi-continue supérieurement** *(en abrégé :* **s.c.s.***) si pour tout nombre réel c, l'ensemble* $\{x;\ u(x) < c\}$ *est un ouvert de* X.

Par exemple, la fonction indicatrice d'un fermé de X est semi-continue supérieurement.

Remarques. 1) Pour $x \in X$, notons $\mathcal{V}(x)$ la famille de tous les voisinages de x, et posons

$$\limsup_{y \to x} u(y) = \inf_{V \in \mathcal{V}(x)} \sup_{V} u(y) \ .$$

Alors u est s.c.s. sur X si et seulement si on a $u(x) \geqslant \limsup_{y \to x} u(y)$ pour tout $x \in X$. Si X est métrisable, il revient au même de dire qu'on a $u(x) \geqslant \limsup_n u(x_n)$ pour tout $x \in X$ et pour toute suite (x_n) convergeant vers X.

2) Une fonction $u : X \to \mathbb{R}$ est continue si et seulement si u et $-u$ sont toutes les deux s.c.s.

Proposition 12.1.2. *Soit* X *un espace topologique.*

a) *Si u et v sont deux fonctions s.c.s. sur* X, *alors* $\max(u,v)$ *est s.c.s. ; si u, v sont s.c.s. et si λ, μ sont des nombres positifs, alors $\lambda u + \mu v$ est s.c.s.*

b) *Si $(u_i)_{i\in I}$ est une famille de fonctions s.c.s. sur* X, *alors $u = \inf_{i\in I} u_i$ est encore s.c.s.*

Preuve. Pour tout $c \in \mathbb{R}$, on a $\{\inf_i u_i < c\} = \bigcup_i \{u_i < c\}$ et $\{\max(u,v) < c\} = \{u < c\} \cap \{v < c\}$. Cela prouve b) et la première moitié de a). Pour démontrer la deuxième moitié de a), on peut supposer que λ et μ sont strictement positifs (si l'un des deux est nul, la preuve est immédiate). Dans ce cas, un point $x \in X$ vérifie $\lambda u(x) + \mu v(x) < c$ pour un certain $c \in \mathbb{R}$ si et seulement si on peut trouver α et β tels que $u(x) < \alpha/\lambda$, $v(x) < \beta/\mu$ et $\alpha + \beta < c$. On peut donc écrire $\{\lambda u + \mu v < c\} = \bigcup_{(\alpha,\beta)\in I} O_{\alpha\beta}$, où $I = \{(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2;\ \alpha + \beta < c\}$ et $O_{\alpha\beta} = \{u < \alpha/\lambda\} \cap \{v < \beta/\mu\}$. Cela prouve que $\lambda u + \mu v$ est s.c.s. si u et v le sont.

Proposition 12.1.3. *Si* X *est un espace topologique métrisable, alors toute fonction s.c.s. sur* X *et bornée supérieurement est limite d'une suite décroissante de fonctions continues (à valeurs réelles).*

Preuve. Supposons X métrisable et choisissons une distance d compatible avec la topologie de X. Fixons également une fonction u s.c.s. sur X et bornée supérieurement. Si $u \equiv -\infty$, alors la suite (u_n) définie par $u_n(x) = -n$ convient. On peut donc supposer que u n'est pas identiquement égale à $-\infty$. Définissons alors les fonctions u_n par

$$u_n(x) = \sup\{u(y) - n\,d(x,y);\ y \in X\}.$$

Comme u est bornée supérieurement et non identiquement égale à $-\infty$, les u_n sont à valeurs réelles, et on a $u_n(x) \geqslant u(x) - n\,d(x,x) = u(x)$ pour tout n et pour tout $x \in X$. De plus, il est clair que la suite (u_n) est décroissante. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $y \in Y$, l'application $x \mapsto u(y) - n\,d(x,y)$ est n-lipschitzienne. Par conséquent, la fonction u_n, enveloppe supérieure d'une famille de fonctions n-lipschitziennes, est elle aussi n-lipschitzienne. En particulier, u_n est continue. Il reste à voir que la suite (u_n) converge simplement vers u ; et comme (u_n) est décroissante, il suffit de montrer que pour tout $x_0 \in X$ et pour tout nombre réel $\alpha > u(x_0)$, on peut trouver un entier n tel que $u_n(x_0) \leqslant \alpha$. Fixons x_0 et α. Comme u est s.c.s., on peut trouver $r > 0$ tel que $u(y) < \alpha$ si $d(x_0,y) < r$. Posons $M = \sup_X u$, et choisissons un entier n_0 tel que $M - n_0 r < \alpha$. On a alors $u(y) - n_0 d(x_0,y) < \alpha$ si $d(x_0,y) \geqslant r$, et $u(y) - n_0 d(x_0,y) \leqslant u(y) < \alpha$ si $d(x_0,y) < r$ par le choix de r. Par conséquent, $u_{n_0}(x_0) \leqslant \alpha$.

Remarque 12.1.4. *La définition des fonctions u_n peut sembler quelque peu mystérieuse. En fait, cette définition est très naturelle : u_n est la plus petite fonction n-lipschitzienne majorant u.*

Proposition 12.1.5. *Si* X *est un espace topologique compact et si* $u : \mathrm{X} \to [-\infty ; +\infty[$ *est s.c.s., alors u est majorée et atteint sa borne supérieure.*

Preuve. Fixons u et posons $\mathrm{M} = \sup_{\mathrm{X}} u$; M peut a priori être égal à $+\infty$, mais il suffit de montrer qu'il existe $x_0 \in \mathrm{X}$ tel que $u(x_0) = \mathrm{M}$ pour obtenir en même temps les deux parties de la proposition. Choisissons une suite strictement croissante $(\mathrm{M}_n) \subset \mathbb{R}$ telle que $\lim_{n\to\infty} \mathrm{M}_n = \mathrm{M}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'ensemble $\mathrm{K}_n = \{x;\ u(x) \geqslant \mathrm{M}_n\}$ est un fermé de X car u est s.c.s. De plus, les K_n sont non vides par définition de M, et la suite (K_n) est décroissante. Comme X est compact, l'intersection des K_n est non vide, ce qui termine la démonstration.

Corollaire 12.1.6. *Si u est une fonction s.c.s. sur un espace topologique compact* X *et si μ est une mesure borélienne positive* **finie** *sur* X, *alors la fonction $u^+ = \max(u, 0)$ est μ-intégrable sur* X.

Preuve. u^+ est borélienne car u est borélienne, et elle est bornée car u est bornée supérieurement.

La définition suivante est justifiée par 12.1.6.

Définition 12.1.7. *Soit* X *un espace topologique compact, et soit μ une mesure borélienne positive sur* X *de masse totale finie. Si u est une fonction s.c.s. sur* X, *on définit l'intégrale $\int_{\mathrm{X}} u\, d\mu$ par la formule*

$$\int_{\mathrm{X}} u\, d\mu = \int_{\mathrm{X}} u^+ d\mu - \int_{\mathrm{X}} u^- d\mu\ ,$$

où $u^+ = \max(u, 0)$ et $u^- = -\min(u, 0)$.

Remarque 12.1.8. *Il est important de noter que l'intégrale $\int_{\mathrm{X}} u\, d\mu$ peut éventuellement être égale à $-\infty$. En fait, on a $\int_{\mathrm{X}} u\, d\mu > -\infty$ si et seulement si la fonction u est μ-intégrable sur* X.

Voici une définition équivalente de $\int_{\mathrm{X}} u\, d\mu$: si M est un majorant de u, on a

$$\int_{\mathrm{X}} u\, d\mu = \mathrm{M}\mu(\mathrm{X}) - \int_{\mathrm{X}} (\mathrm{M} - u)\, d\mu\ ,$$

l'intégrale apparaissant au second membre étant bien définie car la fonction $\mathrm{M} - u$ est mesurable et positive. On en déduit que le théorème de

convergence monotone et le lemme de Fatou s'appliquent sous les deux formes suivantes.

(1) *Si (u_n) est une suite décroissante de fonctions s.c.s., alors*

$$\lim_n \int u_n = \int \lim u_n \, .$$

(2) *Si (u_n) est une suite de fonctions s.c.s. uniformément majorée, alors*

$$\limsup_n \int u_n \leqslant \int \limsup_n u_n \, .$$

12.1.2. Fonctions sous-harmoniques ; exemples

Définition 12.1.9. *Une fonction $u : \Omega \to [-\infty, +\infty[$ est dite* **sous-harmonique** *dans Ω si elle vérifie les deux propriétés suivantes :*

(1) *u est semi-continue supérieurement ;*

(2) *u possède la* **propriété de sous-moyenne locale** *: pour tout point $z_0 \in \Omega$, on peut trouver $r_0 > 0$ tel que $u(z_0) \leqslant \int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{i\theta}) \frac{d\theta}{2\pi}$ pour tout $r < r_0$.*

Remarques. 1) Une fonction est sous-harmonique si et seulement si elle est sous-harmonique au voisinage de chaque point.

2) D'après le théorème 11.7.10 , une fonction $u : \Omega \to \mathbb{R}$ est harmonique si et seulement si u et $-u$ sont toutes les deux sous-harmoniques.

3) La définition des fonctions sous-harmoniques est formellement analogue à une propriété caractéristique des fonctions *convexes* d'une variable réelle, où la moyenne sur un cercle est remplacée par la « moyenne sur les extrémités d'un intervalle » : une fonction continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est convexe si et seulement si sa valeur au centre de tout intervalle $[a\,;b] \subset \mathbb{R}$ est inférieure ou égale à la moyenne de ses valeurs aux points a et b, autrement dit, si et seulement si on a $f(x_0) \leqslant \frac{1}{2}\,(f(x_0 + r) + f(x_0 - r))$ pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$ et pour tout $r > 0$. Il est souvent utile d'avoir à l'esprit le parallélisme (fonctions sous-harmoniques)/(fonctions convexes), donc également le parallélisme (fonctions harmoniques)/(fonctions affines).

Les deux résultats suivants fournissent une caractérisation de la sous-harmonicité pour les fonctions de classe $\mathcal{C}^2$, et une importante famille d'exemples.

Proposition 12.1.10. *Une fonction $u : \Omega \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ est sous-harmonique si et seulement si $\Delta u \geqslant 0$.*

Preuve. Si $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$, alors, d'après le théorème 11.10.5 , on a

$$u(z_0) = \int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{i\theta}) \, \frac{d\theta}{2\pi} + \frac{1}{2\pi} \int_{\overline{\mathrm{D}}} \Delta u(z) \, \log \frac{|z - z_0|}{r} \, dm(z)$$

pour tout disque $\overline{\mathrm{D}}(z_0,r) \subset \Omega$. Comme $\log \frac{|z-z_0|}{r} \leqslant 0$ dans $\overline{\mathrm{D}}(z_0,r)$, on en déduit que si $\Delta u \geqslant 0$, alors $u(z_0) \leqslant \int_0^{2\pi} u(z_0+re^{i\theta})\,\frac{d\theta}{2\pi}$. Par conséquent, u est sous-harmonique si $\Delta u \geqslant 0$. Inversement, supposons que u soit sous-harmonique, et fixons $z_0 \in \Omega$. Par hypothèse, on peut trouver une suite (r_n) tendant vers 0 telle que

$$u(z_0) \leqslant \int_0^{2\pi} u(z_0+r_n e^{i\theta})\,\frac{d\theta}{2\pi}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$. Toujours d'après 11.10.5 , on a donc

$$\int_{\overline{\mathrm{D}}(z_0,r_n)} \Delta u(z)\,\log\frac{|z-z_0|}{r_n}\,dm(z) \leqslant 0$$

pour tout n ; et comme $\log \frac{|z-z_0|}{r_n} < 0$ si $|z-z_0| < r_n$, on en déduit que Δu prend au moins une fois une valeur positive dans chaque disque $\overline{\mathrm{D}}(z_0,r_n)$. On peut donc trouver une suite (z_n) tendant vers z_0 telle que $\Delta u(z_n) \geqslant 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par continuité de Δu, on en déduit $\Delta u(z_0) \geqslant 0$.

Théorème 12.1.11. *Si f est une fonction holomorphe dans Ω, alors $\log|f|$ est sous-harmonique.*

Preuve. Soit $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. La fonction $\log|f|$ est continue à valeurs dans $[-\infty;+\infty[$, donc en particulier s.c.s. Fixons $z_0 \in \Omega$. On cherche $r_0 > 0$ tel que $\log|f(z_0)| \leqslant \int_0^{2\pi} \log|f(z_0+re^{i\theta})|\,\frac{d\theta}{2\pi}$ si $r < r_0$. Si $f(z_0) = 0$, alors $\log|f(z_0)| = -\infty$ et n'importe quel r_0 convient. Si $f(z_0) \neq 0$, alors $\log|f|$ est harmonique au voisinage de z_0, et la formule de la moyenne permet de conclure.

12.1.3. Propriétés de stabilité

Proposition 12.1.12. *Si u et v sont deux fonctions sous-harmoniques sur Ω, alors $\max(u,v)$ et $\lambda u + \mu v$ $(\lambda,\mu \geqslant 0)$ sont également sous-harmoniques.*

Preuve. Fixons u et v. D'après la proposition 12.1.2 , $w = \max(u,v)$ est s.c.s. Si $z_0 \in \Omega$, on peut trouver $r_0 > 0$ tel que pour $r < r_0$, on ait à la fois $u(z_0) \leqslant \int_0^{2\pi} u(z_0+re^{i\theta})\,\frac{d\theta}{2\pi}$ et $v(z_0) \leqslant \int_0^{2\pi} v(z_0+re^{i\theta})\,\frac{d\theta}{2\pi}$. Par définition de w, $u(z_0)$ et $v(z_0)$ sont alors tous les deux inférieurs à $\int_0^{2\pi} w(z_0+re^{i\theta})\,\frac{d\theta}{2\pi}$ si $r < r_0$, donc $w(z_0) = \max(u(z_0),v(z_0))$ également. Cela prouve que w est sous-harmonique. La preuve est analogue pour $\lambda u + \mu v$.

Théorème 12.1.13. *Si $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction convexe croissante et si u est une fonction sous-harmonique, alors $\varphi \circ u$ est sous-harmonique.*

Preuve. Remarquons d'abord qu'on a implicitement posé $\varphi(-\infty) = \lim_{t\to-\infty}\varphi(t)$, la limite existant dans $[-\infty;+\infty[$ puisque φ est croissante. Fixons u et φ. Comme toute fonction convexe sur $\mathbb{R}$ est continue, la fonction $\varphi\circ u$ est s.c.s. Soit $z_0\in\Omega$, et choisissons r_0 tel que

$$u(z_0)\leqslant\int_0^{2\pi}u(z_0+re^{i\theta})\,\frac{d\theta}{2\pi}$$

pour tout $r<r_0$. En utilisant la croissance de φ puis l'inégalité de Jensen, on obtient, pour $r<r_0$:

$$\varphi\circ u(z_0)\leqslant\varphi\left(\int_0^{2\pi}u(z_0+re^{i\theta})\,\frac{d\theta}{2\pi}\right)\leqslant\int_0^{2\pi}\varphi\circ u(z_0+re^{i\theta})\,\frac{d\theta}{2\pi}\cdot$$

La fonction $\varphi\circ u$ est donc sous-harmonique.

Corollaire 12.1.14. *Si f est une fonction holomorphe, alors, pour tout nombre réel $p\geqslant 0$, la fonction $|f|^p$ est sous-harmonique.*

Preuve. On a $|f|^p = e^{p\log|f|}$, et la fonction $t\mapsto e^{pt}$ est convexe croissante.

Corollaire 12.1.15. *Si h est une fonction harmonique et si $p\geqslant 1$, alors $|h|^p$ est sous-harmonique.*

Preuve. Prolongée par 0 sur $]-\infty;0]$, la fonction $t\mapsto t^p$ est convexe croissante.

12.2. Principe du maximum

Le théorème suivant généralise le principe du maximum établi au chapitre 4.

Théorème 12.2.1. *Soit u une fonction sous-harmonique sur Ω.*

a) *Si Ω est connexe et si u admet un maximum global sur Ω, alors u est constante.*

b) *Notons $\partial_{\mathbb{S}_2}\Omega$ la frontière de Ω dans $\mathbb{S}_2=\mathbb{C}\cup\{\infty\}$. Pour tout point $z\in\Omega$, on a*

$$u(z)\leqslant\sup_{\zeta\in\partial_{\mathbb{S}_2}\Omega}\left(\limsup_{w\to\zeta}u(w)\right),$$

avec inégalité stricte si Ω est connexe et si u n'est pas constante.

Preuve. Posons $\mathrm{M}=\sup\{u(z);\ z\in\Omega\}$. Pour démontrer a), il suffit de vérifier que $\mathrm{A}=\{z\in\Omega;\ u(z)=\mathrm{M}\}$ est à la fois ouvert et fermé dans Ω. En effet, si Ω est connexe, alors ou bien $\mathrm{A}=\emptyset$, auquel cas u n'admet

pas de maximum sur Ω, ou bien $A = \Omega$, auquel cas u est constante, $u \equiv M$. Par ailleurs, on peut également supposer qu'on a $M \in \mathbb{R}$, car $u \equiv -\infty$ si $M = -\infty$, et $A = \emptyset$ si $M = +\infty$. Comme u est s.c.s., A est un fermé de Ω car $A = \{z \in \Omega;\ u(z) \geqslant M\}$. Soit $z_0 \in A$, et choisissons r_0 tel que $u(z_0) \leqslant \int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{i\theta}) \frac{d\theta}{2\pi}$ pour tout $r < r_0$. Si $r < r_0$, on a alors

$$\int_0^{2\pi} \big(u(z_0 + re^{i\theta}) - M\big)\, d\theta \geqslant 0\,.$$

Comme l'intégrand est partout négatif par définition de M, on doit donc avoir $u(z_0 + re^{i\theta}) = M$, autrement dit $z_0 + re^{i\theta} \in A$, pour presque tout $\theta \in [0;2\pi]$. Comme de plus A est un fermé de Ω, l'ensemble $A_r = \{\theta \in [0;2\pi];\ z_0 + re^{i\theta} \in A\}$ est donc un fermé de $[0;2\pi]$ de complémentaire négligeable, et doit par conséquent être égal à $[0;2\pi]$ tout entier. Ainsi, on a $u(z) \equiv M$ sur chaque cercle $\{|z - z_0| = r\}$, $r < r_0$, et donc $D(z_0, r_0) \subset A$. Cela prouve que A est ouvert, et la partie a) est donc démontrée.

Pour démontrer b), on se ramène au cas où Ω est connexe en considérant séparément chaque composante connexe de Ω. On peut également supposer sans perte de généralité que u n'est pas constante, et que $M_0 = \sup\{\limsup_{w\to\zeta} u(w);\ \zeta \in \partial_{\mathbb{S}_2}\Omega\}$ n'est pas égal à $+\infty$. Posons $v(z) = u(z)$ si $z \in \Omega$, et $v(\zeta) = M_0$ si $\zeta \in \partial_{\mathbb{S}_2}\Omega$. Par définition, la fonction v est s.c.s. sur $\overline{\Omega}^{\mathbb{S}_2}$. Comme $\overline{\Omega}^{\mathbb{S}_2}$ est compact, v est majorée et atteint sa borne supérieure M_1 d'après 12.1.5. De plus, il découle de a) que u n'admet pas de maximum sur Ω, et donc que M_1 ne peut pas être atteint en un point de Ω; par conséquent, M_1 est atteint uniquement sur $\partial_{\mathbb{S}_2}\Omega$. On a donc $M_1 = M_0$ et $u(z) < M_1$ dans Ω, ce qui termine la démonstration.

Corollaire 12.2.2. *Supposons Ω borné. Si $u : \overline{\Omega} \to [-\infty;+\infty[$ est une fonction s.c.s. sur $\overline{\Omega}$ et sous-harmonique sur Ω, alors $u(z) \leqslant \sup_{\partial\Omega} u$ pour tout $z \in \Omega$, avec inégalité stricte si Ω est connexe et si u n'est pas constante.*

Preuve. Comme Ω est borné, $\partial_{\mathbb{S}_2}\Omega$ est la frontière de Ω dans $\mathbb{C}$. De plus, comme u est s.c.s. sur $\overline{\Omega}$, on a $u(\zeta) \geqslant \limsup_{w\to\zeta} u(w)$ pour tout $\zeta \in \partial\Omega$, et donc $\sup_{\partial\Omega} u \geqslant \sup\{\limsup_{w\to\zeta} u(w);\ \zeta \in \partial\Omega\}$.

Corollaire 12.2.3. *Si f est une fonction holomorphe dans Ω, alors*

$$|f(z)| \leqslant \sup_{\zeta\in\partial_{\mathbb{S}_2}\Omega} \left(\limsup_{w\to\zeta} |f(w)|\right)$$

pour tout $z \in \Omega$, avec inégalité stricte si Ω est connexe et si f n'est pas constante.

Preuve. On applique le principe du maximum à $|f|$, en remarquant que si f n'est pas constante (et si Ω est connexe), alors $|f|$ ne l'est pas non plus car $\Delta(|f|^2) = 4\frac{\partial^2(f\overline{f})}{\partial z \partial \overline{z}} = 4|f'|^2$.

12.3. Propriété du majorant harmonique

Par définition, une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est convexe si et seulement la propriété suivante a lieu : *si* $[a\,;b]$ *est un intervalle compact de* $\mathbb{R}$ *et si* φ *est une fonction affine telle que* $f(a) \leqslant \varphi(a)$ *et* $f(b) \leqslant \varphi(b)$, *alors* $f(t) \leqslant \varphi(t)$ *pour tout* $t \in]a\,;b[$. Le théorème suivant caractérise de manière analogue la sous-harmonicité en termes de « majorants harmoniques ».

Théorème 12.3.1. *Pour une fonction* $u : \Omega \to [-\infty\,;+\infty[$ *semi-continue supérieurement, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) u *est sous-harmonique ;*

(ii) u *possède la* **propriété du majorant harmonique** *: pour tout ouvert* V *relativement compact dans* Ω *et pour toute fonction* $h : \overline{\mathrm{V}} \to \mathbb{R}$ *continue sur* $\overline{\mathrm{V}}$, *harmonique dans* V, *telle que* $u \leqslant h$ *sur* $\partial \mathrm{V}$, *on a* $u \leqslant h$ *dans* V *;*

(iii) pour tout disque fermé $\overline{\Delta} \subset \Omega$, *on a*

$$u(z) \leqslant \int_{\partial\Delta} \mathrm{P}_\Delta(z,\zeta)\, u(\zeta)\, d\sigma(\zeta)$$

dans le disque Δ, *où* P_Δ *est le noyau de Poisson de* Δ.

Preuve. Si $h : \overline{\mathrm{V}} \to \mathbb{R}$ est continue sur $\overline{\mathrm{V}}$ et harmonique dans V, alors $u - h$ est s.c.s. sur $\overline{\mathrm{V}}$ et sous-harmonique dans V. L'implication (i)⇒(ii) découle donc du principe du maximum. Supposons la propriété (ii) vérifiée, et fixons un disque Δ tel que $\overline{\Delta} \subset \Omega$. D'après la proposition 12.1.3, on peut trouver une suite $(\mathbf{h}_n)$ de fonctions continues sur $\partial\Delta$ qui converge simplement et en décroissant vers $u_{|\partial\Delta}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, notons $h_n : \overline{\Delta} \to \mathbb{R}$ la solution du problème de Dirichlet pour Δ et $\mathbf{h}_n$. Comme $u \leqslant \mathbf{h}_n \equiv h_n$ sur $\partial\Delta$, il découle de (ii) qu'on a $u(z) \leqslant h_n(z)$ dans Δ, autrement dit $u(z) \leqslant \int_{\partial\Delta} \mathrm{P}_\Delta(z,\zeta)\mathbf{h}_n(\zeta)\, d\sigma(\zeta)$ pour tout n et pour tout $z \in \Delta$. En appliquant le théorème de convergence monotone, on obtient (iii). L'implication (iii)⇒(i) est immédiate.

Corollaire 12.3.2. *(propriété de sous-moyenne* **globale**.*) Si* u *est sous-harmonique dans* Ω *et si* $z_0 \in \Omega$, *alors* $u(z_0) \leqslant \int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{i\theta})\, \frac{d\theta}{2\pi}$ *pour tout nombre* $r > 0$ *tel que* $\overline{\mathrm{D}}(z_0, r) \subset \Omega$.

Preuve. Cela découle immédiatement de (iii).

Corollaire 12.3.3. *Si (u_n) est une suite décroissante de fonctions sous-harmoniques, alors la fonction $u = \inf_n u_n$ est sous-harmonique.*

Preuve. La fonction u est s.c.s., comme inf de fonctions s.c.s.
Si $\overline{\Delta}$ est un disque fermé contenu dans Ω, alors

$$u_n(z) \leqslant \int_{\partial\Delta} \mathrm{P}_\Delta(z,\zeta) u_n(\zeta)\, d\sigma(\zeta)$$

dans Δ pour tout $n \geqslant 0$, d'après la propriété de sous-moyenne globale. En appliquant le théorème de convergence monotone, on obtient la même inégalité pour u, ce qui prouve que u est sous-harmonique.

Corollaire 12.3.4. *Soit (u_i) une famille de fonctions sous-harmoniques sur Ω telle que $\sup_i u_i(z)$ est fini pour tout z. Si la fonction $u = \sup_i u_i$ est s.c.s., alors elle est sous-harmonique.*

Preuve. Supposons que $u = \sup_i u_i$ soit s.c.s. Soit $z_0 \in \Omega$, et soit $r > 0$ tel que $\overline{\mathrm{D}}(z_0, r) \subset \Omega$. D'après la propriété de sous-moyenne globale, on a $u_i(z_0) \leqslant \int_0^{2\pi} u_i(z_0 + re^{i\theta}) \frac{d\theta}{2\pi}$ pour tout i, donc *a fortiori* $u_i(z_0) \leqslant \int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{i\theta}) \frac{d\theta}{2\pi}$. Par conséquent,

$$u(z_0) = \sup_i u_i(z_0) \leqslant \int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{i\theta}) \frac{d\theta}{2\pi},$$

ce qui prouve que u est sous-harmonique.

12.4. Moyennes circulaires ; théorème des trois cercles

Dans cette section, u est une fonction sous-harmonique dans un disque $\mathrm{D}(z_0, \mathrm{R})$. Pour $r \in [0\,;\mathrm{R}[$, on pose

$$\mathrm{I}_u(r) = \int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{i\theta}) \frac{d\theta}{2\pi}$$

et

$$\mathrm{M}_u(r) = \sup\{u(z);\ |z - z_0| = r\ \}.$$

Proposition 12.4.1. *On a $u(z_0) \leqslant \mathrm{I}_u(r) \leqslant \mathrm{M}_u(r)$, et*

$$\lim_{r\to 0} \mathrm{I}_u(r) = u(z_0) = \lim_{r\to 0} \mathrm{M}_u(r)\,.$$

Preuve. La première partie est évidente, et on a $\limsup_{r\to 0} \mathrm{M}_u(r) \leqslant u(z_0)$ car u est s.c.s.

Proposition 12.4.2. *$\mathrm{I}_u(r)$ et $\mathrm{M}_u(r)$ sont des fonctions croissantes de $r \in [0\,;\mathrm{R}[$.*

Preuve. Le fait que M_u soit une fonction croissante vient du principe du maximum. Pour montrer que I_u est croissante, fixons r_1, r_2 tels que $0 \leqslant r_1 < r_2$. D'après la proposition 12.1.3 et le théorème 11.7.8, on peut trouver une suite (h_n) de fonctions continues sur $\overline{D}(z_0, r_2)$ et harmoniques dans $D(z_0, r_2)$ qui décroît simplement vers u sur $\partial D(z_0, r_2)$.

D'après la propriété du majorant harmonique, on a $u \leqslant h_n$ dans $D(z_0, r_2)$, et donc

$$I_u(r_1) \leqslant \int_0^{2\pi} h_n(z_0 + r_1 e^{i\theta}) \frac{d\theta}{2\pi}$$

pour tout $n \geqslant 0$. Comme h_n est continue sur $\overline{D}(z_0, r_2)$ et harmonique dans $D(z_0, r_2)$, la formule de la moyenne permet d'écrire

$$\int_0^{2\pi} h_n(z_0 + r_1 e^{i\theta}) \frac{d\theta}{2\pi} = h_n(z_0) = \int_0^{2\pi} h_n(z_0 + r_2 e^{i\theta}) \frac{d\theta}{2\pi} ,$$

et on obtient ainsi

$$I_u(r_1) \leqslant \int_0^{2\pi} h_n(z_0 + r_2 e^{i\theta}) \frac{d\theta}{2\pi}$$

pour tout n. Comme (h_n) décroît vers u sur $\partial D(z_0, r_2)$, le théorème de convergence monotone permet alors de conclure qu'on a $I_u(r_1) \leqslant I_u(r_2)$.

Corollaire 12.4.3. *Si h est une fonction harmonique dans $D(0, R)$, alors, pour tout $p \in [1; +\infty[$, l'intégrale $\int_0^{2\pi} |h(re^{i\theta})|^p d\theta$ est une fonction croissante de $r \in [0; R[$.*

Ce résultat a déjà été démontré au chapitre 11 dans la section consacrée aux espaces h^p. Il découle de la proposition précédente car $|h|^p$ est sous-harmonique.

Corollaire 12.4.4. *Si f est une fonction holomorphe dans $D(0, R)$, alors $\int_0^{2\pi} \log |f(re^{i\theta})|\, d\theta$ est une fonction croissante de $r \in [0; R[$, et*

$$\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p d\theta$$

est une fonction croissante de r pour tout $p \in [0; +\infty[$.

Le premier de ces deux résultats a été démontré au chapitre 4 comme conséquence de la formule de Jensen. Le deuxième est bien sûr à comparer au corollaire précédent.

Proposition 12.4.5. *$M_u(r)$ est une fonction convexe de $\log r$ pour $r \in]0; R[$. Autrement dit, si $0 < r_0 < r_1 < R$, alors*

$$M_u(r_0^{1-\alpha} r_1^{\alpha}) \leqslant (1 - \alpha) M_u(r_0) + \alpha M_u(r_1)$$

pour tout $\alpha \in [0\,;1]$.

Preuve. Par translation, on peut supposer $z_0 = 0$. Il s'agit de montrer que si $0 < r_0 < r_1 < \mathrm{R}$ et si φ est une fonction affine sur $\mathbb{R}$, $\varphi(t) = at + b$, telle que $\mathrm{M}_u(r_0) \leqslant \varphi(\log r_0)$ et $\mathrm{M}_u(r_1) \leqslant \varphi(\log r_1)$, alors $\mathrm{M}_u(r) \leqslant \varphi(\log r)$ pour tout $r \in]r_0; r_1[$. Fixons r_0, r_1 et φ. Par hypothèse, on a $u(z) \leqslant a \log|z| + b$ sur $\{|z| = r_0\} \cup \{|z| = r_1\}$. Comme la fonction $z \mapsto \log|z|$ est harmonique sur $\mathbb{C}^*$, la propriété du majorant harmonique entraîne qu'on a $u(z) \leqslant a \log|z| + b$ sur $\mathrm{V} = \{r_0 < |z| < r_1\}$, ce qui termine la démonstration.

Corollaire 12.4.6. (Théorème des trois cercles d'Hadamard.)
Soit f une fonction holomorphe dans le disque $\mathrm{D}(0,\mathrm{R})$, et posons

$$\mathrm{M}(r) = \sup\{|f(z)|; |z| = r\}\,.$$

Alors $\log \mathrm{M}(r)$ est une fonction convexe de $\log r$ pour $r \in]0\,;\mathrm{R}[$: si $0 < r_0 < r_1$, alors

$$\mathrm{M}(r_0^{1-\alpha} r_1^{\alpha}) \leqslant \mathrm{M}(r_0)^{1-\alpha} \mathrm{M}(r_1)^{\alpha}$$

pour tout $\alpha \in [0\,;1]$.

Corollaire 12.4.7. *Une fonction sous-harmonique sur $\mathbb{C}$ tout entier et bornée supérieurement est nécessairement constante.*

Preuve. Les seules fonctions convexes bornées sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions constantes. Si u est sous-harmonique sur $\mathbb{C}$ et bornée supérieurement, la fonction convexe $t \mapsto \mathrm{M}_u(e^t)$ est donc constante sur $\mathbb{R}$, autrement dit M_u est constante sur $]0\,;+\infty[$. Comme $\mathrm{M}_u(r)$ tend vers $u(0)$ quand r tend vers 0, on en déduit $u(0) = \sup_{\mathbb{C}} u$. Par translation, on obtient $u(z) = \sup_{\mathbb{C}} u$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.

Remarque 12.4.8. *Ce résultat généralise bien sûr le théorème de Liouville.*

12.5. Intégrabilité

Si $u : \Omega \to [-\infty; +\infty[$ est s.c.s., alors, comme expliqué à la fin de la section 12.1.1, on peut définir l'intégrale de u sur un compact $\mathrm{K} \subset \Omega$ par la formule

$$\int_{\mathrm{K}} u\, dm = \int_{\mathrm{K}} u^+ dm - \int_{\mathrm{K}} u^- dm\,.$$

La fonction u est intégrable sur K au sens usuel si et seulement si $\int_{\mathrm{K}} u\, dm > -\infty$.

Lemme 12.5.1. *Si u est une fonction sous-harmonique sur Ω, alors, pour tout disque fermé $\overline{\mathrm{D}} = \overline{\mathrm{D}}(z_0, r) \subset \Omega$, on a $u(z_0) \leqslant \frac{1}{m(\mathrm{D})} \int_{\overline{\mathrm{D}}} u\, dm$. En particulier, si $z_0 \in \Omega$ vérifie $u(z_0) > -\infty$, alors u est intégrable sur tout disque $\overline{\mathrm{D}}(z_0, r) \subset \Omega$.*

Preuve. Soit u sous-harmonique dans Ω. En intégrant les fonctions positives u^+ et u^- en coordonnées polaires, on obtient

$$\int_{\overline{\mathrm{D}}} u\, dm = \int_0^r s \left(\int_0^{2\pi} u(z_0 + se^{i\theta})\, d\theta \right) ds\,.$$

Comme u est sous-harmonique, chaque intégrale $\int_0^{2\pi} u(z_0 + se^{i\theta})\, d\theta$ est supérieure ou égale à $2\pi u(z_0)$, donc $\int_{\overline{\mathrm{D}}} u\, dm \geqslant \pi r^2 u(z_0)$.

Théorème 12.5.2. *Si u est une fonction sous-harmonique dans Ω et n'est identiquement égale à $-\infty$ dans aucune composante connexe de Ω, alors u est localement intégrable sur Ω. En particulier, on a $u(z) > -\infty$ presque partout.*

Preuve. Soit $u : \Omega \to [-\infty; +\infty[$ sous-harmonique, et supposons que u n'est identiquement égale à $-\infty$ dans aucune composante connexe de Ω. Il s'agit de montrer qu'on a $\int_{\mathrm{K}} u\, dm > -\infty$ pour tout compact $\mathrm{K} \subset \Omega$, et il suffit pour cela de vérifier que pour tout $z \in \Omega$, on peut trouver V, voisinage compact de z dans Ω, tel que $\int_{\mathrm{V}} u\, dm > -\infty$. Notons A l'ensemble des points $z \in \Omega$ vérifiant cette propriété. D'après le lemme 12.5.1, l'ensemble $\{z;\ u(z) > -\infty\}$ est contenu dans A. Par hypothèse sur u, on en déduit que A rencontre chaque composante connexe de Ω. Il découle également du lemme 12.5.1 que si $z_0 \notin \mathrm{A}$, alors $u \equiv -\infty$ au voisinage de z_0. En effet, si u identiquement égale à $-\infty$ sur aucun voisinage de z_0, alors on peut trouver $z_1 \in \Omega$ tel que $u(z_1) > -\infty$ et $|z_1 - z_0| < \frac{1}{2} d(z_1, \partial\Omega)$. En posant $r = \frac{1}{2} d(z_1, \partial\Omega)$, on a $z_0 \in \mathrm{D}(z_1, r)$ et $\overline{\mathrm{D}}(z_1, r) \subset \Omega$, donc le disque $\mathrm{V} = \overline{\mathrm{D}}(z_1, r)$ montre que z_0 appartient à A d'après 12.5.1. On en déduit que $\Omega \backslash \mathrm{A}$ est un ouvert de Ω. Enfin, A est par définition également ouvert dans Ω.

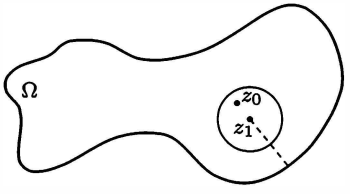


FIG. 53.

Au total, A est un ouvert fermé de Ω rencontrant chaque composante connexe de Ω, donc $\mathrm{A} = \Omega$. Cela termine la démonstration.

On dira qu'une fonction sous-harmonique $u : \Omega \to [-\infty; +\infty[$ est **non triviale** si u n'est identiquement égale à $-\infty$ dans aucune composante connexe de Ω.

Proposition 12.5.3. *Si $u : \Omega \to [-\infty; +\infty[$ est une fonction sous-harmonique non triviale, alors $\int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{i\theta})\, d\theta > -\infty$ pour tout disque $\overline{\mathrm{D}}(z_0, r) \subset \Omega$; autrement dit u est intégrable sur $\partial\mathrm{D}$, pour tout disque fermé $\overline{\mathrm{D}} \subset \Omega$.*

Preuve. Si $\int_0^{2\pi} u(z_0 + r_0 e^{i\theta}) d\theta = -\infty$ pour un certain disque $\overline{\mathrm{D}} = \overline{\mathrm{D}}(z_0, r_0) \subset \Omega$, alors $\int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{i\theta})\, d\theta = -\infty$ pour tout $r \leqslant r_0$ car cette intégrale est fonction croissante de r (proposition 12.4.2). En intégrant en coordonnées polaires, on en déduit $\int_{\overline{\mathrm{D}}} u\, dm = -\infty$, ce qui contredit l'intégrabilité locale de u.

Corollaire 12.5.4. *Si f est une fonction holomorphe non identiquement nulle au voisinage de $\overline{\mathbb{D}}$, alors $\log|f|$ est intégrable sur $\mathbb{T}$*

Ce résultat a été obtenu au chapitre 4 comme conséquence de la formule de Jensen.

12.6. Approximation par convolution

On va montrer ici qu'il est toujours possible d'approcher une fonction sous-harmonique donnée par des fonctions sous-harmoniques très régulières.

Dans ce qui suit, ρ est une fonction borélienne positive sur $\mathbb{C}$, **radiale** – c'est-à-dire telle que $\rho(z)$ ne dépend que de $|z|$ – bornée, à support contenu dans le disque unité fermé $\overline{\mathbb{D}}$, et vérifiant $\int \rho\, dm = 1$. Pour $\varepsilon > 0$, on pose

$$\rho_\varepsilon(z) = \frac{1}{\varepsilon^2}\, \rho\left(\frac{z}{\varepsilon}\right) \cdot$$

Proposition 12.6.1. *Soit u une fonction localement intégrable sur $\mathbb{C}$, et sous-harmonique dans Ω. Pour $\varepsilon > 0$, posons $u_\varepsilon = u * \rho_\varepsilon$.*

a) *Pour tout $\varepsilon > 0$, la fonction u_ε est sous-harmonique dans*

$$\Omega_\varepsilon = \{z \in \Omega;\ d(z, \partial\Omega) > \varepsilon\}\ .$$

b) *On a $\lim_{\varepsilon \to 0} u_\varepsilon(z) = u(z)$ pour tout point $z \in \Omega$.*

c) *Pour $\delta > 0$ fixé, u_ε décroît avec $\varepsilon \leqslant \delta$ sur l'ouvert Ω_δ.*

Preuve. D'après la proposition A.1.5, les fonctions u_ε sont continues, donc s.c.s. On a par définition

$$u_\varepsilon(z) \equiv \int_{\overline{\mathbb{D}}} u(z - \varepsilon h)\rho(h)\, dm(h)$$

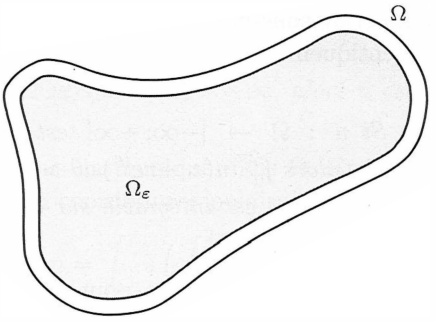


FIG. 54.

et par conséquent

$$\int_0^{2\pi} u_\varepsilon(z+re^{i\theta})\,\frac{d\theta}{2\pi} = \int_{\overline{\mathbb{D}}} \left(\int_0^{2\pi} u(z-\varepsilon h+re^{i\theta})\,\frac{d\theta}{2\pi} \right) \rho(h)\,dm(h)$$

pour tout $z \in \mathbb{C}$ et pour tout $r > 0$.

Pour démontrer *a*), fixons maintenant $\varepsilon > 0$. Si $z_0 \in \Omega_\varepsilon$ et si $r < \alpha_0 = d(z_0, \partial\Omega) - \varepsilon$, alors tous les disques $\overline{\mathrm{D}}(z_0 - \varepsilon h, r)$, $h \in \overline{\mathbb{D}}$ sont contenus dans Ω. Comme u est sous-harmonique dans Ω, on en déduit $\int_0^{2\pi} u(z_0 - \varepsilon h + re^{i\theta})\,\frac{d\theta}{2\pi} \geqslant u(z_0 - \varepsilon h)$ pour tout $h \in \overline{\mathbb{D}}$, et donc $\int_0^{2\pi} u_\varepsilon(z_0+re^{i\theta})\,\frac{d\theta}{2\pi} \geqslant \int u(z_0-\varepsilon h)\rho(h)\,dm(h) = u_\varepsilon(z_0)$ pour tout $r < \alpha_0$. Cela prouve que u_ε est sous-harmonique dans l'ouvert Ω_ε.

Pour démontrer *b*), fixons $z_0 \in \Omega$ et δ vérifiant $0 < \delta < d(z_0, \partial\Omega)$. Comme u est s.c.s. sur Ω, elle est majorée sur le compact $\overline{\mathrm{D}}(z_0, \delta/2)$, et on a $\limsup_{z \to z_0} u(z) \leqslant u(z_0)$. Les fonctions $h \mapsto u(z_0 - \varepsilon h)$ sont donc uniformément majorées sur $\overline{\mathbb{D}}$ indépendamment de $\varepsilon \leqslant \delta/2$, et on a $\limsup_{\varepsilon \to 0}(u(z_0 - \varepsilon h)) \leqslant u(z_0)$ pour tout $h \in \overline{\mathbb{D}}$. En appliquant le lemme de Fatou, on en déduit

$$\limsup_{\varepsilon \to 0} \left(\int_{\overline{\mathbb{D}}} u(z_0 - \varepsilon h)\rho(h)\,dm(h) \right) \leqslant u(z_0) \int_{\overline{\mathbb{D}}} \rho\,dm\ ,$$

autrement dit

$$\limsup_{\varepsilon \to 0} u_\varepsilon(z_0) \leqslant u(z_0)\ .$$

D'autre part, comme u est sous-harmonique dans Ω, on a $u(z_0) \leqslant \int_0^{2\pi} u(z_0 - \varepsilon r e^{i\theta})\,\frac{d\theta}{2\pi}$ pour tout $\varepsilon \leqslant \delta$ et pour tout $r \leqslant 1$. En multipliant par $r\rho(r)$ et en intégrant entre 0 et 1, on obtient

$$u(z_0) \times \int_0^1 r\rho(r)\,dr \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_{\overline{\mathbb{D}}} u(z_0 - \varepsilon h)\rho(h)\,dm(h)\ .$$

Comme ρ est radiale, on a

$$\int_0^1 r\rho(r)\,dr = \frac{1}{2\pi}\int_{\overline{\mathbb{D}}} \rho\,dm = \frac{1}{2\pi}\ ,$$

et l'inégalité précédente s'écrit donc

$$u(z_0) \leqslant u_\varepsilon(z_0)\ ,$$

pour tout $\varepsilon \leqslant \delta$. Au total, on obtient bien $\lim_{\varepsilon\to 0} u_\varepsilon(z_0) = u(z_0)$.

Pour démontrer c), fixons $\delta > 0$ et $z \in \Omega_\delta$. Comme ρ est radiale, on peut écrire

$$u_\varepsilon(z) = \int_{\overline{\mathbb{D}}} u(z-\varepsilon h)\rho(h)\,dm(h) = \int_0^1 s\rho(s)\mathrm{I}(s\varepsilon)\,ds\ ,$$

où $\mathrm{I}(r) = \int_0^{2\pi} u(z - re^{i\theta})\,d\theta$. Comme $z \in \Omega_\delta$, la fonction u est sous-harmonique dans un disque $\mathrm{D}(z,\mathrm{R})$ avec $\mathrm{R} > \delta$, donc la fonction I est croissante sur $]0\,;\delta]$ d'après la proposition 12.4.2. Par conséquent, $u_\varepsilon(z)$ décroît avec $\varepsilon \leqslant \delta$.

Corollaire 12.6.2. *Toute fonction sous-harmonique sur $\mathbb{C}$ est limite d'une suite décroissante de fonctions sous-harmoniques de classe $\mathcal{C}^\infty$.*

Preuve. Le résultat est évident pour $u(z) \equiv -\infty$: il suffit de poser $u_n(z) = -n$. Pour une fonction sous-harmonique non triviale, donc localement intégrable d'après le théorème 12.5.2, le résultat découle de la proposition précédente en prenant une fonction ρ de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Corollaire 12.6.3. *Si u est une fonction sous-harmonique sur Ω, alors, pour tout point $z \in \Omega$, on a*

$$u(z) = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\pi\varepsilon^2}\int_{\mathrm{D}(z,\varepsilon)} u\,dm\ .$$

Preuve. On peut supposer u non triviale car le résultat est évident pour un point z au voisinage duquel u est identiquement égale à $-\infty$. Soit $z_0 \in \Omega$, et soit $r > 0$ tel que $\overline{\mathrm{V}} = \overline{\mathrm{D}}(z_0,r) \subset \Omega$. La fonction $\mathbf{1}_\mathrm{V} u$, prolongée par 0 en dehors de Ω, est localement intégrable sur $\mathbb{C}$ d'après le théorème 12.5.2, et sous-harmonique dans le disque ouvert V. En prenant $\rho = \frac{1}{\pi}\,\mathbf{1}_\mathbb{D}$, la partie b) de la proposition donne

$$u(z_0) = \mathbf{1}_\mathrm{V} u(z_0) = \frac{1}{\pi}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\mathbb{D} \mathbf{1}_\mathrm{V} u(z_0-\varepsilon h)\,dm(h),$$

d'où le résultat car $z_0 - \varepsilon\mathbb{D} \subset \mathrm{V}$ si $\varepsilon \leqslant r$.

Corollaire 12.6.4. *Si u et v sont deux fonctions sous-harmoniques dans Ω et si $u(z) = v(z)$ presque partout, alors $u \equiv v$ partout.*

Preuve. Cela découle immédiatement du corollaire précédent.

12.7. Fonctions sous-harmoniques et distributions

Dans cette section, on montre que les fonctions sous-harmoniques sont exactement les fonctions dont le Laplacien au sens des distributions est une mesure positive. On en déduit plusieurs résultats importants : hypoellipticité de l'opérateur de Laplace, théorème de décomposition de Riesz, formule de Jensen.

12.7.1. Distributions positives

Proposition 12.7.1. *Pour une distribution* $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, *les propriétés suivantes sont équivalentes.*

(1) T *est la distribution associée à une mesure positive.*

(2) $\langle T, \varphi \rangle \geqslant 0$ *pour toute fonction positive* $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

Preuve. Il est clair que (1) entraîne (2). Inversement, supposons (2) vérifiée. Soit K un compact de Ω, et soit $\chi \in \mathcal{D}(\Omega)$ positive valant 1 au voisinage de K. Si $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ est réelle et vérifie $\mathrm{supp}(\varphi) \subset K$, alors $\psi = \|\varphi\|_\infty \chi - \varphi$ est une fonction de $\mathcal{D}(\Omega)$ positive. D'après (2), on a donc $\langle T, \psi \rangle \geqslant 0$, et par conséquent $\langle T, \varphi \rangle \leqslant C\|\varphi\|_\infty$, où $C = \langle T, \chi \rangle$. En changeant φ en $-\varphi$, on obtient $|\langle T, \varphi \rangle| \leqslant C\|\varphi\|_\infty$ pour toute fonction réelle $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ vérifiant $\mathrm{supp}(\varphi) \subset K$. Comme K est un compact arbitraire de Ω, on en déduit que T est une distribution d'ordre 0. Notons $\mathcal{K}(\Omega)$ l'ensemble des fonctions continues sur Ω à support compact. Si $\varphi \in \mathcal{K}(\Omega)$, alors, d'après le corollaire A.1.7, φ est limite uniforme d'une suite (φ_n) de fonctions de $\mathcal{D}(\Omega)$ à supports contenus dans un compact K indépendant de n. La suite (φ_n) est uniformément de Cauchy et toutes les fonctions $\varphi_q - \varphi_p$ sont à support dans K ; comme T est une distribution d'ordre 0, on en déduit que la suite numérique $(\langle T, \varphi_n \rangle)$ est de Cauchy, et admet donc une limite quand n tend vers l'infini. Cette limite est indépendante de la suite (φ_n) choisie, car si (ψ_n) est une autre suite approchant φ, alors la suite $\varphi_0, \psi_0, \varphi_1, \psi_1, \ldots$ est uniformément de Cauchy et donc $\lim_{n\to\infty} (\langle T, \varphi_n \rangle - \langle T, \psi_n \rangle) = 0$. En posant $\langle \tilde{T}, \varphi \rangle = \lim_{n\to\infty} \langle T, \varphi_n \rangle$, on prolonge T en une forme linéaire sur $\mathcal{K}(\Omega)$. De plus $\tilde{T}$ est une forme linéaire *positive*. En effet, si $\varphi \in \mathcal{K}(\Omega)$ est positive, alors on peut prendre les φ_n positives dans la définition de $\langle \tilde{T}, \varphi \rangle$ (il suffit pour cela de choisir $\rho \geqslant 0$ dans le corollaire A.1.7), et d'après (2), on en déduit $\langle \tilde{T}, \varphi \rangle = \lim_{n\to\infty} \langle T, \varphi_n \rangle \geqslant 0$. D'après le théorème de représentation de Riesz, il existe donc une mesure borélienne positive μ telle que $\langle \tilde{T}, \varphi \rangle = \int \varphi \, d\mu$ pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{K}(\Omega)$. En particulier, $\langle T, \varphi \rangle = \int \varphi \, d\mu$ pour toute $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, donc (1) est vérifiée.

Définition 12.7.2. *On dit qu'une distribution* $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ *est* **positive** *si elle vérifie les deux conditions équivalentes de la proposition précédente.*

12.7.2. Distributions sous-harmoniques

Dans cette section, on notera $\mathcal{D}'_{\mathbb{R}}(\Omega)$ l'ensemble des distributions **réelles** sur Ω, c'est-à-dire l'ensemble des distributions $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ vérifiant $\langle T, \varphi \rangle \in \mathbb{R}$ pour toute fonction réelle $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

Définition 12.7.3. *On dit qu'une distribution* $T \in \mathcal{D}'_{\mathbb{R}}(\Omega)$ *est* **sous-harmonique** *si* ΔT *est une distribution positive.*

Le théorème suivant généralise la proposition 12.1.10.

Théorème 12.7.4. *Pour une distribution* $T \in \mathcal{D}'_{\mathbb{R}}(\Omega)$, *les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(1) T *est sous-harmonique ;*

(2) T *est la distribution associée à une fonction sous-harmonique.*

Si ces propriétés sont vérifiées, alors il existe une unique fonction sous-harmonique u *telle que* $T = [u]$.

La démonstration utilise le lemme suivant où les notations sont les mêmes que dans la section 12.6, la fonction ρ étant choisie de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Lemme 12.7.5. *Soit* S *une distribution sur* $\mathbb{C}$, *et posons* $S_\varepsilon = S * \rho_\varepsilon$, $(\varepsilon > 0)$.

a) *Quand* ε *tend vers* 0, S_ε *tend vers* S *au sens des distributions ; autrement dit,* $\langle [S_\varepsilon], \varphi \rangle$ *tend vers* $\langle S, \varphi \rangle$ *pour toute fonction* $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{C})$.

b) *Si la restriction* S *à l'ouvert* Ω *est sous-harmonique, alors chaque fonction* S_ε *est sous-harmonique dans* $\Omega_\varepsilon = \{z \in \Omega ;\ d(z, \partial\Omega) > \varepsilon\}$. *De plus, pour tout* $\delta > 0$ *fixé,* S_ε *décroît avec* $\varepsilon \leqslant \delta$ *sur l'ouvert* $\Omega_{2\delta}$.

Preuve. Rappelons d'abord – voir le lemme B.5.1 – que si $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ et si $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, alors $T * \varphi$ est la fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ définie par

$$T * \varphi(x) = \langle T, \varphi(x - \cdot) \rangle \ .$$

Pour $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, on a

$$\langle [S_\varepsilon], \varphi \rangle = \langle S, \varphi_\varepsilon \rangle \ ,$$

où $\varphi_\varepsilon(x) = \varphi \tilde{*} \rho_\varepsilon(x) = \int \rho_\varepsilon(y) \varphi(x + y)\, dm(y)$. Comme ρ et φ sont à supports compacts, toutes les fonctions φ_ε, $\varepsilon \leqslant 1$ ont leurs supports contenus dans un compact fixe. De plus, φ_ε converge uniformément vers φ et toutes les dérivées de φ_ε convergent uniformément vers les dérivées de φ correspondantes quand ε tend vers 0. Comme S est une distribution, on en déduit a).

Supposons maintenant que la restriction de S à Ω soit sous-harmonique, autrement dit que la distribution ΔS soit positive dans Ω, et fixons $\varepsilon > 0$. La fonction S_ε est de classe $\mathcal{C}^\infty$, et on a

$$\int \Delta S_\varepsilon \, \varphi \, dm = \langle \Delta [S_\varepsilon], \varphi \rangle = \langle \Delta S * [\rho_\varepsilon], \varphi \rangle = \langle \Delta S, \varphi_\varepsilon \rangle ,$$

pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{C})$. Comme la restriction de ΔS à Ω est positive et comme $\operatorname{supp}(\varphi_\varepsilon) \subset \Omega$ si $\operatorname{supp}(\varphi) \subset \Omega_\varepsilon$, on en déduit que pour toute fonction positive $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega_\varepsilon)$, on a $\int \Delta S_\varepsilon \, \varphi \, dm \geqslant 0$. Cela entraîne que la fonction ΔS_ε est positive dans Ω_ε, et comme S_ε est une fonction réelle car S et ρ sont réelles, la proposition 12.1.10 permet de conclure que S_ε est sous-harmonique dans Ω_ε. Soit maintenant $\delta > 0$. Pour $\varepsilon' \leqslant \delta$ fixé, la proposition 12.6.1 appliquée à la fonction $S_{\varepsilon'}$ montre que $S_{\varepsilon'} * \rho_\varepsilon$ décroît avec $\varepsilon \leqslant \delta$ sur l'ouvert $(\Omega_{\varepsilon'})_\delta$, qui contient $\Omega_{2\delta}$. D'autre part, on peut écrire

$$S_{\varepsilon'} * \rho_\varepsilon = S * \rho_{\varepsilon'} * \rho_\varepsilon = S * \rho_\varepsilon * \rho_{\varepsilon'} = S_\varepsilon * \rho_{\varepsilon'} ,$$

et comme S_ε est continue, on en déduit que pour ε fixé, $S_{\varepsilon'} * \rho_\varepsilon$ converge simplement sur $\mathbb{C}$ vers S_ε quand ε' tend vers 0. De ces deux remarques, on tire que S_ε décroît avec $\varepsilon \leqslant \delta$ sur $\Omega_{2\delta}$.

Preuve du théorème 12.7.4. La partie « unicité » vient du corollaire 12.6.4, puisque deux fonctions définissent la même distribution si et seulement si elles sont égales presque partout.

Supposons que T soit associée à une fonction sous-harmonique (non triviale) u, et fixons une fonction positive $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$; soit également V un ouvert relativement compact dans Ω contenant le support de φ. D'après la proposition 12.6.1, on peut trouver une suite (u_n) de fonctions sous-harmoniques de classe $\mathcal{C}^2$ sur V qui décroît vers $u_{|V}$. D'après le théorème de convergence dominée, on a $\int u \, \Delta\varphi = \lim_{n\to\infty} \int u_n \, \Delta\varphi$, ce qui s'écrit encore $\langle \Delta T, \varphi \rangle = \lim_{n\to\infty} \int \Delta u_n \, \varphi$. Comme $\Delta u_n \geqslant 0$ pour tout n d'après la proposition 12.1.10, on a donc $\langle \Delta T, \varphi \rangle \geqslant 0$, ce qui prouve que ΔT est une distribution positive.

Inversement, supposons la propriété (1) vérifiée, et montrons que T est la distribution associée à une fonction sous-harmonique. D'après la partie « unicité », il suffit de montrer que pour tout $\delta > 0$, il existe une fonction u_δ sous-harmonique dans $\Omega_\delta = \{z \in \Omega ;\ d(z, \partial\Omega) > \delta\}$ telle que la restriction de T à Ω_δ soit égale à $[u_\delta]$. En effet, l'unicité permet alors de définir sans ambiguïté une fonction $u : \Omega \to [-\infty; +\infty[$ en posant $u(x) = u_\delta(x)$ si $x \in \Omega_\delta$, $\delta > 0$. La fonction u est sous-harmonique car sous-harmonique au voisinage de chaque point, et on a $[u] = T$ car toute fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ a son support contenu dans l'un des Ω_δ. Fixons

$\delta > 0$. Comme $\overline{\Omega}_{\delta/3} \subset \Omega$, on peut trouver une fonction $\chi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{C})$ à support contenu dans Ω et identiquement égale à 1 sur $\Omega_{\delta/3}$. On note S la distribution sur $\mathbb{C}$ définie par

$$\langle S, \varphi \rangle = \langle T, \chi\varphi \rangle \ .$$

Par le choix de χ, les distributions S et T coïncident sur $\Omega_{\delta/3}$, donc la restriction de S à $\Omega_{\delta/3}$ est sous-harmonique. Définissons les fonctions $S_\varepsilon = S * \rho_\varepsilon$ comme dans le lemme 12.7.5. D'après ce lemme, S_ε est sous-harmonique dans $\Omega_{2\delta/3}$ pour tout $\varepsilon \leqslant \delta/3$, la suite $(S_{1/n})_{n \geqslant 3/\delta}$ est décroissante sur Ω_δ, et $(S_{1/n})$ converge vers S au sens des distributions. On en déduit d'une part que la fonction $u_\delta = \inf_n S_{1/n}$ est sous-harmonique sur Ω_δ (corollaire 12.3.3) ; et d'autre part, en utilisant le théorème de convergence monotone, que u_δ est localement intégrable sur Ω_δ et que $[u_\delta]$ et S coïncident sur Ω_δ. Comme S et T coïncident sur Ω_δ, cela termine la démonstration.

Corollaire 12.7.6. *Si u est une fonction sous-harmonique non triviale, donc localement intégrable, alors la distribution $\Delta[u]$ est associée à une mesure positive.*

Exemple 12.7.7. *Si μ est une mesure positive finie sur $\mathbb{C}$ à support compact, alors le potentiel logarithmique de μ est une fonction sous-harmonique vérifiant $\Delta U^\mu = \mu$ au sens des distributions.*

Preuve. Rappelons que le potentiel logarithmique de μ est a priori défini seulement presque partout par la formule

$$U^\mu(z) = \frac{1}{2\pi} \int \log|\zeta - z| \ d\mu(\zeta) \ .$$

Toutefois, lorsque μ est positive, l'intégrale $\int \log|\zeta - z| \, d\mu(\zeta)$ est définie pour tout $z \in \mathbb{C}$ au sens de 12.1.7. Pour $\varepsilon > 0$, posons $u_\varepsilon(z) = \frac{1}{4\pi} \int \log(\varepsilon + |\zeta - z|^2) \, d\mu(\zeta)$. D'après le théorème de dérivation pour les intégrales à paramètres, les fonctions u_ε sont de classe $\mathcal{C}^2$, et un calcul laissé en exercice donne

$$\Delta u_\varepsilon(z) \equiv \frac{1}{\pi} \int \frac{\varepsilon}{\left(|\zeta - z|^2 + \varepsilon^2\right)^2} \, d\mu(\zeta) \ \geqslant 0$$

pour tout $\varepsilon > 0$. Par conséquent, les fonctions u_ε sont sous-harmoniques. D'après le théorème de convergence monotone, $u_\varepsilon(z)$ décroît vers $U^\mu(z)$ quand ε décroît vers 0, donc U^μ est sous-harmonique. Enfin, on a $\Delta U^\mu = \mu$ au sens des distributions d'après la proposition 11.10.11.

Exemple 12.7.8. *Soit f une fonction holomorphe sur Ω. On suppose que f n'est identiquement nulle dans aucune composante connexe de Ω.*

Alors, en notant S *l'ensemble des zéros de* f *et* m_a *la multiplicité d'un zéro* $a \in \mathrm{S}$, *on* a *– au sens des distributions –*

$$\Delta \log |f| = 2\pi \sum_{a \in \mathrm{S}} m_a \delta_a.$$

Preuve. Supposons d'abord que S soit fini. Dans ce cas, on peut écrire $f(z) = \prod_a (z-a)^{m_a} \times g(z)$, où g est holomorphe et ne s'annule pas ; on a donc $\log |f(z)| \equiv \sum_a m_a \log |z-a| + \log |g(z)|$. Comme la fonction $\log |g|$ est harmonique et comme $\Delta \log |z-a| = 2\pi\delta_a$ au sens des distributions pour tout a d'après le corollaire 11.10.9, cela donne le résultat dans ce cas particulier. Dans le cas général, soit (K_n) une suite exhaustive de compacts pour Ω, et posons $\Omega_n = \mathring{\mathrm{K}}_n$. Chaque Ω_n ne contient qu'un nombre fini de points de S, donc la distribution $\Delta[\log |f|]$ coïncide avec $2\pi \sum_a m_a \delta_a$ dans chacun des Ω_n d'après le premier cas. Comme toute fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ a son support contenu dans l'un des Ω_n, cela termine la démonstration.

12.7.3. Lemme de Weyl ; hypoellipticité

Si u est une fonction harmonique, on a bien sûr $\Delta u = 0$ au sens des distributions. Le résultat suivant montre que la réciproque est vraie.

Proposition 12.7.9. (Lemme de Weyl.)
Si $\mathrm{T} \in \mathcal{D}'(\Omega)$ *vérifie* $\Delta \mathrm{T} = 0$, *alors* T *est la distribution associée à une fonction harmonique.*

Preuve. On vérifie sans difficulté que toute distribution peut s'écrire $\mathrm{T} = \mathrm{T}_1 + i\mathrm{T}_2$, où $\mathrm{T}_1, \mathrm{T}_2$ sont des distributions réelles. Par conséquent, on peut se ramener au cas d'une distribution réelle. Si $\Delta \mathrm{T} = 0$, alors, d'après le théorème 12.7.4, on peut trouver deux fonction u_1, u_2 sous-harmoniques dans Ω, déterminées de manière unique, telles que $\mathrm{T} = [u_1]$ et $-\mathrm{T} = [u_2]$. La fonction $u_1 + u_2$ est sous-harmonique et nulle presque partout ; d'après le corollaire 12.6.4, elle est donc identiquement nulle, et par conséquent $u_1 = -u_2$. Si on pose $u = u_1 = -u_2$, alors u et $-u$ sont sous-harmoniques, donc u est harmonique, et on a bien sûr $[u] = \mathrm{T}$.

Corollaire 12.7.10. *Si* u *est une fonction continue sur* Ω *vérifiant* $\Delta u = 0$ *au sens des distributions, alors* u *est harmonique.*

Corollaire 12.7.11. *Si* $u \in \mathcal{C}^0(\Omega)$ *et si* $\dfrac{\partial u}{\partial \bar{z}} = 0$ *au sens des distributions, alors* u *est holomorphe.*

Preuve. Si $u \in \mathcal{C}^0(\Omega)$ vérifie $\frac{\partial [u]}{\partial \bar{z}} = 0$, alors u est harmonique d'après le corollaire précédent, donc en particulier de classe $\mathcal{C}^1$; et pour une

fonction de classe $\mathcal{C}^1$, il revient au même de dire que la distribution $\frac{\partial[u]}{\partial\bar{z}}$ est nulle ou que la fonction continue $\frac{\partial u}{\partial\bar{z}}$ est identiquement nulle.

Le lemme de Weyl entraîne en particulier qu'une distribution vérifiant $\Delta T = 0$ est $\mathcal{C}^\infty$, c'est-à-dire associée à une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$. Cela conduit à la définition suivante.

Définition 12.7.12. *Soit* $P(\partial) = \sum c_k \partial^k$ *un opérateur différentiel sur* $\mathbb{R}^n$ *à coefficients constants. On dit que* $P(\partial)$ *est* **hypoelliptique** *s'il vérifie la propriété suivante : pour tout ouvert* $W \subset \mathbb{R}^n$*, toute distribution* $T \in \mathcal{D}'(W)$ *vérifiant* $P(\partial)T \in \mathcal{C}^\infty$ *est elle-même* $\mathcal{C}^\infty$.

L'hypoellipticité n'est pas une propriété banale, comme le montre l'exemple suivant.

Exemple 12.7.13. *Si* $n \geqslant 2$*, alors les opérateurs* $\dfrac{\partial}{\partial x_i}$ *ne sont pas hypoelliptiques.*

Preuve. Soit $i \in \{1; \dots; n\}$. La formule

$$\langle T_i, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(0, \dots, x_i, \dots, 0)\, d\, _i$$

définit une distribution T_i d'ordre 0 sur $\mathbb{R}^n$, et on vérifie immédiatement qu'on a $\frac{\partial T_i}{\partial x_i} = 0$. Cependant, la distribution T_i n'est pas associée à une fonction localement intégrable car son support est la droite $\mathbb{R}e_i$, qui est de mesure nulle dans $\mathbb{R}^n$.

Proposition 12.7.14. *Les opérateurs* $\dfrac{\partial}{\partial\bar{z}}$ *et* Δ *sont hypoelliptiques.*

Preuve. Comme $\Delta = 4\frac{\partial^2}{\partial z \partial\bar{z}}$, il suffit de traiter le cas de l'opérateur Δ. Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ vérifiant $\Delta T = [f]$, où $f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$. D'après le théorème 9.3.1 appliqué à $\overline{f}$, on peut trouver une fonction $g \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ vérifiant $\frac{\partial g}{\partial z} = f$, et en appliquant à nouveau ce même théorème, on en déduit l'existence d'une fonction $h \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ vérifiant $\Delta h = f$; alors $S = T - [h]$ vérifie $\Delta S = 0$. D'après le lemme de Weyl, S est $\mathcal{C}^\infty$, donc T aussi.

Pour une démonstration plus élémentaire d'un résultat plus général, on pourra se reporter aux exercices 12.43 et B.33.

12.7.4. Théorème de décomposition de Riesz

Soit u une fonction sous-harmonique non triviale sur Ω, et notons μ la mesure positive associée à $\Delta[u]$. Comme la mesure μ provient d'une

distribution sur Ω, elle est finie sur tout compact de Ω. Pour tout ouvert $V \subset \Omega$ relativement compact dans Ω, la restriction de μ à V, notée μ_V, est donc une mesure positive finie. En considérant μ_V comme mesure sur $\mathbb{C}$ à support compact, le potentiel logarithmique de μ_V est donc bien défini en tout point de $\mathbb{C}$.

Proposition 12.7.15. (Décomposition de Riesz.)
Avec les notations précédentes, on peut écrire $u(z) = U^{\mu_V}(z) + h(z)$ *pour tout* $z \in V$, *où la fonction* h *est harmonique dans* V.

Preuve. Comme $\Delta U^{\mu_V} = \mu_V$ au sens des distributions, la distribution $\Delta[u - U^{\mu_V}]$ est nulle sur V. D'après le lemme de Weyl, il existe donc une fonction h harmonique dans V telle que $u - U^{\mu_V} = h$ presque partout dans V. On a alors $u = U^{\mu_V} + h$ presque partout dans V, et comme les fonctions u et $U^{\mu_V} + h$ sont sous-harmoniques, elles sont en fait égales partout dans V d'après le corollaire 12.6.4.

Examinons le cas $u = \log|f|$, où f est une fonction holomorphe non identiquement nulle dans un disque $D(0,R)$. Soit $r < R$, et notons $a_1, \ldots, a_n$ les zéros de f dans le disque $\overline{D}(0,r)$, comptés selon leurs multiplicités. Choisissons également $\varepsilon > 0$ tel que f n'ait pas d'autres zéros dans le disque $V = D(0, r+\varepsilon)$. On peut écrire $f(z) = (z-a_1)\ldots(z-a_n)g(z)$, où g est holomorphe et sans zéros dans V, et donc

$$u(z) = \log|g(z)| + \sum_i \log|z - a_i|$$

pour tout $z \in V$. Compte tenu de l'exemple 12.7.8, on constate donc que dans ce cas particulier, la fonction h du théorème de décomposition de Riesz est la fonction $\log|g|$, qui est bien harmonique puisque g est holomorphe et ne s'annule pas.

12.7.5. Formule de Jensen

Au vu de l'exemple 12.7.8, le résultat suivant généralise la formule de Jensen établie au chapitre 4. Il est également à comparer au théorème 11.10.5.

Théorème 12.7.16. (Formule de Jensen.)
Soit u *une fonction sous-harmonique non triviale dans un disque* $D(z_0, R)$, *et notons* μ *la mesure positive associée à* $\Delta[u]$. *Pour tout* $r < R$, *on a*

$$u(z_0) = \int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{i\theta})\,\frac{d\theta}{2\pi} + \frac{1}{2\pi}\int_{\overline{D}(z_0,r)} \log\frac{|z-z_0|}{r}\,d\mu(z)\,.$$

Preuve. Par translation, on se ramène au cas où $z_0 = 0$. Fixons $r < \mathrm{R}$, choisissons $\varepsilon > 0$ tel que $r + \varepsilon < \mathrm{R}$, et notons ν la restriction de μ au disque $\mathrm{D}(0, r+\varepsilon)$. D'après le théorème de décomposition de Riesz, la fonction $h = u - \mathrm{U}^\nu$ est harmonique dans $\mathrm{D}(0, r+\varepsilon)$. D'après le formule de la moyenne, on a donc $h(0) = \int_0^{2\pi} h(re^{i\theta}) \frac{d\theta}{2\pi}$, autrement dit

$$u(0) = \int_0^{2\pi} u(re^{i\theta}) \frac{d\theta}{2\pi} + \mathrm{U}^\nu(0) - \int_0^{2\pi} \mathrm{U}^\nu(re^{i\theta}) \frac{d\theta}{2\pi} \cdot$$

D'après le théorème de Fubini, on a

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{U}^\nu(re^{i\theta}) \frac{d\theta}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathrm{D}(0,r+\varepsilon)} \left(\int_0^{2\pi} \log|\zeta - re^{i\theta}| \frac{d\theta}{2\pi} \right) d\mu(\zeta) \cdot$$

D'autre part, on a vu au chapitre 4 (corollaire 4.4.9) que l'intégrale $\int_0^{2\pi} \log|\zeta - re^{i\theta}| \frac{d\theta}{2\pi}$ est égale à $\log|\zeta|$ si $|\zeta| > r$, et à $\log r$ si $|\zeta| \leqslant r$. On a donc

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{U}^\nu(re^{i\theta}) \frac{d\theta}{2\pi} = \frac{\log r}{2\pi} \int_{\overline{\mathrm{D}}(0,r)} d\mu + \frac{1}{2\pi} \int_{r<|\zeta|<r+\varepsilon} \log|\zeta| \; d\mu(\zeta) \cdot$$

Comme $\mathrm{U}^\nu(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathrm{D}(0,r+\varepsilon)} \log|\zeta| \, d\mu(\zeta)$, on en déduit

$$\mathrm{U}^\nu(0) - \int_0^{2\pi} \mathrm{U}^\nu(re^{i\theta}) \frac{d\theta}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \int_{\overline{\mathrm{D}}(0,r)} \log|\zeta| \, d\mu(\zeta) - \frac{\log r}{2\pi} \int_{\overline{\mathrm{D}}(0,r)} d\mu \,,$$

ce qui termine la démonstration.

Autre preuve (très abrégée). On approche u par des fonctions $u_\varepsilon = u * \rho_\varepsilon$, où ρ est de classe $\mathcal{C}^\infty$. Comme les u_ε sont de classe $\mathcal{C}^\infty$, elles vérifient la formule de Jensen d'après 11.10.5. De plus, on a $\int_{\overline{\mathrm{D}}(z_0,r)} \log \frac{|z-z_0|}{r} \Delta u_\varepsilon(z) \, dm(z) = \int_{\overline{\mathrm{D}}(z_0,r)} \varphi * u_\varepsilon \, d\mu$, où $\varphi(z) = \log \frac{|z-z_0|}{r}$. Comme φ est continue en dehors de z_0 et sous-harmonique au voisinage de z_0, on peut passer à la limite pour obtenir le résultat.

Remarque 12.7.17. *Compte tenu des remarques suivant le théorème de décomposition de Riesz, la première démonstration de la formule de Jensen est en tous points identique à celle donnée au chapitre 4 dans le cas $u = \log|f|$ (où f est holomorphe).*

12.8. Exemples d'utilisation de la sous-harmonicité

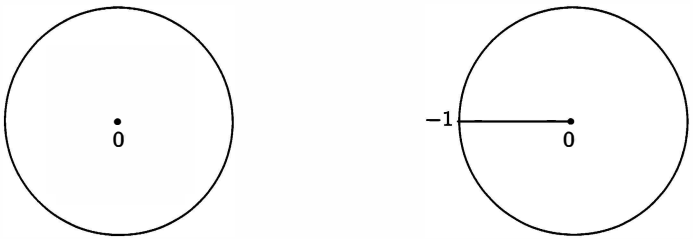
Pour terminer ce chapitre, on donne quelques exemples assez spectaculaires qui montrent l'utilité des fonctions sous-harmoniques.

12.8.1. Problème de Dirichlet

Dans cette section, V est un ouvert borné de $\mathbb{C}$.

On a vu au chapitre 11 que si V est un disque, ou plus généralement un domaine de Jordan, alors le problème de Dirichlet pour $\mathbf{u}$ et V admet une unique solution quelle que soit la fonction continue $\mathbf{u} : \partial V \to \mathbb{C}$. En suivant une méthode due à Perron, on va montrer ici que ce résultat reste valable sous des hypothèses beaucoup moins restrictive.

Dans ce qui suit, on dira qu'un point $\zeta \in \partial V$ est **régulier** si la composante connexe par arcs de $\mathbb{C}\backslash V$ contenant ζ n'est pas réduite à un point, autrement dit s'il existe un chemin $\gamma : [0;1] \to \mathbb{C}\backslash V$ tel que $\gamma(0) = \zeta$ et $\gamma(1) \neq \zeta$. Par exemple, si $V = \mathbb{D}\backslash[-1;0]$, alors tous les points de $\partial V = \partial\mathbb{D} \cup [-1;0]$ sont réguliers, mais si $V = \mathbb{D}\backslash\{0\}$, alors 0 n'est pas un point régulier de ∂V.



$V = \mathbb{D} \setminus \{0\}$
0 n'est pas régulier

$V = \mathbb{D} \setminus [-1;0]$
tous les points de ∂V
sont réguliers

FIG. 55.

Théorème 12.8.1. *Si tous les points de ∂V sont réguliers, alors, quelle que soit la fonction continue $\mathbf{u} : \partial V \to \mathbb{C}$, le problème de Dirichlet pour $\mathbf{u}$ et V admet une unique solution.*

Pour la preuve, on aura besoin de trois lemmes.

Lemme 12.8.2. *Soit $\mathbf{u} : \partial V \to \mathbb{R}$ une fonction bornée, et notons $\mathcal{L}_\mathbf{u}$ la famille de toutes les fonctions u sous-harmoniques sur V vérifiant $\limsup_{z\to\zeta} u(z) \leqslant \mathbf{u}(\zeta)$ pour tout $\zeta \in \partial V$. Alors la fonction $\mathcal{P}\mathbf{u}$ définie par*

$$\mathcal{P}\mathbf{u}(z) = \sup\{u(z);\ u \in \mathcal{L}_\mathbf{u}\}$$

est harmonique sur V.

Preuve. La fonction constante égale à $-\|\mathbf{u}\|_\infty$ appartient à $\mathcal{L}_\mathbf{u}$, donc $\mathcal{P}\mathbf{u}(z) \geqslant -\|\mathbf{u}\|_\infty > -\infty$ pour tout $z \in V$. Par ailleurs, on a $u(z) \leqslant \|\mathbf{u}\|_\infty$ dans V pour toute fonction $u \in \mathcal{L}_\mathbf{u}$, d'après le principe du maximum ;

par conséquent $\mathcal{P}\mathbf{u}(z) \leqslant \|\mathbf{u}\|_\infty < +\infty$ pour tout $z \in \mathrm{V}$. Ainsi, $\mathcal{P}\mathbf{u}$ est à valeurs réelles.

On aura besoin de deux propriétés importantes de la famille $\mathcal{L}_\mathbf{u}$.

Fait 1. *Si u_1 u_2 sont deux fonctions de $\mathcal{L}_\mathbf{u}$, alors* $\max(u_1, u_2) \in \mathcal{L}_\mathbf{u}$.
La vérification est immédiate.

Fait 2. *Si $\overline{\Delta}$ est un disque fermé contenu dans* V *et si $u \in \mathcal{L}_\mathbf{u}$ est intégrable sur $\partial\Delta$, alors la fonction $\mathcal{K}u$ définie par*

$$\mathcal{K}u(z) = \begin{cases} \mathrm{P}_\Delta u(z) & si \quad z \in \Delta \\ u(z) & si \quad z \in \mathrm{V}\backslash\Delta \end{cases}$$

appartient également à $\mathcal{L}_\mathbf{u}$. De plus, on a $\mathcal{K}u \geqslant u$.

Le deuxième point découle du théorème 12.3.1. La preuve du premier point est un exercice instructif.

Montrons maintenant que $\mathcal{P}\mathbf{u}$ est harmonique. Il suffit pour cela de prouver que $\mathcal{P}\mathbf{u}$ est harmonique dans tout disque ouvert Δ vérifiant $\overline{\Delta} \subset \mathrm{V}$; fixons un tel disque $\Delta = \Delta(z_0, r)$. Soit (u_n) une suite d'éléments de $\mathcal{L}_\mathbf{u}$ vérifiant $\lim_{n\to\infty} u_n(z_0) = \sup_n u_n(z_0) = \mathcal{P}\mathbf{u}(z_0)$. Quitte à remplacer u_n par $\mathcal{K}\tilde{u}_n$, où $\tilde{u}_n = \max(-\|\mathbf{u}\|_\infty, u_0, \dots, u_n)$, on peut supposer que la suite (u_n) est croissante et que les u_n sont harmoniques dans le disque Δ. D'après le théorème de Harnack 11.6.7, la suite (u_n) converge alors uniformément sur tout compact de Δ vers une fonction $u^0 \in h(\Delta)$. On va montrer qu'on a $\mathcal{P}\mathbf{u} \equiv u^0$ dans le disque Δ. Soit $z \in \Delta$ fixé, et soit (v_n) une suite d'éléments de $\mathcal{L}_\mathbf{u}$ vérifiant $\lim_{n\to\infty} v_n(z) = \mathcal{P}\mathbf{u}(z)$. Quitte à remplacer v_n par $\mathcal{K}\tilde{v}_n$, où $\tilde{v}_n = \max(-\|\mathbf{u}\|_\infty, v_0, \dots, v_n, u_n)$, on peut supposer que la suite (v_n) est croissante, que les v_n sont harmoniques dans le disque Δ, et qu'on a $v_n \geqslant u_n$ pour tout n. D'après le théorème de Harnack, la suite (v_n) converge uniformément sur tout compact de Δ vers une fonction $v \in h(\Delta)$. Comme $v_n \geqslant u_n$ pour tout n, on a $v \geqslant u^0$ dans le disque Δ. D'autre part, on a également $u^0(z_0) = \mathcal{P}\mathbf{u}(z_0) \geqslant v_n(z_0)$ pour tout n, et donc $u^0(z_0) \geqslant v(z_0)$. La fonction harmonique $u^0 - v$ admet donc un maximum en z_0, ce qui entraîne que u^0 et v coïncident dans le disque Δ. Comme $v(z) = \mathcal{P}\mathbf{u}(z)$, on obtient ainsi

$$u^0(z) = \mathcal{P}\mathbf{u}(z)$$

pour tout point $z \in \Delta$, ce qui termine la démonstration.

Lemme 12.8.3. *Soit $\zeta_0 \in \partial\mathrm{V}$. On suppose qu'il existe $r_0 > 0$ tel que pour tout $r \leqslant r_0$, on peut trouver une fonction $v_r : \mathrm{V} \to \mathbb{R}$ vérifiant les propriétés suivantes :*

(1) *v_r est* **sur-harmonique**, *ce qui signifie que $-v_r$ est sous-harmonique ;*
(2) *$v_r(z) \geqslant 0$ sur* V ;

(3) $v_r(z) \geqslant 1$ *si* $|z-\zeta_0| \geqslant r$;
(4) $\lim_{z\to\zeta_0} v_r(z) = 0$.

Dans ces conditions, si $\mathbf{u} : \partial V \to \mathbb{R}$ *est une fonction bornée sur* ∂V *et continue en* ζ_0, *alors* $\mathcal{P}\mathbf{u}(z)$ *tend vers* $\mathbf{u}(\zeta_0)$ *quand* $z \in V$ *tend vers* ζ_0.

Preuve. Soit $\varepsilon > 0$, et choisissons $r \in]0, r_0]$ tel que $|\mathbf{u}(\zeta) - \mathbf{u}(\zeta_0)| < \varepsilon$ pour tout $\zeta \in \partial V$ vérifiant $|\zeta - \zeta_0| < 2r$. Posons $M = \|\mathbf{u}\|_\infty$, et définissons $u : V \to \mathbb{R}$ par

$$u(z) = \mathbf{u}(\zeta_0) - \varepsilon - 2M\, v_r(z) .$$

La fonction u est sous-harmonique car v_r est supposée sur-harmonique. Si $\zeta \in \partial V \cap D(\zeta_0, 2r)$, alors $\limsup_{z\to\zeta} u(z) \leqslant \mathbf{u}(\zeta_0) - \varepsilon$ d'après (2), et donc $\limsup_{z\to\zeta} u(z) \leqslant \mathbf{u}(\zeta)$ par le choix de r. Si $\zeta \in \partial V \backslash D(\zeta_0, 2r)$, alors $|z - \zeta_0| \geqslant r$ pour z proche de ζ, donc $\limsup_{z\to\zeta} u(z) \leqslant \mathbf{u}(\zeta_0) - 2M$ d'après (3), et donc $\limsup_{z\to\zeta} u(z) \leqslant -M \leqslant \mathbf{u}(\zeta)$. La fonction u appartient donc à $\mathcal{L}_{\mathbf{u}}$, et par conséquent

$$u(z) \leqslant \mathcal{P}\mathbf{u}(z)$$

pour tout $z \in V$. Comme $\lim_{z\to\zeta_0} u(z) = \mathbf{u}(\zeta_0) - \varepsilon$ d'après (4), on en déduit $\liminf_{z\to\zeta_0} \mathcal{P}\mathbf{u}(z) \geqslant \mathbf{u}(\zeta_0) - \varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$, et donc

$$\liminf_{z\to\zeta_0} \mathcal{P}\mathbf{u}(z) \geqslant \mathbf{u}(\zeta_0) .$$

En changeant $\mathbf{u}$ en $-\mathbf{u}$, on obtient $\liminf_{z\to\zeta_0} \mathcal{P}(-\mathbf{u})(z) \geqslant -\mathbf{u}(\zeta_0)$, autrement dit

$$\limsup_{z\to\zeta_0} (-\mathcal{P}(-\mathbf{u})(z)) \leqslant \mathbf{u}(\zeta_0) .$$

Enfin, on a également

$$\mathcal{P}\mathbf{u} \leqslant -\mathcal{P}(-\mathbf{u}) .$$

En effet, si $u_1 \in \mathcal{L}_{\mathbf{u}}$ et si $u_2 \in \mathcal{L}_{-\mathbf{u}}$, alors $u = u_1 + u_2$ est une fonction sous-harmonique sur V vérifiant $\limsup_{z\to\zeta} u(z) \leqslant 0$ pour tout $\zeta \in \partial V$, donc $u_1 + u_2 \leqslant 0$ dans V d'après le principe du maximum. Comme cela est vrai pour tout couple $(u_1, u_2) \in \mathcal{P}_{\mathbf{u}} \times \mathcal{P}_{-\mathbf{u}}$, on en déduit $\mathcal{P}\mathbf{u} + \mathcal{P}(-\mathbf{u}) \leqslant 0$.

En combinant les trois inégalités précédentes, on obtient

$$\limsup_{z\to\zeta_0} \mathcal{P}\mathbf{u}(z) \leqslant \mathbf{u}(\zeta_0) \leqslant \liminf_{z\to\zeta_0} \mathcal{P}\mathbf{u}(z) ,$$

ce qui termine la preuve du lemme.

Lemme 12.8.4. *Si* ζ_0 *est un point régulier de* ∂V, *alors* ζ_0 *vérifie l'hypothèse du lemme* 12.8.3.

Preuve. On peut évidemment supposer $\zeta_0 = 0$. Choisissons un chemin $\gamma : [0;1] \to \mathbb{C}\backslash V$ tel que $\gamma(0) = 0$ et $\gamma(1) \neq 0$. On va montrer qu'on peut construire v_r pour tout $r < |\gamma(1)|$. Pour simplifier les notations, on va supposer $|\gamma(1)| > 1$ et construire la fonction v_r pour $r = 1$. Soit t_0 le premier point $t \in [0;1]$ pour lequel $|\gamma(t)| = 1$. Posons $w_0 = \gamma(t_0)$ et $L = \gamma([0;t_0])$. Par définition de t_0, on a $L\backslash\{w_0\} \subset \mathbb{D}$. En prolongeant L par une demi-droite d'origine w_0 ne rencontrant pas $\mathbb{D}$ et en appliquant le corollaire 5.4.21, on voit qu'on peut trouver une détermination continue du logarithme dans $\overline{\mathbb{D}}\backslash L$; on notera *log* cette détermination.

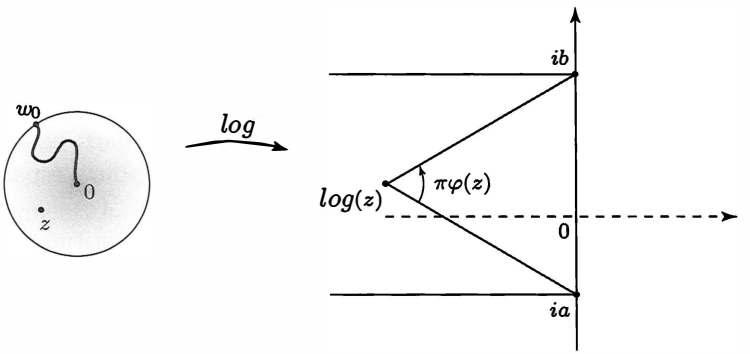


FIG. 56.

Comme $\mathrm{Re}(log(z)) \equiv \log|z|$, la fonction *log* envoie $\mathbb{D}\backslash L$ dans le demi-plan $\{\mathrm{Re}(w) < 0\}$ et $\partial\mathbb{D}\backslash\{w_0\}$ sur un intervalle ouvert de l'axe imaginaire, de longueur 2π. Notons $]ia;ib[$ l'image de $\partial\mathbb{D}\backslash\{w_0\}$ par *log*, et définissons $\varphi : V \cap \overline{\mathbb{D}} \to \mathbb{R}$ par

$$\varphi(z) = \frac{1}{\pi}\ \mathrm{Arg}_0\left(\frac{log(z) - ib}{log(z) - ia}\right).$$

où Arg_0 est la détermination principale de l'argument dans $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}^+$; $\mathrm{Arg}_0(w)$ est l'unique argument de w appartenant à $]0;2\pi[$. La définition de φ a bien un sens car $V \cap \overline{\mathbb{D}} \subset \overline{\mathbb{D}}\backslash L$ et $\frac{log(z)-ib}{log(z)-ia}$ n'est jamais réel positif pour $z \in \overline{\mathbb{D}} \setminus L$. La fonction φ est continue, et elle est harmonique sur $V \cap \mathbb{D}$ d'après la proposition 11.1.6, car *log* est holomorphe sur $V \cap \mathbb{D}$ et $\mathrm{Arg}_0 = \mathrm{Im}(\mathrm{Log}_0)$ est harmonique sur $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}^+$. De plus, on a $0 \leqslant \varphi \leqslant 1$ dans $V \cap \overline{\mathbb{D}}$, $\varphi(z) = 1$ si $z \in V \cap \partial\mathbb{D}$, et $\lim_{z\to 0} \varphi(z) = 0$. On en déduit sans difficulté que la fonction $v = v_1$ définie par

$$v(z) = \begin{cases} \varphi(z) & \text{si} \quad z \in V \cap \overline{\mathbb{D}} \\ 1 & \text{si} \quad z \in V\backslash\overline{\mathbb{D}} \end{cases}$$

satisfait aux conditions requises.

Preuve du théorème 12.8.1. On se ramène au cas d'une fonction $\mathbf{u}$ réelle, et l'existence d'une solution découle alors directement des trois lemmes précédents : il suffit de poser $u(z) = \mathcal{P}\mathbf{u}(z)$ si $z \in \mathrm{V}$, et $u(\zeta) = \mathbf{u}(\zeta)$ si $\zeta \in \partial\mathrm{V}$. L'unicité vient du principe du maximum.

12.8.2. Opérateurs de composition sur $\mathrm{H}^2(\mathbb{D})$

Notons $\mathcal{H}(\mathbb{D},\mathbb{D})$ l'ensemble des fonctions φ holomorphes dans le disque unité $\mathbb{D}$ et vérifiant $\varphi(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$. À toute fonction $\varphi \in \mathcal{H}(\mathbb{D},\mathbb{D})$ est associée l'application linéaire $\mathrm{C}_\varphi : \mathcal{H}(\mathbb{D}) \to \mathcal{H}(\mathbb{D})$ définie par

$$\mathrm{C}_\varphi f = f \circ \varphi \,.$$

On dit que C_φ est l'**opérateur de composition** associé à φ.

Il est clair que si $\varphi \in \mathcal{H}(\mathbb{D},\mathbb{D})$, alors $f\circ\varphi$ est bornée dès que $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ est bornée ; autrement dit, C_φ envoie l'espace $\mathrm{H}^\infty(\mathbb{D})$ dans lui-même. Dans cette section, on va démontrer le même résultat pour l'espace de Hardy $\mathrm{H}^2(\mathbb{D})$.

L'espace $\mathrm{H}^2(\mathbb{D})$ a été défini au chapitre 3. Il est constitué par les fonctions f holomorphes dans le disque unité $\mathbb{D}$ dont les coefficients de Taylor $c_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$ vérifient

$$\|f\|_{\mathrm{H}^2}^2 := \sum_0^\infty |c_n|^2 < +\infty \,.$$

Si $f \in \mathrm{H}^2(\mathbb{D})$, il découle de la formule de Parseval qu'on a également

$$\|f\|_{\mathrm{H}^2} = \sup_{r<1} \left(\int_0^{2\pi} \left| f(re^{i\theta}) \right|^2 \frac{d\theta}{2\pi} \right)^{1/2}$$

Pour $f \in \mathrm{H}^2(\mathbb{D})$, on notera $\mathbf{f}$ la « valeur au bord » de f, qui est la fonction de $\mathrm{L}^2(\mathbb{T})$ dont les coefficients de Fourier d'indices négatifs sont nuls et dont les coefficients de Fourier d'indices positifs sont les coefficients de Taylor de f. D'après la formule de Parseval, on a

$$\|f\|_{\mathrm{H}^2} = \|\mathbf{f}\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{T})} \,.$$

Voici maintenant le résultat annoncé.

Théorème 12.8.5. (Littlewood.) *Si $\varphi \in \mathcal{H}(\mathbb{D},\mathbb{D})$, alors C_φ envoie continûment $\mathrm{H}^2(\mathbb{D})$ dans $\mathrm{H}^2(\mathbb{D})$, avec $\|\mathrm{C}_\varphi\| \leqslant \sqrt{\frac{1+|\varphi(0)|}{1-|\varphi(0)|}}$.*

Preuve.

Cas où $\varphi(0) = 0$. Il s'agit dans ce cas de montrer que si $f \in \mathrm{H}^2(\mathbb{D})$, alors $f \circ \varphi \in \mathrm{H}^2(\mathbb{D})$ et $\|f \circ \varphi\|_{\mathrm{H}^2} \leqslant \|f\|_{\mathrm{H}^2}$. Fixons $f \in \mathrm{H}^2(\mathbb{D})$, et posons

$$\begin{cases} u = |f|^2 \\ v = |f \circ \varphi|^2 = u \circ \varphi \end{cases}$$

Pour $r < 1$, on notera $h_r : \overline{\mathrm{D}}(0,r) \to \mathbb{R}$ la solution du problème de Dirichlet pour $\mathrm{D}(0,r)$ et $\mathbf{u}_r = u_{|\partial \mathrm{D}(0,r)}$. D'après le lemme de Schwarz, on a $|\varphi(z)| \leqslant |z|$ pour tout $z \in \mathbb{D}$; en particulier, pour tout $r < 1$, φ envoie $\mathrm{D}(0,r)$ dans $\mathrm{D}(0,r)$ et $\overline{\mathrm{D}}(0,r)$ dans $\overline{\mathrm{D}}(0,r)$. On en déduit que pour $r < 1$, la fonction $h_r \circ \varphi$ est bien définie et continue sur $\overline{\mathrm{D}}(0,r)$. De plus, $h_r \circ \varphi$ est harmonique dans $\mathrm{D}(0,r)$ car h_r est harmonique et φ est holomorphe (proposition 11.1.6). En écrivant la propriété de la moyenne pour h_r et $h_r \circ \varphi$, on obtient

$$\int_0^{2\pi} u(re^{i\theta}) \frac{d\theta}{2\pi} = h_r(0) = h_r \circ \varphi(0) = \int_0^{2\pi} h_r \circ \varphi(re^{i\theta}) \frac{d\theta}{2\pi} \cdot$$

Comme la fonction u est sous-harmonique (corollaire 12.1.14), on a $u \leqslant h_r$ dans $\overline{\mathrm{D}}(0,r)$ d'après la propriété du majorant harmonique. Par conséquent, $h_r \circ \varphi \geqslant u \circ \varphi = v$ sur $\partial \mathrm{D}(0,r)$, et donc

$$\int_0^{2\pi} h_r \circ \varphi(re^{i\theta}) \frac{d\theta}{2\pi} \geqslant \int_0^{2\pi} v(re^{i\theta}) \frac{d\theta}{2\pi} \cdot$$

On obtient ainsi $\int_0^{2\pi} u(re^{i\theta}) \frac{d\theta}{2\pi} \geqslant \int_0^{2\pi} v(re^{i\theta}) \frac{d\theta}{2\pi}$, autrement dit

$$\int_0^{2\pi} \left|f(re^{i\theta})\right|^2 \frac{d\theta}{2\pi} \geqslant \int_0^{2\pi} \left|f \circ \varphi(re^{i\theta})\right|^2 \frac{d\theta}{2\pi}$$

pour tout $r < 1$. En prenant la borne supérieure en r, on obtient la conclusion souhaitée.

Cas où $\varphi = \varphi_a$, $a \in \mathbb{D}$. Rappelons que φ_a est l'automorphisme de $\mathbb{D}$ défini par $\varphi_a(z) = \frac{a-z}{1-\overline{a}z}$. L'automorphisme φ_a se prolonge en un automorphisme de $\mathbb{S}_2$, noté ψ_a, qui envoie $\partial\mathbb{D}$ sur $\partial\mathbb{D}$. Il s'agit de montrer que si $f \in \mathrm{H}^2(\mathbb{D})$, alors $f \circ \varphi_a \in \mathrm{H}^2(\mathbb{D})$ et $\|f \circ \varphi_a\|_{\mathrm{H}^2} \leqslant \sqrt{\frac{1+|a|}{1-|a|}}\, \|f\|_{\mathrm{H}^2}$; et comme les fonctions polynomiales sont denses dans $\mathrm{H}^2(\mathbb{D})$, il suffit de le vérifier pour une fonction f polynomiale. Fixons f. Soit $\mathbf{f} \in \mathrm{L}^2(\mathbb{T})$ la valeur au bord de f, qui est ici simplement la restriction de f à $\partial\mathbb{D}$. La fonction $f \circ \psi_a$ est holomorphe au voisinage de $\overline{\mathbb{D}}$, donc $f \circ \varphi_a \in \mathrm{H}^2$ et

$$\|f \circ \varphi_a\|_{\mathrm{H}^2} = \|\mathbf{f} \circ \psi_a\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{T})} \cdot$$

En appliquant le théorème de changement de variables comme dans la deuxième preuve de la formule de Poisson, on obtient

$$\int_0^{2\pi} \left|\mathbf{f} \circ \psi_a(e^{i\theta})\right|^2 d\theta = \int_0^{2\pi} \left|\mathbf{f}(e^{it})\right|^2 \left|\psi_a'(e^{it})\right| dt \,.$$

Comme $|\psi_a'(\zeta)| = \mathrm{P}_a(\zeta) = \frac{1-|a|^2}{|1-\bar{a}\zeta|^2}$ pour tout $\zeta \in \partial\mathbb{D}$ d'après le lemme 11.5.2, on a

$$|\psi_a'(e^{it})| \leqslant \frac{1-|a|^2}{(1-|a|)^2} = \frac{1+|a|}{1-|a|}$$

pour tout t, et donc

$$\|\mathrm{f} \circ \psi_a\|^2_{\mathrm{L}^2(\mathbb{T})} \leqslant \frac{1+|a|}{1-|a|}\, \|f\|^2_{\mathrm{H}^2}\,.$$

Cela termine la démonstration dans ce deuxième cas.

Cas général. En posant $a = \varphi(0)$, on a $\varphi_a \circ \varphi(0) = 0$, donc $\varphi = \varphi_a^{-1} \circ \psi = \varphi_a \circ \psi$, où $\psi \in \mathcal{H}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$ et $\psi(0) = 0$. D'après les deux premiers cas, on en déduit que C_φ envoie continûment $\mathrm{H}^2(\mathbb{D})$ dans lui-même, avec $\|\mathrm{C}_\varphi\| \leqslant \|\mathrm{C}_{\varphi_a}\|\, \|\mathrm{C}_\psi\| \leqslant \sqrt{\frac{1+|a|}{1-|a|}}$.

12.8.3. Fonctions holomorphes de plusieurs variables

Dans cette section, on va démontrer un théorème dû à Hartogs, d'après lequel une fonction de plusieurs variables complexes est holomorphe si et seulement si elle est holomorphe par rapport à chacune des variables séparément.

Dans ce qui suit, n est un entier supérieur ou égal à 2. On identifie $\mathbb{C}^n$ à $\mathbb{R}^{2n}$ via l'application

$$(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n) \mapsto (z_1, \dots, z_n) = (x_1 + iy_1, \dots, x_n + iy_n)\,.$$

Si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert de $\mathbb{C}^n$, on pose, pour $j = 1, \dots, n$:

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j} + i\frac{\partial f}{\partial y_j}\right)\,.$$

Définition 12.8.6. *Si* W *est un ouvert de* $\mathbb{C}^n$, *on dit qu'une fonction* $f : \mathrm{W} \to \mathbb{C}$ *est* **holomorphe** *sur* W *si* f *est de classe* $\mathcal{C}^1$ *et vérifie* $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j} = 0$ *pour tout* $j \in \{1\,; \dots ; n\}$.

Exemple 12.8.7. *Soit* $\mathbf{D}$ *un « polydisque » de* $\mathbb{C}^n$, $\mathbf{D} = \prod_1^n \mathrm{D}_j$, *où les* D_j *sont des disques ouverts de* $\mathbb{C}$, *et posons* $\partial_0\mathbf{D} = \prod_1^n \partial\mathrm{D}_j$. *Si* $u : \partial_0\mathbf{D} \to \mathbb{C}$ *est continue, alors la fonction* f *définie par*

$$f(z) = \int_{\partial_0 \mathrm{D}} \frac{u(\zeta_1, \dots, \zeta_n)}{(\zeta_1 - z_1) \dots (\zeta_n - z_n)}\, d\zeta_1 \dots d\zeta_n$$

est holomorphe dans $\mathbb{C}^n \backslash \partial_0\mathbf{D}$.

Preuve. Pour $(z,\zeta) \in (\mathbb{C}^n \backslash \partial_0 \mathbf{D}) \times \partial_0 \mathbf{D}$, posons

$$\mathrm{F}(z,\zeta) = \frac{u(\zeta)}{(\zeta_1 - z_1)\ldots(\zeta_n - z_n)} \cdot$$

La fonction F est holomorphe par rapport à z, et comme u est continue, toutes les dérivées de F par rapport à $z_1, \ldots, z_n$ dépendent continûment du couple (z,ζ). Ces dérivées sont donc bornées sur $\mathrm{K} \times \partial_0 \mathbf{D}$ pour tout compact $\mathrm{K} \subset \mathbb{C}^n \backslash \partial_0 \mathbf{D}$. Comme on intègre par rapport à une mesure bornée, le résultat découle donc du théorème usuel de dérivation pour les intégrales à paramètres.

Définition 12.8.8. *Soit* W *un ouvert de* $\mathbb{C}^n$. *On dit qu'une fonction* $f : \mathrm{W} \to \mathbb{C}$ *est* **séparément holomorphe** *si elle est holomorphe en chacune des variables séparément, ce qui signifie que pour tout point* $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathrm{W}$ *et pour tout* i, *la fonction* $z \mapsto f(a_1, \ldots, a_{i-1}, z, a_{i+1}, \ldots, a_n)$ *est holomorphe sur l'ouvert*

$$\Omega_{a_i} = \{z;\ (a_1, \ldots, a_{i-1}, z, a_{i+1}, \ldots, a_n) \in \mathrm{W}\} \subset \mathbb{C}\,.$$

Par définition, toute fonction holomorphe est séparément holomorphe. Il est remarquable que la réciproque soit vraie sans aucune hypothèse de régularité « jointe » sur la fonction.

Théorème 12.8.9. (Théorème de Hartogs.)
Si W *est un ouvert de* $\mathbb{C}^n$, *alors toute fonction séparément holomorphe sur* W *est en fait holomorphe.*

Pour simplifier les notations, on ne donnera la preuve de ce théorème que pour $n = 2$. On aura besoin d'un certain nombre de résultats préliminaires.

Lemme 12.8.10. *Soit* Ω *un ouvert de* $\mathbb{C}$, *et soit* (u_k) *une suite de fonctions sous-harmoniques sur* Ω ; *soit également* $\mathrm{C} \in \mathbb{R}$. *On suppose que la suite* (u_k) *est uniformément majorée sur tout compact de* Ω, *et qu'on a* $\limsup_{k\to\infty} u_k(\zeta) \leqslant \mathrm{C}$ *pour tout* $z \in \Omega$. *Pour tout compact* $\mathrm{K} \subset \Omega$, *on a alors*

$$\limsup_{k\to\infty} \left(\sup_{\zeta\in\mathrm{K}} u_k(\zeta) \right) \leqslant \mathrm{C}\,.$$

Preuve. Comme tout compact de Ω admet un voisinage compact contenu dans Ω, on peut se ramener au cas où la suite (u_k) est uniformément majorée sur Ω tout entier ; et quitte à retrancher une constante, on peut en fait supposer que les u_k sont toutes *négatives*. Fixons un compact $\mathrm{K} \subset \Omega$ et $\varepsilon > 0$. Il s'agit de trouver un entier k_0 tel que

$u_k(\zeta) \leqslant C+\varepsilon$ pour tout $k \geqslant k_0$ et pour tout $\zeta \in K$. Soit $z \in \Omega$, et choisissons $r = r(z) > 0$ tel que $\overline{D}(z,r) \subset \Omega$. Si δ vérifie $0 < \delta < \frac{1}{2}(d(z,\partial\Omega)-r)$, alors le disque $\overline{D}(z,r+2\delta)$ est contenu dans Ω, et pour $\zeta \in D(z,\delta)$, on a $\overline{D}(z,r) \subset \overline{D}(\zeta,r+\delta) \subset \Omega$. Comme les u_k sont sous-harmoniques et négatives, on en déduit

$$u_k(\zeta) \leqslant \frac{1}{\pi(r+\delta)^2} \int_{\overline{D}(\zeta,r+\delta)} u_k \, dm \leqslant \frac{1}{\pi(r+\delta)^2} \int_{\overline{D}(z,r)} u_k \, dm$$

pour tout $\zeta \in D(z,\delta)$ et pour tout k. D'autre part, une application du lemme de Fatou donne

$$\limsup_{k\to\infty} \int_{\overline{D}(z,r)} u_k \, dm \leqslant \int_{\overline{D}(z,r)} (\limsup_k u_k) \, dm \leqslant \pi r^2 C \, .$$

On obtient donc

$$\limsup_{k\to\infty} \left(\sup_{\zeta\in D(z,\delta)} u_k(\zeta) \right) \leqslant C \frac{r^2}{(r+\delta)^2}$$

pour tout $\delta < \frac{1}{2}(d(z,\partial\Omega) - r)$. Comme $\lim_{\delta\to 0} C\frac{r^2}{(r+\delta)^2} = C$, on peut choisir $\delta = \delta(z)$ de sorte que le second membre de l'inégalité soit inférieur à $C + \varepsilon$, et on a alors $\limsup_k(\sup_{D(z,\delta)} u_k(\zeta)) \leqslant C + \varepsilon$. Notons qu'on ne peut pas majorer ce second membre par C car $C \leqslant 0$. Ainsi, pour tout point $z \in \Omega$, on peut trouver un disque ouvert D_z centré en z et un entier $k(z)$ tels que $u_k(\zeta) \leqslant C + \varepsilon$ pour tout $k \geqslant k(z)$ et pour tout $\zeta \in D_z$. Par compacité, on peut recouvrir K par un nombre fini de tels disques $D_{z_1}, \ldots, D_{z_l}$, et il suffit alors de poser $k_0 = \max(k(z_1), \ldots, k(z_l))$.

Lemme 12.8.11. *Soit* $\mathbf{D} = D(a,r) \times D(\alpha,\rho)$ *un bidisque de* $\mathbb{C}^2$, *et soit* $f : \mathbf{D} \to \mathbb{C}$. *On suppose que* f *est séparément holomorphe dans le bidisque* $\mathbf{D}$, *et qu'elle est de plus bornée dans le bidisque* $\mathbf{D}' = D(a,r') \times D(\alpha,\rho)$ *pour un certain* $r' > 0$. *Alors* f *est holomorphe dans* $\mathbf{D}$.

Preuve. Sans perte de généralité, on peut supposer $a = \alpha = 0$. Pour tout point $\zeta \in D(0,\rho)$, la fonction $z \mapsto f(z,\zeta)$ est holomorphe dans $D(0,r)$. On peut donc écrire $f(z,\zeta) = \sum_0^\infty c_k(\zeta)\, z^k$ pour tout point $(z,\zeta) \in \mathbf{D}$, où les coefficients $c_k(\zeta)$ sont par exemple donnés par les formules

$$c_k(\zeta) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial D(0,r'/2)} \frac{f(z,\zeta)}{z^{k+1}} \, dz \, .$$

Comme f est holomorphe par rapport à la variable ζ et bornée dans $\mathbf{D}'$, il découle du théorème d'holomorphie pour les intégrales à paramètre que les fonctions $\zeta \mapsto c_k(\zeta)$ sont holomorphes dans $D(0,\rho)$. Les fonctions u_k définies par $u_k(\zeta) = |c_k(\zeta)|^{1/k}$ sont donc sous-harmoniques dans le disque $D(0,\rho)$. Pour tout $\zeta \in D(0,\rho)$ fixé, on a $\limsup_{k\to\infty} u_k(\zeta) \leqslant 1/r$ d'après la formule d'Hadamard pour le rayon de convergence d'une série

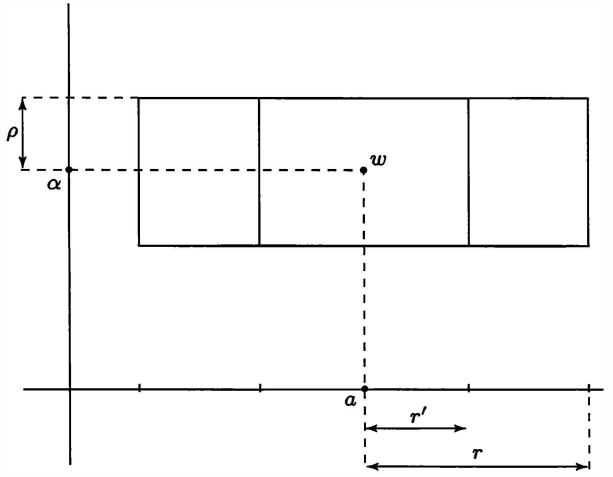


FIG. 57.

entière, car le rayon de convergence de la série $\sum c_k(\zeta)z^k$ est a moins égal à r. De plus, on a $|c_k(\zeta)| \leqslant \left(\frac{2}{r'}\right)^k \mathrm{M}$ pour tout ζ et pour tout k, où $\mathrm{M} = \sup\{|f(w)|;\ w \in \mathbf{D}'\}$, donc la suite (u_k) est uniformément majorée par $\mathrm{M}_0 = \frac{2}{r'} \sup_k \mathrm{M}^{1/k}$ sur $\mathrm{D}(0,\rho)$. D'après le lemme 12.8.10, on a donc

$$\limsup_{k\to\infty} \left(\sup_{\zeta\in\mathrm{K}} |c_k(\zeta)|^{1/k} \right) \leqslant 1/r$$

pour tout compact $\mathrm{K} \subset \mathrm{D}(0,\rho)$. D'après la formule d'Hadamard, cette majoration montre que la série $\sum c_k(\zeta)z^k$ converge uniformément par rapport au couple (z,ζ) sur tout compact de $\mathbf{D} = \mathrm{D}(0,r) \times \mathrm{D}(0,\rho)$. Comme les fonctions $(z,\zeta) \mapsto c_k(\zeta)\, z^k$ sont continues, on en déduit que f est *continue sur* $\mathbf{D}$.

Soient maintenant $r_1 < r$ et $\rho_1 < \rho$. Si (z,ζ) est un point quelconque de $\mathrm{D}(0,r_1) \times \mathrm{D}(0,\rho_1)$, alors la formule de Cauchy pour les fonctions holomorphes d'une variable permet d'écrire

$$f(z,\zeta) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial \mathrm{D}(0,r_1)} \frac{f(z_1,\zeta)}{z_1 - z}\, dz_1\,,$$

puis

$$f(z_1,\zeta) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial \mathrm{D}(0,\rho_1)} \frac{f(z_1,\zeta_1)}{\zeta_1 - \zeta}\, d\zeta_1$$

pour tout $z_1 \in \partial \mathrm{D}(0,r_1)$, d'où finalement

$$f(z,\zeta) = \frac{1}{(2i\pi)^2} \int_{\partial D(0,r_1)\times\partial D(0,\rho_1)} \frac{f(z_1,\zeta_1)}{(z_1-z)(\zeta_1-\zeta)}\, dz_1\, d\zeta_1 ,$$

cette dernière intégrale ayant un sens car la fonction f, dont on sait maintenant qu'elle est continue, est bornée sur le compact $\partial D(0,r_1) \times \partial D(0,\rho_1)$. D'après l'exemple 12.8.7, on en déduit que f est holomorphe dans $D(0,r_1) \times D(0,\rho_1)$. Comme $r_1 < r$ et $\rho_1 < \rho$ sont arbitraires, cela termine la démonstration.

Lemme 12.8.12. *Soit* E *un espace métrique complet, et soit* K *un espace topologique compact. Si* $f : E \times K \to \mathbb{C}$ *est séparément continue, alors il existe un ouvert dense* $U \subset E$ *tel que* $M(x) = \sup_{y\in K} |f(x,y)|$ *est borné au voisinage de chaque point* $x \in U$.

Preuve. Remarquons d'abord que $M(x)$ est fini pour tout $x \in E$ car la fonction $y \mapsto f(x,y)$ est continue sur le compact K, donc bornée. Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $F_n = \{x \in E;\ M(x) \leqslant n\}$. Comme toutes les fonctions $x \mapsto f(x,y)$ sont continues, les F_n sont des fermés de E, et on a $E = \bigcup_n F_n$ puisque $M(x) < +\infty$ pour tout x. D'après le théorème de Baire, $U = \bigcup_n \mathring{F}_n$ est un ouvert dense de E, qui convient par définition.

Preuve du théorème de Hartogs. Soit W un ouvert de $\mathbb{C}^2$, et soit $f : W \to \mathbb{C}$ séparément holomorphe. Il suffit de montrer que f est holomorphe au voisinage de chaque point $w \in W$. Fixons $w = (a_0,\alpha)$, et fixons également $r_0, \rho > 0$ tels que $\overline{D}(a_0,r_0) \times \overline{D}(\alpha,\rho) \subset W$. D'après le lemme 12.8.12 appliqué à $E = \overline{D}(a_0,r_0)$ et $K = \overline{D}(\alpha,\rho)$, on peut trouver $a \in \mathbb{C}$ et $r' > 0$ tels que f est bornée sur $D(a,r') \times D(\alpha,\rho)$ et $|a - a_0| < r_0/3$.

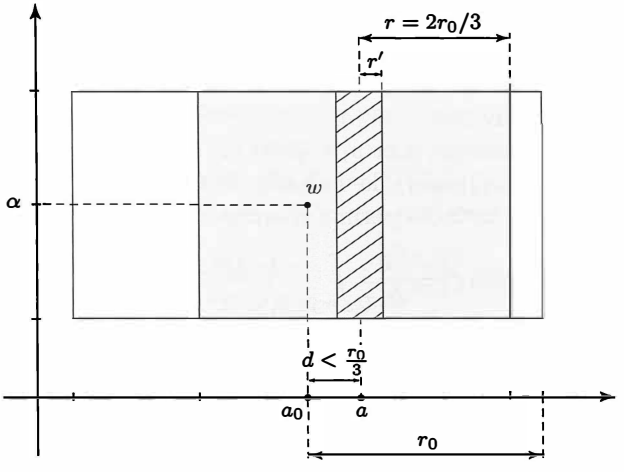


FIG. 58.

Posons $r = 2r_0/3$, et notons respectivement $\mathbf{D}$ et $\mathbf{D}'$ les bidisques $\mathrm{D}(a,r) \times \mathrm{D}(\alpha,\rho)$ et $\mathrm{D}(a,r') \times \mathrm{D}(\alpha,\rho)$. Par le choix de r, on a $w \in \mathbf{D} \subset \mathrm{D}(a_0,r_0) \times \mathrm{D}(\alpha,\rho)$. Comme $\mathrm{D}(a_0,r_0) \times \mathrm{D}(\alpha,\rho) \subset \mathrm{W}$, la fonction f est séparément holomorphe sur $\mathbf{D}$, et elle est de plus bornée sur $\mathbf{D}'$. D'après le lemme 12.8.11, f est donc holomorphe sur $\mathbf{D}$, ce qui termine la démonstration puisque $w \in \mathbf{D}$.

12.8.4. Algèbres de Banach

La lecture de cette section, dont le contenu est intégralement tiré de [57], suppose une certaine familiarité avec les algèbres de Banach. Toutes les algèbres considérées sont des algèbres sur $\mathbb{C}$.

Si A est une algèbre de Banach avec unité, alors tout homomorphisme d'algèbre $\Theta : \mathrm{A} \to \mathbb{C}$ est nécessairement continu, avec $\|\Theta\| \leqslant 1$. En effet, on a $\Theta(a - \Theta(a)\mathbf{1}) = 0$, donc, en supposant $\Theta \neq 0$, $a - \Theta(a)\mathbf{1}$ n'est pas inversible dans A, et donc $|\Theta(a)| \leqslant \|a\|$ pour tout $a \in \mathrm{A}$.

On va démontrer ici un résultat analogue pour un homomorphisme $\Theta : \mathrm{A} \to \mathrm{B}$, où A et B sont deux algèbres de Banach, l'algèbre B étant supposée *semi-simple*. Pour ce faire, on aura d'abord besoin d'établir une généralisation vectorielle du théorème affirmant la sous-harmonicité de $\log|f|$ lorsque f est une fonction holomorphe.

a. Théorème de Vesentini

Rappelons que si A est une algèbre de Banach avec unité $\mathbf{1}$, le **spectre** d'un élément $a \in \mathrm{A}$, noté $\sigma(a)$, est l'ensemble de nombres complexes λ tels que $a - \lambda\mathbf{1}$ n'est pas inversible dans A. Grâce au théorème de Liouville, on a montré au chapitre 4 que $\sigma(a)$ est toujours *non vide*. Le **rayon spectral** de a, noté $\rho(a)$, est défini par

$$\rho(a) = \sup\{|\lambda| \,;\, \lambda \in \sigma(a)\}\,.$$

Comme $a - \lambda\mathbf{1}$ est inversible si $|\lambda| > \|a\|$, on a toujours

$$\rho(a) \leqslant \|a\|\,.$$

La sous-multiplicativité de la norme entraîne que si $a \in \mathrm{A}$, alors

$$\|a^{n+m}\| \leqslant \|a^n\|\,\|a^m\|$$

pour tous $n, m \in \mathbb{N}$. De là, il n'est pas très difficile de montrer que la suite $(\|a^n\|^{1/n})$ est convergente, et converge en fait vers sa borne inférieure. La **formule du rayon spectral** (voir l'exercice 4.39) relie le rayon spectral de a et la limite de cette suite : on a

$$\rho(a) = \lim_{n\to\infty} \|a^n\|^{1/n} = \inf_n \|a^n\|^{1/n}\ .$$

Théorème 12.8.13. (Théorème de Vesentini.)
Soit A *une algèbre de Banach avec unité. Si f est une fonction holomorphe à valeurs dans* A, *alors la fonction $z \mapsto \log(\rho(f(z)))$ est sous-harmonique.*

La démonstration repose sur le lemme suivant.

Lemme 12.8.14. *Si f est une fonction holomorphe à valeurs dans une algèbre de Banach* A, *alors la fonction $z \mapsto \log\|f(z)\|$ est sous-harmonique.*

Preuve. La fonction $z \mapsto \log\|f(z)\|$ est continue à valeurs dans $[-\infty;+\infty[$, donc en particulier s.c.s. D'après le théorème de Hahn-Banach, on a $\log\|f(z)\| = \sup\{\log|a^* \circ f(z)|;\ a^* \in \mathrm{B}_{\mathrm{A}^*}\}$, où $\mathrm{B}_{\mathrm{A}^*}$ est la boule unité de A^*. Comme les fonctions $a^* \circ f$ sont holomorphes, les fonctions $\log|a^* \circ f|$ sont sous-harmoniques, donc le résultat découle de 12.3.4.

Preuve du théorème de Vesentini. Soit $f : \Omega \to \mathrm{A}$ holomorphe. Si $a \in \mathrm{A}$, alors la suite $(\|a^{2^n}\|^{1/2^n})$ est décroissante : en effet, on a $\|a^{2^{n+1}}\| = \|(a^{2^n})^2\| \leqslant \|a^{2^n}\|^2$, et donc $\|a^{2^{n+1}}\|^{1/2^{n+1}} \leqslant \|a^{2^n}\|^{1/2^n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par conséquent, si on pose

$$u_n(z) = \frac{1}{2^n} \log\|f(z)^{2^n}\| ,$$

alors $u_n(z)$ décroît vers $\log(\rho(f(z)))$ pour tout $z \in \Omega$. De plus, les fonctions u_n sont sont sous-harmoniques d'après le lemme précédent. Comme la limite d'une suite décroissante de fonctions sous-harmoniques est sous-harmonique d'après 12.3.3, cela termine la démonstration.

b. Algèbres semi-simples

Rappelons qu'un **idéal à gauche** dans un anneau B est un sous-groupe additif I vérifiant $b\mathrm{I} \subset \mathrm{I}$ pour tout $b \in \mathrm{B}$. On dit qu'un idéal à gauche est **maximal** s'il est différent de B et n'est strictement contenu dans aucun idéal à gauche hormis B. Le **radical** de l'anneau B, noté Rad(B), est l'intersection de tous ses idéaux à gauche maximaux.

Lemme 12.8.15. *Soit* B *un anneau avec unité* $\mathbf{1}$. *Pour un élément $b \in \mathrm{B}$ les propriétés suivantes sont équivalentes :*
(i) $b \in \mathrm{Rad(B)}$;
(ii) *pour tout $y \in \mathrm{B}$, $\mathbf{1} - yb$ admet un inverse à gauche dans* B.

Preuve. Supposons que $b \in \mathrm{B}$ n'appartienne pas à un certain idéal à gauche maximal I. Comme I est maximal, on a $\mathrm{B}b + \mathrm{I} = \mathrm{B}$. On peut

donc trouver $y \in \mathrm{B}$ tel que $\mathbf{1} - yb \in \mathrm{I}$. Alors $\mathbf{1} - yb$ n'est pas inversible à gauche car I est un idéal à gauche différent de B. Par conséquent, (ii) entraîne (i). Inversement, supposons que pour un certain $y \in \mathrm{B}$, $\mathbf{1} - yb$ ne soit pas inversible à gauche dans B. Alors l'idéal à gauche engendré par $\mathbf{1} - yb$ est différent de B, et est donc contenu dans un idéal à gauche maximal I. Si b appartenait à I, on aurait $\mathbf{1} = (\mathbf{1} - yb) + yb \in \mathrm{I}$, ce qui est impossible puisque $\mathrm{I} \neq \mathrm{B}$. Ainsi, $b \notin \mathrm{I}$ et donc $b \notin \mathrm{Rad(B)}$.

Corollaire 12.8.16. *Si* B *est une algèbre de Banach avec unité et si* $b \in \mathrm{B}$ *vérifie* $\rho(yb) = 0$ *pour tout* $y \in \mathrm{B}$, *alors* $b \in \mathrm{Rad(B)}$.

Preuve. La condition $\rho(yb) = 0$ signifie que $\lambda\mathbf{1} - yb$ est inversible pour tout $\lambda \neq 0$, et entraîne donc que $\mathbf{1} - yb$ est inversible.

Définition 12.8.17. *On dit qu'une algèbre est* **semi-simple** *si son radical est réduit à* $\{0\}$.

Un exemple trivial d'algèbre semi-simple est $\mathrm{B} = \mathbb{C}$. En voici un autre.

Exemple 12.8.18. *Si* H *est un espace de Hilbert, alors* $\mathcal{L}(\mathrm{H})$ *– l'algèbre des opérateurs linéaires continus sur* H *– est semi-simple.*

Preuve. Soit $\mathrm{T} \in \mathcal{L}(\mathrm{H})$, $\mathrm{T} \neq 0$. Choisissons $x_0 \in \mathrm{H}$ tel que $\mathrm{T}x_0 = y_0 \neq 0$. On peut trouver $\mathrm{S} \in \mathcal{L}(\mathrm{H})$ tel que $\mathrm{S}y_0 = x_0$: il suffit de poser $\mathrm{S}x = \dfrac{\langle x\,,y_0\rangle}{\|y_0\|^2}\,x_0$. On a alors $\mathrm{ST}x_0 = x_0$, donc $\mathrm{I}d - \mathrm{ST}$ n'est pas injectif, et n'est donc pas inversible à gauche dans $\mathcal{L}(\mathrm{H})$. D'après le lemme 12.8.15, T n'appartient pas au radical de $\mathcal{L}(\mathrm{H})$.

c. Homomorphismes d'algèbres de Banach

On est maintenant en mesure de démontrer le théorème suivant.

Théorème 12.8.19. (Johnson). *Soient* A *et* B *deux algèbres de Banach avec unités. On suppose que* B *est semi-simple. Alors tout homomorphisme surjectif* $\Theta : \mathrm{A} \to \mathrm{B}$ *est automatiquement continu.*

Preuve. Soit $\Theta : \mathrm{A} \to \mathrm{B}$ un homomorphisme d'algèbres surjectif. D'après le théorème du graphe fermé, il suffit, pour montrer que Θ est continu, de vérifier que si (a_n) est une suite d'éléments de A convergeant vers 0 et telle que $\Theta(a_n)$ admet une limite $b \in \mathrm{B}$ quand n tend vers l'infini, alors $b = 0$. Fixons (a_n) et b. On va d'abord montrer qu'on a $\rho(b) = 0$, puis que $b \in \mathrm{Rad(B)}$, ce qui terminera la démonstration car B est semi-simple.

Comme Θ est surjectif, on peut trouver $a \in A$ tel que $\Theta(a) = b$. Pour $n \in \mathbb{N}$, définissons alors $f_n : \mathbb{C} \to B$ par

$$f_n(z) = \Theta(za_n + a - a_n) = z\,\Theta(a_n) + b - \Theta(a_n)\,.$$

Les fonctions f_n sont holomorphes, donc les fonctions $z \mapsto \log(\rho(f_n(z))$ sont sous-harmoniques, d'après le théorème de Vesentini. Comme $\log 1 = 0 = \frac{1}{2}(\log r + \log 1/r)$ et comme $f_n(1) = b$, la proposition 12.4.5 appliquée entre $r > 0$ et $1/r$ donne

$$(*) \qquad \rho(b)^2 \leqslant \sup_{|z|=r} \rho\,(f_n(z)) \times \sup_{|z|=1/r} \rho\,(f_n(z))$$

pour tout $r > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$. Le rayon spectral étant toujours majoré par la norme, on a

$$\rho(f_n(z)) \leqslant \|f_n(z)\| \leqslant |z|\,\|\Theta(a_n)\| + \|b - \Theta(a_n)\|$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $z \in \mathbb{C}$. Par ailleurs, comme Θ est un homomorphisme surjectif, Θ change inversibles en inversibles. On a donc $\sigma(\Theta(x)) \subset \sigma(x)$ pour tout $x \in A$, et donc $\rho(\Theta(x)) \leqslant \rho(x)$. Par suite, on a

$$\rho(f_n(z)) \leqslant \rho(za_n + a - a_n) \leqslant |z|\,\|a_n\| + \|a - a_n\|$$

pour tout n et pour tout z. En reportant les deux inégalités précédentes dans $(*)$, on obtient

$$\rho(b)^2 \leqslant (r\,\|\Theta(a_n)\| + \|b - \Theta(a_n)\|) \times \left(\frac{1}{r}\,\|a_n\| + \|a - a_n\|\right)$$

pour tout n et pour tout $r > 0$. En faisant tendre n vers l'infini puis r vers 0, on en déduit $\rho(b)^2 \leqslant r\|b\|\,\|a\|$ puis $\rho(b) = 0$.

Montrons maintenant que $b \in \mathrm{Rad}(B)$. Si $y \in B$, alors $y = \Theta(x)$ pour un certain $x \in A$. En appliquant le résultat déjà obtenu à $(a'_n) = (xa_n)$ et $b' = yb$, on obtient $\rho(yb) = 0$ pour tout $y \in B$, donc $b \in \mathrm{Rad}(B)$ d'après 12.8.16.

Corollaire 12.8.20. (Théorème d'unicité de la norme.)

Si A *est une algèbre de Banach semi-simple, alors toutes les normes d'algèbre de Banach sur* A *sont équivalentes.*

Preuve. Si $\|\ \|_1$ et $\|\ \|_2$ sont deux normes d'algèbre de Banach sur A, le théorème précédent s'applique à $id : (A, \|\ \|_1) \to (A, \|\ \|_2)$ et $id : (A, \|\ \|_2) \to (A, \|\ \|_1)$.

Exercices

12.1. Dans la proposition 12.1.3, est-il réellement indispensable de supposer que u est bornée supérieurement ?

12.2. Soit X un espace topologique, et soit $u : X \to [-\infty ; +\infty[$ s.c.s.

1) Montrer que l'ensemble $A = \{u = -\infty\}$ est un G_δ de X, c'est-à-dire une intersection dénombrable d'ouverts.

2) On suppose que X est un espace métrique complet. Montrer que si $\overline{A}$ n'a pas de points isolés, alors A est non dénombrable.

3) Sous les hypothèses de 2), essayer de montrer que A contient un compact non dénombrable.

12.3. Montrer que toute fonction convexe $u : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ est sous-harmonique. Que dire de la réciproque ?

12.4. Soit $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$. Montrer que u est convexe si et seulement si sa matrice Hessienne $(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j})$ est positive en tout point.

12.5. Soit u une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$, et soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$. Montrer que si $\Delta u \geqslant 0$ et si φ est convexe croissante, alors $\Delta(\varphi \circ u) \geqslant 0$.

12.6. Montrer que si v est une fonction harmonique réelle, alors v^2 est sous-harmonique.

12.7. Soit u une fonction harmonique réelle. Montrer que si $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est convexe – non nécessairement croissante – alors $\varphi \circ u$ est sous-harmonique.

12.8. Trouver une fonction u sous-harmonique sur $\mathbb{C}$, non constante, mais admettant un maximum local en 0.

12.9. Soient $u_1, \ldots, u_n$ des fonctions sous-harmoniques sur un ouvert connexe. On suppose que $u_1 + \cdots + u_n$ admet un maximum global. Montrer que les fonctions u_i sont harmoniques.

12.10. Énoncer et démontrer un principe du maximum pour une fonction u de classe $\mathcal{C}^2$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$ vérifiant $\Delta u \geqslant 0$.

12.11. On note $\mathcal{C}$ la famille de toutes les fonctions $u : \Omega \to \mathbb{R}$ vérifiant les propriétés suivantes : u est continue, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ et $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ existent en tout point de Ω, et $\Delta u \geqslant 0$ dans Ω.

1) Montrer que si $u \in \mathcal{C}$, alors, pour tout disque fermé $\overline{D} \subset \Omega$, on a $\sup_{\overline{D}} u = \sup_{\partial D} u$.

2) Montrer que si $u \in \mathcal{C}$, alors u est sous-harmonique.

12.12. Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, et soit $u : I \to \mathbb{R}$ une fonction convexe. Montrer que si u admet un maximum global, alors u est constante.

12.13. Montrer que le résultat de l'exercice précédent est valable si on suppose seulement que la fonction u est continue et que pour tout $t \in I$, on a $u(t) \leqslant \frac{1}{2}\big(u(t-r) + u(t+r)\big)$ pour r suffisamment petit. En déduire qu'une fonction vérifiant ces deux propriétés est nécessairement convexe.

12.14. Soit u une fonction sous-harmonique strictement négative sur $\mathbb{D}$.

1) Montrer à l'aide du principe du maximum qu'il existe une constante $c > 0$ telle que

$$u(z) - c \log |z| \leqslant 0$$

pour tout z vérifiant $1/2 < |z| < 1$.

2) Montrer que pour tout $\zeta \in \mathbb{T}$, on a

$$\limsup_{r \to 1} \frac{u(r\zeta)}{1-r} < 0 .$$

12.15. Soit $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ holomorphe vérifiant $f(z) = z + o(|z-1|^3)$ au voisinage de 1.

1) On pose $\varphi(z) = \frac{1+z}{1-z}$ et $u(z) = \mathrm{Re}(\varphi(z) - \varphi \circ f(z))$. Montrer qu'on a $\limsup_{z \to \zeta} u(z) \leqslant 0$ pour tout $\zeta \in \mathbb{T}$, et $u(z) = o(|z-1|)$ au voisinage de 1.

2) En utilisant l'exercice précédent, montrer que u est identiquement nulle.

3) Conclure qu'on a $f(z) \equiv z$.

12.16. (Principe de Phragmén-Lindelöf.)

Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert non borné, et soit u une fonction sous-harmonique sur Ω. On suppose que u vérifie les propriétés suivantes :

(1) $\limsup_{z \to \zeta} u(z) \leqslant 0$ pour tout $\zeta \in \partial\Omega$;

(2) il existe une fonction $v : \Omega \to \mathbb{R}$ **sur-harmonique** (ce qui signifie que $-v$ est sous-harmonique) telle que $\liminf_{z \to \infty} v(z) > 0$ et $\limsup_{z \to \infty} u(z)/v(z) \leqslant 0$.

Le but de l'exercice est de montrer qu'on a $u \leqslant 0$ dans Ω.

1) *a*) On suppose qu'on a $v(z) > 0$ pour tout $z \in \Omega$. En appliquant le principe du maximum aux fonctions $u - \varepsilon v$, $\varepsilon > 0$, démontrer le résultat souhaité dans ce cas particulier.

b) Démontrer le résultat souhaité dans le cas où v est bornée inférieurement.

2) Soit $\delta > 0$.

a) Montrer qu'il existe un ouvert $V \subset \Omega$ contenant l'ensemble $\{u \geqslant \delta\}$ tel que v est bornée inférieurement sur V.

b) Montrer qu'on a $u \leqslant \delta$ sur V.

3) Conclure.

12.17. Soit u une fonction sous-harmonique sur $\mathbb{C}^*$ vérifiant $\limsup_{z \to 0} u(z) \leqslant 0$ et $\limsup_{z \to \infty} \dfrac{u(z)}{\log|z|} \leqslant 0$. En utilisant l'exercice précédent, montrer qu'on a $u \leqslant 0$.

12.18. (Théorème de Liouville.)

Soit u une fonction sous-harmonique sur $\mathbb{C}$ vérifiant $\limsup_{z \to \infty} \dfrac{u(z)}{\log|z|} \leqslant 0$. Montrer que u est constante.

12.19. (Théorème des trois droites.)

1) Soit $\gamma > 0$, et soit u une fonction sous-harmonique dans la bande $\Omega_\gamma = \{|\mathrm{Re}(z)| < \pi/2\gamma\}$. On suppose qu'on a $\limsup_{z \to \zeta} u(\zeta) \leqslant 0$ pour tout $\zeta \in \partial\Omega_\gamma$, et qu'il existe deux constantes $A < +\infty$ et $\alpha < \gamma$ telles que $u(z) \leqslant A\, e^{\alpha |\mathrm{Im}(z)|}$ pour tout $z \in \Omega_\gamma$. En appliquant l'exercice 12.16 avec $v(z) = \mathrm{Re}(\cos(\beta z)) = \cos(\beta x) ch(\beta y)$, où $\alpha < \beta < \gamma$, montrer qu'on a $u \leqslant 0$ dans Ω_γ.

2) Soit u sous-harmonique dans la bande $\Omega = \{0 < \mathrm{Re}(z) < 1\}$, et vérifiant $u(x+iy) \leqslant A\, e^{\alpha|y|}$ dans Ω, où $A < +\infty$ et $\alpha < \pi$. En considérant $\tilde{u}(z) = u(z) - \mathrm{Re}\big((1-z)M_0 + zM_1\big)$, montrer que pour $z = x+iy \in \Omega$, on a

$$u(z) \leqslant (1-x)\,M_0 + x\,M_1\,,$$

où

$$M_0 = \sup\{\limsup_{z\to\zeta} u(\zeta);\, \mathrm{Re}(\zeta)=0\} \text{ et } M_1 = \sup\{\limsup_{z\to\zeta} u(\zeta);\, \mathrm{Re}(\zeta)=1\}.$$

12.20. Soient U, V deux ouverts de $\mathbb{C}$, soit $f : U \to V$ holomorphe, et soit u une fonction sous-harmonique sur U.

1) On suppose que f est injective. En utilisant la caractérisation de la sous-harmonicité par la propriété du majorant harmonique, montrer que $u \circ f$ est sous-harmonique.

2) On suppose qu'on a $0 \in V$ et $f(z) = z^k$, pour un certain entier k. Montrer que $u \circ f$ est sous-harmonique.

3) On ne suppose plus rien sur f. En raisonnant comme dans l'exercice 8.19, montrer que $u \circ f$ est néanmoins sous-harmonique.

12.21. Soit $(T, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré, avec μ finie. Si $f : T \to [-\infty\,; +\infty[$ est mesurable et bornée supérieurement, on pose $\int f d\mu = \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu$. On se donne une fonction $F : T \times \Omega \to [-\infty\,; +\infty[$ vérifiant les propriétés suivantes :

(1) pour tout $t \in T$, l'application $z \mapsto F(t,z)$ est sous-harmonique ;

(2) pour tout $z \in \Omega$, l'application $t \mapsto F(t,z)$ est mesurable ;

(3) pour tout compact $K \subset \Omega$, $\sup_K F(t,z)$ est majoré par une fonction $f_K \in L^1(T,\mu)$.

Montrer que la fonction u définie par $u(z) = \int_T F(t,z)\, d\mu(t)$ est sous-harmonique sur Ω.

12.22. Soit $A = \{a_n;\, n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{C}$ un ensemble dénombrable. En utilisant l'exercice précédent, montrer que si les nombres $c_n > 0$ sont convenablement choisis, alors la formule

$$u(z) = \sum_0^\infty c_n \log|z - a_n|$$

(dont le sens est à préciser) définit une fonction sous-harmonique non triviale sur $\mathbb{C}$.

12.23. Montrer que si $t \in \mathbb{R}^+$, alors $\frac{t^\alpha - 1}{\alpha}$ décroît vers $\log t$ quand α décroît vers 0. En déduire que si u est une fonction positive sur Ω, alors $\log u$ est sous-harmonique si et seulement si u^α est sous-harmonique pour tout $\alpha > 0$.

12.24. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, et soit $u : I \to \mathbb{R}$ une fonction à valeurs strictement positives. Montrer que u est logarithmiquement convexe si et seulement si u^α est convexe pour tout $\alpha > 0$.

12.25. Soient u et v deux fonctions positives sur Ω. Montrer que si $\log u$ et $\log v$ sont sous-harmoniques, alors $\log(u+v)$ est également sous-harmonique. On pourra utiliser l'exercice 12.23.

12.26. Montrer que la fonction $z \mapsto \log|1/d(z,\partial\Omega)|$ est sous-harmonique sur Ω.

12.27. Soit u une fonction sous-harmonique sur un disque $D(0,R)$; on suppose que u est radiale. Montrer que $u(r)$ est une fonction convexe croissante de $\log r$ pour $r \in]0;R[$, et qu'on a $\lim_{r\to 0} u(r) = u(0)$.

12.28. Déterminer toutes les fonctions sous-harmoniques radiales sur $\mathbb{C}$.

12.29. (Théorème de convexité de Riesz.)
Soit u une fonction sous-harmonique dans un disque $D(0,R)$.
1) Montrer que la fonction $z \mapsto \int_0^{2\pi} u(ze^{i\theta})\,d\theta$ est sous-harmonique.
2) Montrer que $I_u(r) = \int_0^{2\pi} u(re^{i\theta})\,\frac{d\theta}{2\pi}$ est une fonction convexe de $\log r$.

12.30. (Théorème de Liouville, 2.)
Soit u une fonction sous-harmonique non triviale sur $\mathbb{C}$ vérifiant

$$\limsup_{z\to\infty} \frac{u(z)}{\log|z|} \leqslant 0\,.$$

Déduire de l'exercice précédent que u est en fait harmonique, puis montrer que u est constante.

12.31. On dit qu'un borélien $A \subset \mathbb{C}$ est un ensemble **polaire** s'il existe une fonction sous-harmonique non triviale $u : \mathbb{C} \to [-\infty;+\infty[$ identiquement égale à $-\infty$ sur A.
0) Montrer que tout ensemble polaire est de mesure nulle, et que tout sous-ensemble d'un ensemble polaire est polaire.
1) Montrer que tout ensemble fini est polaire.
2) Montrer que toute partie dénombrable de $\mathbb{C}$ est polaire, et qu'il existe des ensembles polaires non dénombrables. On pourra utiliser les exercices 12.22 et 12.2.

12.32. Soit $L \subset \mathbb{C}$ un segment non réduit à un point.
1) Soit u une fonction sous-harmonique sur $\mathbb{C}$, identiquement égale à $-\infty$ sur L ; soit également Δ un disque ouvert ayant L comme diamètre, et notons Δ^+, Δ^- les deux demi-disques ouverts délimités par L. On définit $v : \Delta \to [-\infty;+\infty[$ par

$$v(z) = \begin{cases} u(z) & \text{si } z \in \Delta^+ \\ -\infty & \text{si } z \in L \cup \Delta^- \end{cases}$$

Montrer que v est sous-harmonique, puis qu'on a $v \equiv -\infty$.
2) Conclure que L n'est pas polaire (voir l'exercice précédent pour la définition).

12.33. Essayer de montrer qu'une réunion dénombrable d'ensembles polaires est encore polaire (voir l'exercice 12.31 pour la définition).

12.34. Montrer que si u est une fonction sous-harmonique sur $\mathbb{C}$ et si f est une fonction entière, alors $u \circ f$ est sous-harmonique. On pourra commencer par le cas où u est de classe $\mathcal{C}^2$.

12.35. Montrer que si u est une fonction continue sur $\mathbb{C}$, alors

$$u(z) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\pi \varepsilon^2} \int_{\mathrm{D}(z,\varepsilon)} u \, dm$$

pour tout $z \in \mathbb{C}$, mais que ce résultat n'est plus vrai si u est seulement supposé s.c.s.

12.36. Deux fonctions s.c.s. sur $\mathbb{C}$ égales presque partout sont-elles nécessairement égales partout ?

12.37. Montrer que toute distribution T s'écrit de manière unique $\mathrm{T} = \mathrm{T}_1 + i\mathrm{T}_2$, où T_1 et T_2 sont des distributions réelles.

12.38. Soit T une distribution sur $\mathbb{R}$. Montrer que T est la distribution associée à une fonction affine si et seulement si $\mathrm{T}'' = 0$.

12.39. Soit $\mathrm{T} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Montrer que T est la distribution associée à une fonction convexe si et seulement si T'' est une distribution positive.

12.40. Soit $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe, et soit μ la mesure positive associée à $[u]''$ (voir l'exercice précédent). Montrer que pour tout $\alpha > 0$, on a

$$u(0) = \frac{u(\alpha) + u(-\alpha)}{2} + \frac{1}{2} \int_{-\alpha}^{\alpha} (|t| - \alpha) \, d\mu(t) \, .$$

12.41. Montrer qu'on définit une distribution sur $\mathbb{R}^2$ en posant

$$\langle \mathrm{T}, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x, -x) \, dx \, .$$

En déduire que l'opérateur $\dfrac{\partial}{\partial x} - \dfrac{\partial}{\partial y}$ n'est pas hypoelliptique.

12.42. Montrer que si $\mathrm{P} = \mathrm{P}(\partial)$ est un opérateur hypoelliptique, alors toutes les solutions fondamentales de P sont $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$.

12.43. Soit $\mathrm{P}(\partial) = \mathrm{P} = \sum a_{\mathbf{k}} \partial^{\mathbf{k}}$ un opérateur différentiel à coefficients constants. On suppose que P admet une solution fondamentale $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$, autrement dit qu'il existe une distribution $\mathrm{E} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ vérifiant $\mathrm{PE} = \delta_0$ dont la restriction à $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ est $\mathcal{C}^\infty$. Le but de l'exercice est de démontrer que P est hypoelliptique.

1) Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, et soit $\mathrm{T} \in \mathcal{D}'(\Omega)$; soit également $\mathrm{V} \subset \Omega$ un ouvert relativement compact dans Ω. En calculant $\mathrm{P}(\beta \mathrm{T} * \alpha \mathrm{E}_0)$ de deux façons différentes, montrer que si $\beta \in \mathcal{D}(\Omega)$ est identiquement égale à 1 au voisinage de $\overline{\mathrm{V}}$ et si $\alpha \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ est identiquement égale à 1 au voisinage de 0, alors on peut écrire $\beta \mathrm{T} = [\psi] + \beta \mathrm{P}(\mathrm{T}) * \alpha \mathrm{E} + \mathrm{S} * \alpha \mathrm{E}$, où $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ et S est une distribution vérifiant $\mathrm{supp}(\mathrm{S}) \cap \overline{\mathrm{V}} = \emptyset$.

2) Avec les notations du 1), montrer que si la fonction α est convenablement choisie, alors la distribution $\mathrm{S} * \alpha \mathrm{E}$ est nulle sur V.

3) Conclure.

12.44. Soit u une fonction sous-harmonique non triviale dans un disque $\mathrm{D}(0,\mathrm{R})$, avec $\mathrm{R} > 1$, et soit μ la mesure positive associée à $\Delta[u]$. Montrer que pour tout point $a \in \mathbb{D}$, on a

$$u(a) = \int_{\partial\mathbb{D}} u(\zeta)\mathrm{P}_a(\zeta)\, d\sigma(\zeta) + \frac{1}{2\pi}\int_{\overline{\mathbb{D}}} \log\left|\frac{z-a}{1-\bar{a}z}\right| d\mu(z)\,.$$

12.45. (Théorème de Liouville, 3.)

Soit u une fonction sous-harmonique sur $\mathbb{C}$ vérifiant $\limsup_{z\to\infty} \dfrac{u(z)}{\log|z|} \leqslant 0$. Utiliser la formule de Jensen pour montrer que u est en fait harmonique, puis montrer que u est constante.

12.46. (Potentiel de Green.) Soit μ une mesure positive sur $\mathbb{D}$, finie sur les compacts et vérifiant

$$(*) \qquad \int (1-|\zeta|)\, d\mu(\zeta) \;< +\infty\,.$$

Le **potentiel de Green** de μ est la fonction $\mathcal{G}\mu : \mathbb{D} \to [-\infty\,;+\infty[$ définie par

$$\mathcal{G}\mu(z) = \int \mathrm{G}(z\,,\zeta)\, d\mu(\zeta)\,,$$

où on a posé

$$\mathrm{G}(z\,,\zeta) = \frac{1}{2\pi}\,\log\left|\frac{z-\zeta}{1-\bar{z}\zeta}\right|.$$

1) Montrer que $\mathcal{G}\mu$ est une fonction sous-harmonique non triviale sur $\mathbb{D}$, et qu'on a $\Delta(\mathcal{G}\mu) = \mu$ au sens des distributions.

2) Montrer qu'on a $\lim_{r\to 1}\int_0^{2\pi} \mathcal{G}\mu(re^{i\theta})\, d\theta = 0$.

12.47. Soit u une fonction sous-harmonique non triviale sur $\mathbb{D}$ vérifiant

$$\sup_{r<1}\int_0^{2\pi} u^+(re^{i\theta})\, d\theta < +\infty\,.$$

1) Montrer que la mesure $\mu = \Delta[u]$ vérifie la condition $(*)$ de l'exercice précédent.

2) Montrer qu'on peut écrire

$$u = \mathcal{G}(\Delta u) + v\,,$$

où v est une fonction de $h^1(\mathbb{D})$.

3) Dans le cas où $u = \log|f|$ pour une fonction $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, identifier la condition $(*)$ et expliciter la décomposition donnée au 2).

12.48. Soit V un ouvert borné de $\mathbb{C}$.

1) *a*) Montrer que si $a \in \partial\mathrm{V}$, alors tout voisinage de a rencontrant $\mathbb{C}\backslash\overline{\mathrm{V}}$ contient un point régulier de $\partial\mathrm{V}$ (voir la section 12.8.1).

b) En déduire que si $\mathbb{C}\backslash\mathrm{V}$ est l'adhérence de son intérieur, alors l'ensemble des points réguliers de $\partial\mathrm{V}$ est dense dans $\partial\mathrm{V}$.

2) Que dire de la réciproque ?

12.49. Soit $\varphi \in \mathcal{H}(\mathbb{D},\mathbb{D})$. Montrer que si $f \in h^p(\mathbb{D})$, $p > 1$, alors $f \circ \varphi \in h^p(\mathbb{D})$. Qu'en est-il pour $p = 1$?

12.50. Le but de l'exercice est de donner une preuve « élémentaire » du théorème de Littlewood. Dans tout l'exercice, φ est une fonction de $\mathcal{H}(\mathbb{D},\mathbb{D})$ et on note C_φ l'opérateur de composition associé.

0) Montrer que si f est une fonction polynomiale, alors $C_\varphi f \in H^2$.

1) On définit $M_\varphi : \mathcal{H}(\mathbb{D}) \to \mathcal{H}(\mathbb{D})$ par $M_\varphi f = \varphi f$, et $S : H^2 \to H^2$ par $Sf(z) = \sum_0^\infty \hat{\mathbf{f}}(n+1)z^n$, où $\mathbf{f} \in L^2(\mathbb{T})$ est la valeur au bord de f. Montrer que pour toute fonction $f \in H^2$, on a

$$C_\varphi f = f(0) + M_\varphi C_\varphi S f \ .$$

2) On suppose qu'on a $\varphi(0) = 0$. Montrer que si $f \in H^2$ est polynomiale, alors

$$\|C_\varphi f\|_{H^2}^2 = |f(0)|^2 + \|M_\varphi C_\varphi S f\|_{H^2}^2 \leqslant |f(0)|^2 + \|C_\varphi S f\|_{H^2}^2 \ ,$$

et en déduire qu'on a $\|C_\varphi f\|_{H^2} \leqslant \|f\|_{H^2}$ pour toute fonction polynomiale f.

3) Conclure que si $\varphi(0) = 0$, alors C_φ envoie continûment H^2 dans H^2, avec $\|C_\varphi\| \leqslant 1$.

12.51. Soit $\lambda \in]0\,;1[$, et soit $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ définie par $\varphi(z) = \lambda z + 1 - \lambda$.

1) Pour $r \in [0\,;1[$, on définit $f_r : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ par $f_r(z) = \frac{\sqrt{1-r^2}}{1-rz}$.

a) Montrer que f_r tend faiblement vers 0 dans $H^2(\mathbb{D})$ quand r tend vers 1.

b) Calculer $\|C_\varphi f_r\|_{H^2}$.

2) L'opérateur de composition C_φ est-il compact ?

12.52. Soient $\varphi, \Phi \in \mathcal{H}(\mathbb{D},\mathbb{D})$. On suppose que Φ est injective et qu'on a $\varphi(\mathbb{D}) \subseteq \Phi(\mathbb{D})$. Montrer que si l'opérateur de composition C_Φ est compact, alors C_φ est également compact.

12.53. Soit $\Phi \in \mathcal{H}(\mathbb{D},\mathbb{D})$. On suppose que $\Phi(\mathbb{D})$ contient un disque tangent au cercle unité. Montrer que l'opérateur de composition C_Φ n'est pas compact.

12.54. Soit $\varphi \in \mathcal{H}(\mathbb{D},\mathbb{D})$, et soit $\varphi^* \in L^\infty(\mathbb{T})$ la valeur au bord de φ (voir le chapitre 11). On suppose que l'ensemble

$$E = \{\zeta \in \mathbb{T}; |\varphi^*(\zeta)| = 1\}$$

est de mesure positive dans $\mathbb{T}$. En considérant $C_\varphi z^n$ pour $n \in \mathbb{N}$, montrer que l'opérateur de composition C_φ n'est pas compact.

12.55. Soit $\varphi \in \mathcal{H}(\mathbb{D},\mathbb{D})$. On suppose que φ est injective et qu'on a

$$\lim_{|z|\to 1} \frac{1-|\varphi(z)|}{1-|z|} = +\infty \ .$$

Le but de l'exercice est de montrer que l'opérateur de composition C_φ est compact.

1) Pour $r < 1$, on pose $\varepsilon(r) = \sup\{\frac{1-|z|^2}{1-|\varphi(z)|^2};\ |z| \geqslant r\}$. En utilisant l'exercice 3.93, montrer que pour toute fonction $f \in \mathrm{H}^2(\mathbb{D})$, on a

$$\frac{1}{2}\,\|\mathrm{C}_\varphi f - f(\varphi(0)\|_{\mathrm{H}^2}^2 \leqslant \int_{\overline{\mathrm{D}}(0,r)} \big|(f\circ\varphi)'(z)\big|^2 \big(1-|z|^2\big)\, dm(z) + \varepsilon(r)\|f-f(0)\|_{\mathrm{H}^2}^2 .$$

2) Déduire de 1) et de l'exercice 3.92 que si (f_n) est une suite convergeant faiblement vers 0 dans $\mathrm{H}^2(\mathbb{D})$, alors $\mathrm{C}_\varphi f_n$ tend vers 0 en norme.

3) Conclure.

12.56. Soit $\varphi \in \mathcal{H}(\mathbb{D},\mathbb{D})$. On suppose que l'opérateur de composition C_φ est compact. Le but de l'exercice est de montrer qu'on a

$$\lim_{|z|\to 1} \frac{1-|\varphi(z)|}{1-|z|} = +\infty .$$

On notera k le noyau reproduisant de $\mathrm{H}^2(\mathbb{D})$, $k(a,b) = \dfrac{a-b}{1-\overline{a}b}$, et C_φ^* l'adjoint de l'opérateur C_φ.

1) Montrer que pour tout $z \in \mathbb{D}$, on a $\mathrm{C}_\varphi^* k_z = k_{\varphi(z)}$.

2) *a*) Montrer que $f_z = \frac{k_z}{\|k_z\|_2}$ tend faiblement vers 0 quand $|z|$ tend vers 1.

b) Calculer $\|\mathrm{C}_\varphi^* f_z\|_{\mathrm{H}^2}^2$ pour tout $z \in \mathbb{D}$.

3) Conclure.

12.57. Soit $\varphi \in \mathcal{H}(\mathbb{D},\mathbb{D})$, et soit $\varphi^* \in \mathrm{L}^\infty(\mathbb{T})$ la valeur au bord de la fonction φ (voir le chapitre 11). Montrer que l'opérateur de composition $\mathrm{C}_\varphi : \mathrm{H}^2 \to \mathrm{H}^2$ est un opérateur de Hilbert-Schmidt si et seulement si

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{1-|\varphi^*(e^{it})|^2}\, dt < +\infty .$$

Montrer que cette condition est par exemple réalisée si $\|\varphi\|_\infty < 1$.

12.58. Trouver une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ séparément continue mais non continue.

12.59. Soient X, Y, Z trois espaces métriques. Montrer que si $f : \mathrm{X}\times\mathrm{Y} \to \mathrm{Z}$ est une fonction séparément continue, alors f est borélienne ; plus précisément, montrer que pour tout fermé $\mathrm{A} \subset \mathrm{Z}$, $f^{-1}(\mathrm{A})$ est un G_δ de $\mathrm{X}\times\mathrm{Y}$, c'est-à-dire une intersection dénombrable d'ouverts.

12.60. Montrer que si (a_n) est une suite de réels positifs vérifiant $a_{n+m} \leqslant a_n a_m$ pour tous $n, m \in \mathbb{N}$, alors la suite $(a_n^{1/n})$ converge vers sa borne inférieure.

12.61. Dans une algèbre de Banach *commutative*, comment se traduit l'appartenance au radical en termes de caractères ?

12.62. L'algèbre de Banach $\mathcal{C}([0\,;1])$ est-elle semi-simple ?

12.63. Soit X un espace de Banach. L'algèbre $\mathcal{L}(\mathrm{X})$ est-elle semi-simple ?

12.64. Trouver un exemple d'algèbre de Banach non semi-simple.

12.65. Soient A, B deux algèbres de Banach avec unités. On suppose que B est commutative et semi-simple. En utilisant le théorème du graphe fermé et l'exercice 12.61, montrer que tout homomorphisme de A dans B est continu.

12.66. Soit B un anneau avec unité $\mathbf{1}$.

1) *a*) Soit $b \in \mathrm{Rad(B)}$. Montrer que si $y \in \mathrm{B}$, alors il existe $z \in \mathrm{Rad(B)}$ tel que $(\mathbf{1}-z)(\mathbf{1}-yb)=\mathbf{1}$; en déduire que $\mathbf{1}-yb$ est inversible.

b) Conclure qu'un élément $b \in \mathrm{B}$ appartient au radical de B si et seulement si $\mathbf{1}-yb$ est inversible pour tout $y \in \mathrm{B}$.

2) Montrer que le radical de B est l'intersection de tous ses idéaux à droite maximaux.

3) On suppose que B est une algèbre de Banach. Montrer que pour $b \in \mathrm{B}$, les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) $b \in \mathrm{Rad(B)}$;

(ii) $\rho(yb)=0$ pour tout $y \in \mathrm{B}$;

(iii) $\rho(by)=0$ pour tout $y \in \mathrm{B}$.

12.67. Soit B un anneau avec unité $\mathbf{1}$, et soient $u, v \in \mathrm{B}$. Montrer que $\mathbf{1}-uv$ est inversible si et seulement si $\mathbf{1}-vu$ est inversible. Suggestion : écrire formellement $(\mathbf{1}-uv)^{-1}$ et $(\mathbf{1}-vu)^{-1}$ comme sommes de séries.

12.68. Soit A une algèbre de Banach commutative avec unité, et soit $\mathrm{D} : \mathrm{A} \to \mathrm{A}$ une **dérivation** de A, c'est-à-dire une application linéaire vérifiant

$$\mathrm{D}(ab)=\mathrm{D}(a)b+a\mathrm{D}(b)$$

pour tous $a, b \in \mathrm{A}$. On suppose de plus que D est continue.

1) Montrer que si $a, b \in \mathrm{A}$, alors

$$\mathrm{D}^n(ab)=\sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k\, \mathrm{D}^k(a)\mathrm{D}^{n-k}(b)$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2) Déduire de 1) que l'opérateur e^{D}, qui est bien défini comme élément de $\mathcal{L}(\mathrm{A})$, est un automorphisme de l'algèbre A.

3) Soit $a \in \mathrm{A}$, et soit χ un caractère de A. En utilisant 2), montrer que l'application $z \mapsto \chi(e^{\mathrm{D}}(za))$ est une fonction entière bornée.

4) Montrer que si $a \in \mathrm{A}$, alors $\mathrm{D}(a)$ appartient au radical de A.

12.69. Soit $(\mathrm{X}, \|\ \|)$ un espace de Banach.

1) Montrer que si $\mathrm{T} : \mathrm{X} \to \mathrm{X}$ est une application linéaire inversible, alors X est complet pour la norme $|||\ |||$ définie par $|||x||| = \|\mathrm{T}(x)\|$.

2) Montrer que si X est de dimension infinie, alors il existe sur X une norme non équivalente à $\|\ \|$ et pour laquelle X est néanmoins complet.

Annexe A

Convolution, partitions de l'unité

A.1. Convolution

A.1.1. Définition et exemples

Si f et g sont deux fonctions mesurables sur $\mathbb{R}^n$, la **convolée** de f par g est la fonction $f * g$ définie par

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)\, g(y)\, dm(y)\ .$$

Pour un x donné, cette formule a un sens dès que la fonction $y \mapsto f(x-y)g(y)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^n$; on dit alors que $f * g$ est *définie en* x. Dans ce cas, on a également

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\, g(x-y)\, dm(y)$$

par changement de variables.

Proposition A.1.1. *Si f est localement intégrable (c'est-à-dire intégrable sur tout compact) et si g est bornée à support compact, alors $f * g$ est définie en tout point $x \in \mathbb{R}^n$. De plus, on a*

$$\operatorname{supp}(f * g) \subset \operatorname{supp}(f) + \operatorname{supp}(g)\ ,$$

où la **somme** *de deux ensembles $\mathrm{A}, \mathrm{B} \subset \mathbb{R}^n$ est définie par*

$$\mathrm{A} + \mathrm{B} = \{x + y\ ;\ (x\,, y) \in \mathrm{A} \times \mathrm{B}\}\ .$$

Preuve. Sous les hypothèses de la proposition, on vérifie immédiatement que $f * g$ est définie en tout point. D'autre part, on a $f * g(x) = \int_{\operatorname{supp}(f)} f(y) g(x-y)\, dm(y)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$. Si $x \notin \operatorname{supp}(f) + \operatorname{supp}(g)$, alors $g(x-y) = 0$ pour tout $y \in \operatorname{supp}(f)$, et donc $f * g(x) = 0$. Ainsi, $f * g$ est nulle en dehors de $\operatorname{supp}(f) + \operatorname{supp}(g)$, et comme $\operatorname{supp}(f) + \operatorname{supp}(g)$ est fermé car $\operatorname{supp}(f)$ est fermé et $\operatorname{supp}(g)$ compact, on en déduit $\operatorname{supp}(f * g) \subset \operatorname{supp}(f) + \operatorname{supp}(g)$.

Proposition A.1.2. *Soient $p, q \in [1; \infty]$ vérifiant $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Si $f \in \mathrm{L}^p(\mathbb{R}^n)$ et si $g \in \mathrm{L}^q(\mathbb{R}^n)$, alors $f * g$ est définie en tout point. De plus, $f * g$ est bornée et*

$$\|f * g\|_\infty \leqslant \|f\|_p\, \|g\|_q\ .$$

Preuve. Cela découle de l'inégalité de Hölder.

Proposition A.1.3. *Si $f \in \mathrm{L}^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$ et si $g \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^n)$, alors $f * g$ est définie presque partout. De plus, $f * g \in \mathrm{L}^p$ et*

$$\|f * g\|_p \leqslant \|f\|_p \, \|g\|_1 \, .$$

Preuve. Soient $f \in \mathrm{L}^p$ et $g \in \mathrm{L}^1$, $g \neq 0$. Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, l'inégalité de Jensen appliquée à la mesure de probabilité $\mathbf{P} = \frac{|g|}{\|g\|_1} m$ permet d'écrire

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)g(y)| \, dm(y) \right)^p \leqslant \|g\|_1^{p-1} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)|^p \, |g(y)| \, dm(y) \, .$$

Grâce au théorème de Fubini, on en déduit

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)g(y)| \, dm(y) \right)^p dm(x) \leqslant \|g\|_1^p \, \|f\|_p^p < +\infty \, ,$$

ce qui montre que la fonction mesurable positive φ définie par

$$\varphi(x) = \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y) \, g(y)| \, dm(y)$$

est dans L^p, avec une norme inférieure à $\|g\|_1 \, \|f\|_p$. Par conséquent, $\varphi(x)$ est presque partout fini, autrement dit $f * g$ est défini presque partout, et $f * g \in \mathrm{L}^p$, avec $\|f * g\|_p \leqslant \|\varphi\|_p \leqslant \|g\|_1 \, \|f\|_p$.

Corollaire A.1.4. *Muni du produit de convolution, l'espace $\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^n)$ devient une algèbre de Banach commutative.*

Tout ce qui vient d'être dit est valable sur le cercle $\mathbb{T}$, le produit de convolution étant cette fois défini – partout ou seulement presque partout – par la formule

$$f * g(\zeta) = \int_{\mathbf{T}} f(\eta) \, g(\zeta \eta^{-1}) \, d\sigma(\zeta) \, ,$$

où σ est la mesure de Lebesgue normalisée sur $\mathbb{T}$. Autrement dit :

$$f * g(e^{it}) = \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) \, g(e^{i(t-\theta)}) \, \frac{d\theta}{2\pi} \, .$$

On utilise plusieurs fois dans ce livre le fait que la transformation de Fourier change convolution en multiplication ordinaire : si $f, g \in \mathrm{L}^1(\mathbb{T})$, alors

$$\widehat{f * g}\,(n) = \hat{f}(n) \, \hat{g}(n)$$

pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

A.1.2. Régularisation et approximation

Le produit de convolution permet, entre autres choses, de « régulariser » les fonctions, et d'approximer une fonction donnée par des fonctions très régulières. C'est le contenu des deux résultats suivants.

Proposition A.1.5. *Soit $f \in \mathrm{L}^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ et soit $\rho \in \mathrm{L}^\infty(\mathbb{R}^n)$ à support compact.*

a) *La fonction $f * \rho$ est continue.*

b) *Si ρ est de classe C^k, $k \geqslant 1$, alors $f * \rho$ est de classe C^k et*

$$\partial^\alpha (f * \rho) = f * \partial^\alpha \rho$$

pour tout multi-indice α tel que $|\alpha| \leqslant k$.

Preuve. La partie *b*) découle de l'identité

$$f * \rho(x) = \int f(y)\rho(x-y)\, dm(y)$$

et du théorème usuel de dérivation pour les intégrales à paramètres.

Pour démontrer *a*), fixons un point $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Soit V un voisinage borné de x_0, et soit $\mathrm{A} = \mathrm{V} - \mathrm{supp}(\rho)$. Par définition de A, on a $\mathbf{1}_\mathrm{A}(x-y) = 1$ si $x \in \mathrm{V}$ et $y \in \mathrm{supp}(\rho)$, donc $f * \rho \equiv (\mathbf{1}_\mathrm{A} f) * \rho$ sur V. Comme A est borné, la fonction $(\mathbf{1}_\mathrm{A} f)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^n$, et peut donc s'approcher en norme L^1 par des fonctions continues à support compact. D'après la proposition A.1.2, on en déduit que $(\mathbf{1}_\mathrm{A} f) * \rho$ s'approche uniformément par des fonctions du type $\varphi * \rho$, où φ est continue à support compact. De telles fonctions sont continues d'après le théorème de continuité pour les intégrales à paramètres, donc $(\mathbf{1}_\mathrm{A} f) * \rho$ est continue sur $\mathbb{R}^n$. Comme $f * \rho \equiv (\mathbf{1}_\mathrm{A} f) * \rho$ sur V, on a donc montré que $f * \rho$ est continue au voisinage de tout point $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

Théorème A.1.6. *Soit $\rho \in \mathrm{L}^\infty(\mathbb{R}^n)$ à support compact et vérifiant $\int \rho\, dm = 1$. Pour toute fonction f localement intégrable sur $\mathbb{R}^n$ et pour $\varepsilon > 0$, posons $f_\varepsilon = f * \rho_\varepsilon$, où $\rho_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n}\rho(x/\varepsilon)$. Quand ε tend vers 0, $f_\varepsilon(x)$ tend vers $f(x)$ en tout point de continuité de f, et si f est uniformément continue, alors f_ε tend vers f uniformément.*

Preuve. Un changement de variables homothétique montre qu'on a

$$f_\varepsilon(x) \equiv \int_{\mathbb{R}^n} f(x - \varepsilon y)\rho(y)\, dm(y)\ .$$

Comme $\int \rho\, dm = 1$, on peut donc écrire, en posant $\mathrm{L} = \mathrm{supp}(\rho)$:

$$f_\varepsilon(x) - f(x) = \int_\mathrm{L} (f(x - \varepsilon y) - f(x))\rho(y)\, dm(y)\ .$$

Soit $\| \ \|$ une norme sur $\mathbb{R}^n$. Comme L est compact, on peut trouver $R > 0$ tel que $L \subset B(0, R)$. On a donc

$$|f_\varepsilon(x) - f(x)| \leqslant M_\varepsilon(x) \, ||\rho||_1$$

pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, où

$$M_\varepsilon(x) = \sup \{|f(u) - f(x)|; \ \|u - x\| \leqslant \varepsilon R\} .$$

Le théorème s'en déduit immédiatement.

Corollaire A.1.7. *Toute fonction $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{K}$ continue à support compact est limite uniforme d'une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ dont les supports sont compacts et arbitrairement proches de* $\mathrm{supp}(\varphi)$.

Preuve. On sait que toute fonction continue à support compact est uniformément continue. Compte tenu du théorème précédent, de la proposition A.1.5 et de l'inclusion $\mathrm{supp}(\varphi * \rho_\varepsilon) \subset \mathrm{supp}(\varphi) + \varepsilon \ \mathrm{supp}(\rho)$, il suffit donc de montrer qu'il existe au moins *une* fonction $\rho \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ à support compact et vérifiant $\int \rho \, dm = 1$. La fonction $\chi_0 : [0; +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $\chi_0(t) = 0$ si $t > 1$ et $\chi_0(t) = e^{-\frac{1}{1-t}}$ si $t \leqslant 1$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$. En notant $|\ |$ la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$, la fonction χ définie sur $\mathbb{R}^n$ par $\chi(x) = \chi_0(|x|^2)$ est positive, non nulle, de classe $\mathcal{C}^\infty$ car $|\ |^2$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$, et à support contenu dans la boule unité (fermée) euclidienne. Il suffit alors de poser $\rho = \chi/c$, où $c = \int \chi \, dm$.

A.2. Fonctions plateaux ; partitions de l'unité

Dans cette section, on commence par montrer que si K est un compact de $\mathbb{R}^n$ et si W est un ouvert contenant K, alors on peut trouver une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ à support compact identiquement égale à 1 sur K et à support contenu dans W ; une telle fonction s'appelle une **fonction-plateau**. Les fonctions-plateaux sont souvent utilisées dans ce livre.

On démontre ensuite l'existence de *partitions $\mathcal{C}^\infty$ de l'unité* subordonnées à un recouvrement ouvert fini d'un compact de $\mathbb{R}^n$. Ce résultat est utilisé dans la preuve de la formule de Stokes au chapitre 2, et on en a également besoin pour définir le support d'une distribution.

On démontre enfin un autre résultat du même type, un peu plus délicat que le précédent. Ce résultat est utilisé au chapitre 9.

Dans la suite, on note $|\ |$ la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$, et $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ l'ensemble des fonctions $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ à support compact.

Lemme A.2.1. *Si* K *est un compact de $\mathbb{R}^n$ et si* W *est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ contenant* K, *alors il existe une fonction $\chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ vérifiant $0 \leqslant \chi \leqslant 1$,* $\mathrm{supp}(\chi) \subset$ W *et $\chi \equiv 1$ au voisinage de* K.

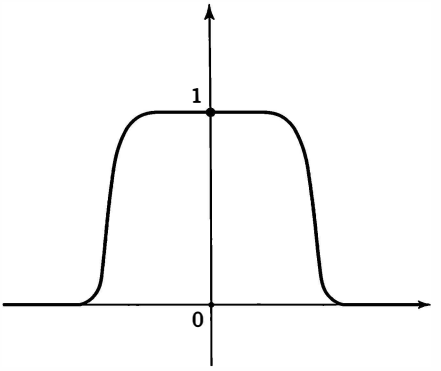


FIG. 59. Fonction plateau

Preuve. Pour $r > 0$, on notera B_r la boule fermée $\overline{B}(0,r)$. Remarquons d'abord que pour tout $r > 0$, on peut trouver une fonction positive $\rho_r \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ telle que $\mathrm{supp}(\rho_r) \subset B_r$ et $\int \rho_r \, dm = 1$: il suffit de poser $\rho_r(x) = r^{-n}\rho(x/r)$, où ρ est la fonction introduite dans la preuve du corollaire A.1.7. Fixons maintenant K et W, choisissons $\varepsilon > 0$ tel que $K + B_{3\varepsilon} \subset W$, et posons

$$\chi = \mathbf{1}_{K+B_{2\varepsilon}} * \rho_\varepsilon \, .$$

Comme $\rho_\varepsilon \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, la fonction χ est de classe $\mathcal{C}^\infty$; de plus, on a $\mathrm{supp}(\chi) \subset K + B_{3\varepsilon} \subset W$. Comme $\rho_\varepsilon \geqslant 0$, on a $0 \leqslant \chi(x) \leqslant \int \rho_\varepsilon \, dm = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$. Enfin, on a $\chi \equiv 1$ sur $K + B_\varepsilon$. En effet, comme le support de ρ_ε est contenu dans B_ε, on peut écrire

$$\chi(x) = \int_{B_\varepsilon} \mathbf{1}_{K+B_{2\varepsilon}}(x-y)\rho_\varepsilon(y)\, dm(y) \, .$$

Si $x \in K + B_\varepsilon$, alors $\mathbf{1}_{K+B_{2\varepsilon}}(x-y) = 1$ pour tout $y \in B_\varepsilon$, et donc $\chi(x) = \int_{B_\varepsilon} \rho_\varepsilon \, dm = 1$.

Théorème A.2.2. *Soit* K *un compact de* $\mathbb{R}^n$. *Si* $\mathcal{W} = (W_1, \dots, W_k)$ *est un recouvrement fini de* K *par des ouverts de* $\mathbb{R}^n$, *alors il existe des fonctions* $\chi_1, \dots, \chi_k \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ *vérifiant* $0 \leqslant \chi_i \leqslant 1$, $\mathrm{supp}(\chi_i) \subset W_i$ *pour tout* i *et* $\sum_1^k \chi_i \equiv 1$ *au voisinage de* K.

Preuve. Fixons $\mathcal{W} = (W_1, \dots, W_k)$. Comme K est compact, on peut trouver un nombre fini de boules ouvertes $B_1, \dots, B_N$ vérifiant les propriétés suivantes : $K \subset \bigcup_{s \leqslant N} B_s$ et, pour tout $s \leqslant N$, il existe un entier $i(s) \in \{1; \dots; k\}$ tel que $\overline{B}_s \subset W_{i(s)}$. Si on pose $S_i = \{s \leqslant N ;\ i(s) = i\}$ et $V_i = \bigcup_{s \in S_i} B_s$, alors les $\overline{V}_i$ sont compacts, $\overline{V}_i \subset W_i$ pour tout i et $K \subset \bigcup_1^k V_i$. D'après le lemme A.2.1, il existe des fonctions $\psi_i \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$

telles que $0 \leqslant \psi_i \leqslant 1$, $\psi_i > 0$ sur $\overline{\mathrm{V}}_i$ et $\mathrm{supp}(\psi_i) \subset \mathrm{W}_i$ pour tout $i \in \{1; \dots; k\}$. La fonction $\psi = \sum_i \psi_i$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$, positive, et ne s'annule pas sur K ; par conséquent, l'ensemble $\mathrm{O} = \{x \in \mathbb{R}^n;\ \psi(x) > 0\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ contenant K, et on peut donc trouver une fonction $\chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ positive, à support contenu dans O, identiquement égale à 1 au voisinage de K. Posons alors $\chi_i(x) = \psi_i(x)\chi(x)/\psi(x)$ si $x \in \mathrm{O}$, et $\chi_i(x) = 0$ si $x \notin \mathrm{O}$. Par définition, les fonctions χ_i sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur O et identiquement nulles sur l'ouvert $\mathrm{O}' = \mathbb{R}^n \setminus \mathrm{supp}(\chi)$. Comme $\mathrm{O} \cup \mathrm{O}' = \mathbb{R}^n$ par le choix de χ, les χ_i sont donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^n$, et on vérifie immédiatement qu'elles ont toutes les propriétés requises.

Définition A.2.3. *Avec les notations précédentes, on dit que* $(\chi_1, \dots, \chi_k)$ *est une* **partition de l'unité** *pour* K *subordonnée au recouvrement ouvert* $(\mathrm{W}_1, \dots, \mathrm{W}_k)$.

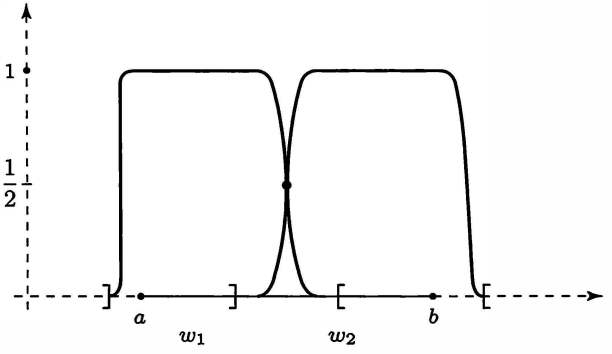


FIG. 60. Partition de l'unité sur un intervalle $[a, b]$

On va maintenant démontrer un second résultat de partition de l'unité. Introduisons d'abord une définition.

Définition A.2.4. *Si* W *est un ouvert de* $\mathbb{R}^n$, *on dit qu'une famille* $(\mathrm{X}_i)_{i \in \mathrm{I}}$ *de parties de* W *est* **localement finie** *relativement à* W *si chaque point* $x \in \mathrm{W}$ *possède un voisinage ne rencontrant qu'un nombre fini de* X_i.

Les deux lemmes suivants sont presque évidents mais néanmoins importants.

Lemme A.2.5. *Soit* W *un ouvert de* $\mathbb{R}^n$. *Si* (X_i) *est une famille de parties de* W *localement finie relativement à* W, *alors l'adhérence dans* W *de* $\bigcup_i \mathrm{X}_i$ *est égale à* $\bigcup_i \overline{\mathrm{X}_i}^{\mathrm{W}}$; *en particulier, si les* X_i *sont des fermés de* W, *alors* $\bigcup_i \mathrm{X}_i$ *est encore un fermé de* W.

Preuve. On a bien sûr $\bigcup_i \overline{\mathrm{X}_i}^{\mathrm{W}} \subseteq \overline{\bigcup_i \mathrm{X}_i}^{\mathrm{W}}$, que la famille (X_i) soit localement finie ou non. Inversement, supposons (X_i) localement finie

relativement à W, et fixons un point $x \in W$ adhérent à $\bigcup_i X_i$. Soit W_0 un voisinage de x ne rencontrant qu'un nombre fini de X_i, et posons $J = \{i \in I;\ X_i \cap W_0 \neq \emptyset\}$. Comme W_0 est un voisinage de x, le point x est adhérent à $\bigcup_{i\in J} X_i$; et comme J est fini, on a $\overline{\bigcup_{i\in J} X_i} = \bigcup_{i\in J} \overline{X}_i$. Par conséquent, $x \in \bigcup_i \overline{X_i}$.

Lemme A.2.6. *Soit* W *un ouvert de* $\mathbb{R}^n$, *et soit* $(\chi_i)_{i\in I}$ *une famille de fonctions de classe* $\mathcal{C}^\infty$ *sur* W. *On suppose que la famille* $(\mathrm{supp}(\chi_i))$ *est localement finie relativement à* W. *Alors la fonction* $\chi = \sum_{i\in I} \chi_i$ *est bien définie, et elle est de classe* $\mathcal{C}^\infty$.

Preuve. La somme ne comporte localement qu'un nombre fini de termes non nuls.

Théorème A.2.7. *Si* $(W_i)_{i\in I}$ *est un recouvrement ouvert d'un ouvert* $W \subset \mathbb{R}^n$, *il existe une famille* $(\chi_i)_{i\in I} \subset \mathcal{C}^\infty(W)$ *vérifiant les propriétés suivantes :*

(i) *pour tout* $i \in I$, $\mathrm{supp}(\chi_i) \subset W_i$ *et* $0 \leqslant \chi_i \leqslant 1$;

(ii) *la famille* $(\mathrm{supp}(\chi_i))_{i\in I}$ *est localement finie relativement à* W ;

(iii) $\sum_i \chi_i \equiv 1$ *sur* W.

On dit que (χ_i) *est une* **partition de l'unité** *pour* W *subordonnée au recouvrement* (W_i).

Preuve. Fixons W et $(W_i)_{i\in I}$. Soit également $(K_p)_{p\in\mathbb{N}}$ une suite exhaustive de compacts pour W, avec $K_0 = \emptyset$; cela signifie que les K_p sont des compacts de W, qu'on a $K_p \subset \mathring{K}_{p+1}$ pour tout p, et que tout compact de W est contenu dans l'intérieur de l'un des K_p (voir le lemme 3.5.8). Pour tout $p \in \mathbb{N}$, la compacité de $K_{p+1}\backslash\mathring{K}_p$ permet de trouver une famille finie de boules ouvertes $(B_s)_{s\in S_p}$, telle que $\overline{B}_s \subset \mathring{K}_{p+2}\backslash K_p$ pour tout s, chaque $\overline{B}_s$ est contenue dans un certain $W_{i(s)}$, et $K_{p+1}\backslash\mathring{K}_p \subset \bigcup_{s\in S_p} B'_s$, où B'_s est la boule de même centre que B_s et de rayon moitié. Pour chaque $s \in S_p$, on peut ensuite choisir une fonction $\psi_s \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ telle que $\psi_s \geqslant 0$, $\mathrm{supp}(\psi_s) \subset B_s$ et $\psi_s > 0$ sur B'_s. Notons $(\psi_s)_{s\in S}$ la famille de toutes les fonctions ainsi obtenues lorsque l'entier p décrit $\mathbb{N}$, et $(B_s)_{s\in S}$ la familles de boules correspondantes. Ici, bien sûr, $S = \bigcup_p S_p$, les ensembles d'indices S_p étant supposés deux à deux disjoints. Par construction, chaque K_p, donc chaque compact de W, ne rencontre qu'un nombre fini de boules B_s ; de plus, on a $\bigcup_{s\in S} B'_s = W$ car $W = \bigcup_p (K_{p+1}\backslash\mathring{K}_p)$. On en déduit que la famille $(\mathrm{supp}(\psi_s))_{s\in S}$ est localement finie relativement à W et que la fonction $\psi = \sum_s \psi_s$ est partout strictement positive dans W. Pour $i \in I$, posons alors $A_i = \{s \in S;\ i(s) = i\}$, et $\chi_i = \frac{1}{\psi} \sum_{s\in A_i} \psi_s$. Comme la famille $(\mathrm{supp}(\psi_s))$ est localement finie, les χ_i sont de classe

$\mathcal{C}^\infty$ sur W, et il est clair qu'on a $\sum \chi_i = 1$. Pour chaque $i \in I$, l'ensemble $L_i = \bigcup_{s \in A_i} \mathrm{supp}(\psi_s)$ est un fermé de W car la famille $(\mathrm{supp}(\psi_s))_{s \in A_i}$ est localement finie, et χ_i s'annule en dehors de L_i ; on a donc $\mathrm{supp}(\chi_i) \subset L_i$. On en déduit d'une part qu'on a $\mathrm{supp}(\chi_i) \subset W_i$ pour tout i, et d'autre part que la famille $(\mathrm{supp}(\chi_i))$ est localement finie. Cela termine la démonstration.

Corollaire A.2.8. *Si* W *est un ouvert de* $\mathbb{R}^n$, *si* V *est un ouvert de* W, *et si* F *est un fermé de* W *contenu dans* V, *alors il existe une fonction* $\chi \in \mathcal{C}^\infty(W)$ *telle que* $\mathrm{supp}(\chi) \subset V$ *et* $\chi \equiv 1$ *au voisinage de* F.

Preuve. On choisit un ouvert U tel que $F \subset U \subset \overline{U} \subset V$ (l'adhérence étant prise relativement à W), et on applique le résultat précédent au recouvrement ouvert $(V, W \backslash \overline{U})$.

Remarques. 1) Le théorème précédent est plus général que A.2.2. En effet, si K est un compact de $\mathbb{R}^n$ recouvert par des ouverts $W_1, \ldots, W_k$, on peut trouver des ouverts bornés $V_1, \ldots, V_k$, $W'_1, \ldots, W'_k$ tels que $\overline{V}_i \subset W'_i \subset \overline{W}'_i \subset W_i$ pour tout i et $K \subset \bigcup_{i=1}^k V_i$. En posant $W'_0 = \mathbb{R}^n \backslash \bigcup_{i=1}^k \overline{V}_i$ et en appliquant A.2.7 à $W = \mathbb{R}^n$ et au recouvrement ouvert $W'_0, W'_1, \ldots, W'_k$, on retrouve le théorème A.2.2.

2) Il est essentiel de prendre garde au fait que les supports des fonctions χ_i sont des fermés *de* W, mais ne sont a priori pas fermés dans $\mathbb{R}^n$; en particulier, ils n'ont aucune raison d'être compacts. Pour s'en convaincre, il suffit de considérer le cas du recouvrement constitué par le seul ouvert W.

Exercices

A.1. Soient a, b vérifiant $0 < a \leqslant b$. Déterminer $\mathbf{1}_{[-a;a]} * \mathbf{1}_{[-b;b]}$.

A.2. Montrer que si $f \in L^p$ et si $g \in L^q$, où q est l'exposant conjugué de p, alors $f * g$ est uniformément continue.

A.3. Les algèbres $L^1(\mathbb{R}^n)$ et $L^1(\mathbb{T})$ admettent-elles une unité ?

A.4. (Idéaux de $L^1(\mathbb{T})$.) Le but de l'exercice est la détermination de tous les idéaux fermés de l'algèbre de Banach $L^1(\mathbb{T})$. Pour $n \in \mathbb{Z}$, on notera e_n la fonction de $L^1(\mathbb{T})$ définie par $e_n(\zeta) = \zeta^n$.

1) Soit E une partie de $\mathbb{Z}$. Montrer que

$$I_E = \{f \in L^1(\mathbb{T});\ \hat{f}(n) = 0 \ \text{ si } \ n \in E\}$$

est un idéal fermé de $L^1(\mathbb{T})$.

2) Soit I un idéal fermé de $L^1(\mathbb{T})$. On pose $E = \{n \in \mathbb{Z};\ \forall f \in I\ \hat{f}(n) = 0\}$.

a) Montrer qu'on a $I \subset I_E$.

b) Pour $f \in L^1(\mathbb{T})$ et $n \in \mathbb{Z}$, déterminer $f * e_n$. En déduire que si $n \in \mathbb{Z}\backslash E$, alors $e_n \in I$.

c) En utilisant le théorème de Fejér (voir l'exercice A.10), déduire de *b*) qu'on a $I_E \subset I$.

3) Conclure.

4) Déterminer les caractères de $L^1(\mathbb{T})$.

A.5. On note $\hat{f}$ la transformée de Fourier d'une fonction $f \in L^1(\mathbb{R})$, définie par

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(t)\, e^{-2i\pi\xi t}\, dt\,.$$

On sait que si $\xi \in \mathbb{R}$, alors l'application Θ_ξ définie par $\Theta_\xi(f) = \hat{f}(\xi)$ est un caractère de l'algèbre de Banach $L^1(\mathbb{R})$. Essayer de montrer qu'inversement, tout caractère de $L^1(\mathbb{R})$ est de la forme Θ_ξ.

A.6. (Noyaux de sommabilité.)

On dit qu'une famille $(\varphi_\lambda) \subset L^1(\mathbb{R})$ indexée par un paramètre $\lambda \geqslant 0$ est un **noyau de sommabilité** si elle vérifie les propriétés suivantes :

$$\begin{cases} (a) & \displaystyle\int \varphi_\lambda = 1 \text{ pour tout } \lambda\,; \\ (b) & (\varphi_\lambda) \text{ est bornée en norme } L^1\,; \\ (c) & \displaystyle\lim_{\lambda\to\infty} \int_{|t|\geqslant\delta} |\varphi_\lambda(t)|\, dt = 0 \text{ pour tout } \delta > 0\,. \end{cases}$$

De même, on dit que $(\varphi_\lambda) \subset L^1(\mathbb{T})$ est un noyau de sommabilité si (φ_λ) vérifie (a), (b) et

$$(c') \qquad \lim_{\lambda\to\infty} \int_{|\zeta-1|\geqslant\delta} |\varphi_\lambda(\zeta)|\; d\sigma(\zeta) = 0 \text{ pour tout } \delta > 0,$$

où σ est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{T}$.

1) Montrer que si (φ_λ) est un noyau de sommabilité et si f est une fonction bornée et uniformément continue, alors $f * \varphi_\lambda$ converge uniformément vers f quand λ tend vers l'infini.

2) Montrer que si (φ_λ) est un noyau de sommabilité et si $f \in L^p$, $1 \leqslant p < \infty$, alors $f * \varphi_\lambda$ tend vers f en norme L^p.

A.7. Soit φ une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$ vérifiant $\int \varphi\, dm = 1$. Montrer que la famille (φ_λ) définie par $\varphi_\lambda(t) = \lambda\,\varphi(\lambda t)$ est un noyau de sommabilité (voir l'exercice précédent).

A.8. Soit f une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$.

1) Pour $h \in \mathbb{R}$, exprimer la fonction $x \mapsto \int_x^{x+h} f(t)\, dt$ à l'aide d'une convolution.

2) Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $F(x) = \int_0^x f(t)\, dt$. Montrer que $\frac{F(\cdot+h)-F(\cdot)}{h}$ tend vers f en norme L^1 quand h tend vers 0.

A.9. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $\alpha_n = \int_{-1}^{1}(1-t^2)^n dt$, et on définit $\varphi_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par

$$\varphi_n(t) = \begin{cases} \frac{1}{\alpha_n}\left(1-t^2\right)^n & \text{si } |t| \leqslant 1 \\ 0 & \text{si } |t| > 1 \end{cases}$$

1) Montrer que la suite (φ_n) est un noyau de sommabilité (voir l'exercice A.6).

2) Montrer que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est une fonction continue à support dans $[-1/2\,;1/2]$, alors toutes les fonctions $f * \varphi_n$ sont polynomiales sur $[-1/2\,;1/2]$.

3) Donner une démonstration du théorème de Weierstrass sur l'approximation des fonctions continues par les polynômes.

A.10. (Noyau de Fejér sur le cercle.)

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit le **noyau de Fejér** $\mathrm{K}_n : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ par

$$\mathrm{K}_n(e^{it}) = \sum_{|k|<n}\left(1-\frac{|k|}{n}\right)e^{ikt}\,.$$

1) *a*) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $t \in [-\pi;\pi]$, on a

$$\mathrm{K}_n(e^{it}) = \frac{1}{n}\left(\frac{\sin\frac{nt}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right)^2$$

b) Montrer que la suite (K_n) est un noyau de sommabilité (voir l'exercice A.6).

2) Montrer que si $f \in \mathrm{L}^p(\mathbb{T})$, $1 \leqslant p < \infty$, alors la suite (f_n) définie par

$$f_n(e^{it}) = \sum_{|k|<n}\left(1-\frac{|k|}{n}\right)\hat{f}(n)\,e^{ikt}$$

converge vers f en norme L^p, et que si $f \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$, alors (f_n) converge vers f uniformément (**théorème de Fejér**).

3) Démontrer la formule d'inversion de Fourier : si $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{T})$ et si de plus $(\hat{f}(n)) \in l^1(\mathbb{Z})$, alors $f(e^{it}) = \sum_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(n)\,e^{int}$ presque partout.

A.11. (Noyau de Fejér sur la droite.)

La transformation de Fourier et la transformation de Fourier inverse sont définies sur $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ par les formules $\mathcal{F}f(x) = \hat{f}(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t)\,e^{-2i\pi xt}\,dt$ et $\overline{\mathcal{F}}f(t) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\,e^{2i\pi tx}\,dx$. Pour $\lambda > 0$, on définit $m_\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par

$$m_\lambda(x) = \begin{cases} 1-\frac{|x|}{\lambda} & \text{si } |x| \leqslant \lambda \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On définit ensuite le **noyau de Fejér** $k_\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ par

$$k_\lambda(t) = \overline{\mathcal{F}}m_\lambda(t) = \int_{-\lambda}^{\lambda}\left(1-\frac{|x|}{\lambda}\right)e^{2i\pi tx}\,dx\,.$$

1) Déterminer explicitement k_λ pour tout λ, et montrer que la famille (k_λ) est un noyau de sommabilité (voir l'exercice A.6).

2) Montrer que si $f, g \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$, alors

$$\overline{\mathcal{F}}\left(\hat{f}g\right) = f * \left(\overline{\mathcal{F}}g\right) \ .$$

3) Déduire de 1) et 2) que si $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$, alors les fonctions f_λ définies par

$$f_\lambda(t) = \int_{-\lambda}^{\lambda} \left(1 - \frac{|x|}{\lambda}\right) e^{2i\pi tx}\, \hat{f}(x)\, dx$$

convergent vers f en norme L^1.

4) Démontrer la formule d'inversion de Fourier : si f et $\mathcal{F}f$ sont toutes les deux intégrables sur $\mathbb{R}$, alors $\overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}f = f$ presque partout.

A.12. (Lemme d'Hadamard.)

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, et soit $f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$. Montrer que pour tout point $p = (p_1, \ldots, p_n) \in \Omega$, il existe des fonctions $g_1, \ldots, g_n \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ telles que $f(x) \equiv f(p) + \sum_1^n (x_i - p_i) g_i(x)$ au voisinage de p. Pour $i \leqslant n$, exprimer $g_i(p)$ à l'aide de $\partial_i f(p)$.

A.13. (Opérateurs de dérivation.)

Dans tout l'exercice, Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$. On dit qu'une application linéaire $\mathrm{L} : \mathcal{C}^\infty(\Omega) \to \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ est un **opérateur de dérivation** s'il existe des fonction $a_1, \ldots, a_n \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ telles que

$$\mathrm{L}(f) = \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$.

1) Montrer que si $\mathrm{L} : \mathcal{C}^\infty(\Omega) \to \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ est un opérateur de dérivation, alors

$$(*) \qquad \mathrm{L}(fg) = \mathrm{L}(f)g + f\mathrm{L}(g)$$

pour toutes $f, g \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$.

2) Le but de cette question est d'établir la réciproque de 1). On fixe donc une application linéaire $\mathrm{L} : \mathcal{C}^\infty(\Omega) \to \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ vérifiant $(*)$, et on cherche $a_1, \ldots, a_n$ telles que $\mathrm{L} = \sum a_i \partial_i$.

a) Montrer qu'on a $\mathrm{L}(\mathbf{c}) = 0$ pour toute fonction constante $\mathbf{c}$.

b) En utilisant une fonction-plateau bien choisie, montrer que si $h \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ est identiquement nulle sur un ouvert $\mathrm{W} \subset \Omega$, alors $\mathrm{L}(h) \equiv 0$ dans W.

c) Conclure en utilisant l'exercice précédent.

A.14. Soit (X, d) un espace métrique, et soit $\mathcal{W} = (\mathrm{W}_1, \ldots, \mathrm{W}_k)$ un recouvrement ouvert de X. Montrer qu'on peut construire une partition de l'unité continue subordonnée à $\mathcal{W}$.

Annexe B

Distributions

Dans certaines parties de ce livre, il est commode et instructif d'utiliser le langage de la théorie des distributions. On donne ici uniquement le petit nombre de définitions et de propriétés dont on a réellement besoin.

Dans la suite, Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$. On note $\mathcal{D}(\Omega)$ l'ensemble des fonctions $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ à support compact. De manière équivalente, une fonction de $\mathcal{D}(\Omega)$ peut être considérée comme une fonction $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ à support compact contenu dans Ω.

Si $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_n)$ est un n-uplet d'entiers positifs, on pose $|\mathbf{k}| = k_1 + \cdots + k_n$ et

$$\partial^{\mathbf{k}} = \frac{\partial^{|\mathbf{k}|}}{\partial^{k_1} \dots \partial^{k_n}} .$$

Pour $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$, on définit une semi-norme $\| \ \|_{\mathrm{N}}$ sur $\mathcal{D}(\Omega)$ en posant

$$\|\varphi\|_{\mathrm{N}} = \max \left\{ \ \|\partial^{\mathbf{k}}\varphi\|_\infty ; \ |\mathbf{k}| \leqslant \mathrm{N} \ \right\} .$$

B.1. Définition et exemples

Définition B.1.1. *Une* **distribution** *sur Ω est une forme linéaire T sur $\mathcal{D}(\Omega)$ vérifiant la propriété de continuité suivante : pour tout compact $\mathrm{K} \subset \Omega$, il existe un entier $\mathrm{N} = \mathrm{N}_\mathrm{K}$ et une constante C_K tels que*

$$|\mathrm{T}(\varphi)| \leqslant \mathrm{C}_\mathrm{K} \|\varphi\|_{\mathrm{N}_\mathrm{K}}$$

pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ à support contenu dans K. S'il est possible de choisir l'entier N indépendamment du compact K, et si on note N_0 le plus petit entier vérifiant cette propriété, on dit que T est une distribution **d'ordre** N_0.

La remarque suivante est au moins aussi utile que la définition elle-même. Convenons de dire qu'une suite $(\varphi_j) \subset \mathcal{D}(\Omega)$ **converge vers** 0 **dans** $\mathcal{D}(\Omega)$ si les φ_j ont leurs supports contenus dans un compact fixe indépendant de j, et convergent uniformément vers 0 ainsi que toutes leurs dérivées.

Remarque B.1.2. *Pour une forme linéaire T sur $\mathcal{D}(\Omega)$, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(1) T *est une distribution sur* Ω ;

(2) $\lim_{n\to\infty} \mathrm{T}(\varphi_j) = 0$ *pour toute suite* (φ_j) *convergeant vers* 0 *dans* $\mathcal{D}(\Omega)$.

Preuve. Il est clair que (1) entraîne (2). Inversement, si T n'est pas une distribution, alors il existe un compact $\mathrm{K} \subset \Omega$ vérifiant la propriété suivante : pour tout entier $j \geqslant 0$, on peut trouver une fonction $\varphi_j \in \mathcal{D}(\Omega)$ à support contenu dans K telle que $\|\varphi_j\|_j = 2^{-j}$ et $|\mathrm{T}(\varphi_j)| > 1$ pour tout j. La suite (φ_j) montre que (2) n'est pas vérifiée.

On notera $\mathcal{D}'(\Omega)$ l'ensemble des distributions sur Ω, et $\langle \mathrm{T}, \varphi \rangle$ le résultat de l'action d'une distribution $\mathrm{T} \in \mathcal{D}'(\Omega)$ sur une fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

Exemples. 1) Si p est un point de Ω fixé, alors l'application $\varphi \mapsto \varphi(p)$ est une distribution d'ordre 0, qu'on appelle la **masse de Dirac au point** p. On la note δ_p.

2) Si $p \in \Omega$, alors les applications $\varphi \mapsto \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(p)$ sont des distributions d'ordre 1.

3) Toute fonction f localement intégrable sur Ω définit une distribution $[f]$ d'ordre 0 par la formule

$$\langle [f], \varphi \rangle = \int_\Omega f \varphi \, dm \, .$$

4) Si μ est une mesure borélienne positive sur Ω finie sur les compacts, ou une mesure borélienne complexe sur Ω, alors l'application $\varphi \mapsto \int \varphi \, d\mu$ est une distribution d'ordre 0 sur Ω, notée $[\mu]$.

Le lemme suivant permet d'identifier une mesure ou une fonction localement intégrable avec la distribution qu'elle définit.

Lemme B.1.3. *Deux mesures définissent la même distribution si et seulement si elles sont égales. Deux fonctions localement intégrables définissent la même distribution si et seulement si elles sont égales presque partout.*

Preuve. Notons $\mathcal{K}(\Omega)$ l'ensemble des fonctions continues sur Ω à support compact. D'après le corollaire A.1.7, toute fonction $\varphi \in \mathcal{K}(\Omega)$ peut s'approcher uniformément par des fonctions de $\mathcal{D}(\Omega)$ à supports dans un compact fixe $\mathrm{K} \subset \Omega$. On en déduit que si deux mesures μ_1, μ_2 – positives ou complexes – définissent la même distribution, alors $\int \varphi \, d\mu_1 = \int \varphi \, d\mu_2$ pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{K}(\Omega)$, et donc $\mu_1 = \mu_2$. Si deux fonctions *intégrables* u_1, u_2 définissent la même distribution, alors les mesures $u_1 m$ et $u_2 m$ sont égales d'après le premier cas, et donc $u_1 = u_2$ presque partout. Si u_1 et u_2 sont seulement localement intégrables, alors $u_1 = u_2$ presque

partout sur tout ouvert V relativement compact dans Ω : en effet, si χ est une fonction de $\mathcal{D}(\Omega)$ identiquement égale à 1 sur V, alors les fonctions intégrables χu_1 et χu_2 définissent la même distribution donc sont égales presque partout. Comme Ω est réunion dénombrable de tels ouverts V, on obtient encore $u_1 = u_2$ presque partout.

Corollaire B.1.4. *Deux fonctions continues définissent la même distribution si et seulement si elles sont égales.*

B.2. Opérations algébriques, restriction

Il est clair que la somme de deux distributions est encore une distribution.

On peut également multiplier une distribution T par une fonction $f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$. En effet, il découle de la formule de Leibniz pour les dérivées partielles d'un produit qu'on définit une distribution $f\mathrm{T}$ en posant

$$\langle f\mathrm{T}, \varphi \rangle = \langle \mathrm{T}, f\varphi \rangle \, .$$

Enfin, si W est un ouvert de Ω, alors $\mathcal{D}(\mathrm{W})$ peut être considéré comme un sous-espace vectoriel de $\mathcal{D}(\Omega)$, et par conséquent toute distribution $\mathrm{T} \in \mathcal{D}'(\Omega)$ définit par restriction une distribution sur W. On dit que cette distribution est la **restriction** de T à l'ouvert W.

B.3. Dérivation

L'un des points importants de la théorie est la possibilité de *dériver* les distributions.

Remarquons d'abord que si ψ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ à support compact dans Ω, alors

$$\int_\Omega \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \, dm = 0$$

pour tout $i \in \{1; \dots ; n\}$. En effet, on peut écrire $\int_\Omega \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \, dm = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \, dm$, donc, en prenant $i = 1$ pour simplifier les notations :

$$\int_\Omega \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \, dm = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{\partial \psi}{\partial x_1}(x_1, w) \, dx_1 \right) dm(w) \, ,$$

où m désigne indifféremment la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$ et sur $\mathbb{R}^{n-1}$. Comme ψ est à support compact, l'intégrale centrale est nulle pour tout $w \in \mathbb{R}^{n-1}$ car elle vaut $[\psi(\,.\,, w)]_{-\infty}^{+\infty}$, d'où le résultat.

En intégrant par parties, on en déduit que si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω, alors, pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ et pour tout $i \leqslant n$,

on a

$$\int_\Omega \varphi \, \frac{\partial f}{\partial x_i} = -\int_\Omega f \, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \cdot$$

Cette identité signifie que la distribution associée à la fonction $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ est donnée par la formule

$$\left\langle \left[\frac{\partial f}{\partial x_i}\right], \varphi \right\rangle = -\left\langle [f], \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\rangle \cdot$$

Cela conduit à définir $\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial x_i}$, pour une distribution arbitraire $\mathrm{T} \in \mathcal{D}'(\Omega)$, par la formule

$$\left\langle \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial x_i}, \varphi \right\rangle = -\left\langle \mathrm{T}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\rangle \cdot$$

On vérifie immédiatement que $\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial x_i}$ est bien une distribution.

Les dérivées successives d'une distribution se définissent ensuite par récurrence. Pour tout multi-indice $\mathbf{k} \in \mathbb{N}^n$, on obtient alors l'identité

$$\langle \partial^{\mathbf{k}} \mathrm{T}, \varphi \rangle = (-1)^{|\mathbf{k}|} \langle \mathrm{T}, \partial^{\mathbf{k}} \varphi \rangle \, .$$

Par linéarité, on peut également définir la distribution $\Delta \mathrm{T}$, et, dans le cas où Ω est un ouvert de $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$, les distributions $\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial z}$ et $\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \bar{z}}$.

Exemples. 1) Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, alors $[f]' = [f']$. Cela se vérifie en choisissant une subdivision $(x_0, \dots, x_\mathrm{N})$ adaptée à f et en intégrant par parties sur chaque intervalle $[x_i ; x_{i+1}]$.

2) Si $f = \mathbf{1}_{[0;+\infty[}$, alors $[f]' = \delta_0$.

B.4. Support d'une distribution

Définition B.4.1. *On dit qu'une distribution* $\mathrm{T} \in \mathcal{D}'(\Omega)$ **s'annule** *sur un ouvert* $\mathrm{W} \subset \Omega$ *si la restriction de* T *à* W *est nulle, autrement dit si on a* $\langle \mathrm{T}, \varphi \rangle = 0$ *pour toute fonction* $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ *à support contenu dans* W.

Lemme B.4.2. *Si* T *est une distribution sur* Ω *et si* $\mathcal{W}$ *est une famille d'ouverts de* Ω *telle que* T *s'annule sur chaque ouvert* $\mathrm{W} \in \mathcal{W}$*, alors* T *s'annule sur* $\bigcup \mathcal{W}$*. En particulier, il existe un plus grand ouvert sur lequel* T *s'annule.*

Preuve. Fixons $\mathcal{W}$ et posons $\mathrm{W}_0 = \bigcup \mathcal{W}$. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ à support contenu dans W_0. Comme $\mathrm{K} = \mathrm{supp}(\varphi)$ est compact, on peut trouver des ouverts $\mathrm{W}_1, \dots, \mathrm{W}_k \in \mathcal{W}$ tels que $\mathrm{K} \subset \bigcup_1^k \mathrm{W}_i$. Si $(\chi_1, \dots, \chi_k)$ est une partition de l'unité pour K subordonnée au recouvrement ouvert $(\mathrm{W}_1, \dots, \mathrm{W}_k)$ (voir le théorème A.2.2), alors, comme $\varphi \equiv 0$ en dehors de K, on a $\varphi = \sum_1^k \varphi_i$, où $\varphi_i = \chi_i \varphi$. De plus, comme $\mathrm{supp}(\varphi_i) \subset \mathrm{W}_i$, on a

$\langle \mathrm{T}, \varphi_i \rangle = 0$ pour tout $i \in \{1; \ldots; k\}$ puisque T s'annule sur W_i, et donc $\langle \mathrm{T}, \varphi \rangle = \sum_i \langle \mathrm{T}, \varphi_i \rangle = 0$. Ainsi, T s'annule sur W_0. Si maintenant on prend pour $\mathcal{W}$ la famille de *tous* les ouverts sur lesquels T s'annule, alors W_0 est par définition le plus grand ouvert où T s'annule.

Définition B.4.3. *Le* **support** *d'une distribution* $\mathrm{T} \in \mathcal{D}'(\Omega)$, *noté* $\mathrm{supp}(\mathrm{T})$, *est le complémentaire (relativement à* Ω*) du plus grand ouvert sur lequel* T *s'annule. Autrement dit,* $\mathrm{supp}(\mathrm{T})$ *est le plus petit fermé* F *de* Ω *tel que* $\langle \mathrm{T}, \varphi \rangle = 0$ *pour toute fonction* $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ *identiquement nulle au voisinage de* F.

Exemples. 1) Si f est une fonction continue sur Ω, alors la distribution $[f]$ s'annule sur un ouvert V si et seulement si f est identiquement nulle sur V (corollaire B.1.4). Le support de la distribution $[f]$ est donc identique au support de la fonction f.

2) De même, pour une mesure borélienne (positive ou complexe), la définition du support coïncide avec celle rappelée dans les prérequis : le support est le complémentaire du plus grand ouvert négligeable.

B.5. Convolution

Si f est une fonction localement intégrable et si g est une fonction mesurable bornée à support compact, il découle du théorème de Fubini que pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, on a

$$\int_{\mathbb{R}^n} (f * g)\, \varphi \, dm = \int_{\mathbb{R}^n} (g \,\tilde{*}\, \varphi)\, f \, dm \,,$$

où $g \,\tilde{*}\, \varphi$ est la fonction définie par

$$g \,\tilde{*}\, \varphi(x) = \int g(y)\, \varphi(x+y)\, dm(y) \,.$$

D'après la proposition A.1.5, la fonction $g \,\tilde{*}\, \varphi$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$, et elle est de plus à support compact car g et φ le sont. Ainsi, $g \,\tilde{*}\, \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, et l'égalité précédente prend la forme

$$\langle [f * g], \varphi \rangle = \langle [f], g \,\tilde{*}\, \varphi \rangle \,.$$

Cette formule, convenablement généralisée, va permettre de définir la convolée de deux distributions dont l'une est à support compact.

Si T est une distribution sur $\mathbb{R}^n$ et si $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, on définit les fonctions $\mathrm{T} * \varphi$ et $\mathrm{T} \,\tilde{*}\, \varphi$ par

$$\begin{cases} \mathrm{T} * \varphi(x) = \langle \mathrm{T}, \varphi(x - \cdot) \rangle \\ \mathrm{T} \,\tilde{*}\, \varphi(x) = \langle \mathrm{T}, \varphi(x + \cdot) \rangle \end{cases}$$

où on a noté $\varphi(x + \cdot)$ et $\varphi(x - \cdot)$ les fonctions $y \mapsto \varphi(x + y)$ et $y \mapsto \varphi(x - y)$.

Lemme B.5.1. *Si* T *est une distribution sur* $\mathbb{R}^n$ *et si* $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, *alors* $T * \varphi$ *et* $T \tilde{*} \varphi$ *sont de classe* $\mathcal{C}^\infty$. *De plus, on a* $\partial^{\mathbf{k}}(T * \varphi) = T * \partial^{\mathbf{k}}\varphi$ *et* $\partial^{\mathbf{k}}(T \tilde{*} \varphi) = T \tilde{*} \partial^{\mathbf{k}}\varphi$ *pour tout* $\mathbf{k} \in \mathbb{N}^n$.

Preuve. On traite seulement le cas de $T * \varphi$. Si $a, h \in \mathbb{R}^n$, alors

$$T * \varphi(a + h) - T * \varphi(a) = \langle T, \varphi_{a+h} - \varphi_a \rangle ,$$

où on a posé $\varphi_w = \varphi(w - \cdot)$. Fixons $a \in \mathbb{R}^n$ et notons u^h la fonction $\varphi_{a+h} - \varphi_a$. Lorsque h varie dans la boule unité fermée euclidienne $B \subset \mathbb{R}^n$, toutes les fonctions u^h ont leurs supports contenus dans le compact fixe $K = (a + B) - \mathrm{supp}(\varphi)$. D'autre part, comme φ est de classe $\mathcal{C}^\infty$, u^h et toutes ses dérivées partielles convergent vers 0 uniformément sur K quand h tend vers 0. Comme T est une distribution, on en déduit que $T * \varphi(a + h) - T * \varphi(a)$ tend vers 0 quand h tend vers 0. Ainsi, la fonction $T * \varphi$ est continue.

Pour $i \leqslant n$, $a \in \mathbb{R}^n$ et $t \in \mathbb{R}$, la formule de Taylor permet d'écrire

$$\varphi_{a+te_i}(x) - \varphi_a(x) = t \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(a - x) + t^2 \psi^t(x) ,$$

où $\psi^t(x) = \int_0^1 (1 - s)\, \partial_i^2 \varphi(a - x + ste_i)\, ds$. Comme $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, les fonctions ψ^t sont dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. De plus, quand t varie dans $[-1; 1]$, les ψ^t ont leurs supports contenus dans un compact fixe et toutes leurs dérivées sont bornées indépendamment de t. Comme T est une distribution, on en déduit qu'on a

$$T * \varphi(a + te_i) - T * \varphi(a) = t \left\langle T, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(a - \cdot) \right\rangle + O(t^2)$$

au voisinage de 0. Par conséquent, $T * \varphi$ admet des dérivées partielles en tout point, et on a $\frac{\partial (T * \varphi)}{\partial x_i} = T * \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$ pour tout $i \leqslant n$. D'après la première partie de la preuve, les fonctions $\frac{\partial (T * \varphi)}{\partial x_i}$ sont continues, donc $T * \varphi$ est de classe $\mathcal{C}^1$. On peut maintenant conclure par récurrence.

Corollaire B.5.2. *Si* T *est à support compact, alors* $T * \varphi$ *et* $T \tilde{*} \varphi$ *appartiennent à* $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.

Preuve. On a $\mathrm{supp}(T * \varphi) \subset \mathrm{supp}(T) + \mathrm{supp}(\varphi)$ et $\mathrm{supp}(T \tilde{*} \varphi) \subset \mathrm{supp}(\varphi) - \mathrm{supp}(T)$.

Corollaire B.5.3. *Si* S, T *sont deux distributions sur* $\mathbb{R}^n$ *et si* T *est à support compact, alors l'application* $\varphi \mapsto \langle S, T \tilde{*} \varphi \rangle$ *est une distribution sur* $\mathbb{R}^n$.

Preuve. Il suffit de montrer que si $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ est à support compact et si (φ_j) est une suite convergeant vers 0 dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, alors $(T \tilde{*} \varphi_j)$ converge vers 0 dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Fixons T et (φ_j), et posons $\psi_j = T \tilde{*} \varphi_j$. Par hypothèse, les φ_j ont leurs supports contenus dans un compact fixe, donc les ψ_j également puisque $\mathrm{supp}(\psi_j) \subset \mathrm{supp}(\varphi_j) - \mathrm{supp}(T)$. Soit K un compact contenant $\bigcup_j \mathrm{supp}(\varphi_j)$. Avec ce choix de K, on a $\langle T, \varphi_j(x - \cdot)\rangle = 0$ pour tout $j \in \mathbb{N}$ si $x \notin K - \mathrm{supp}(T)$. D'autre part, quand j décrit $\mathbb{N}$ et x décrit $K - \mathrm{supp}(T)$, les fonctions $\varphi_j(x - \cdot)$ ont leurs supports contenus dans un compact fixe. Comme T est une distribution, il existe donc une constante C et un entier N tels que $|\langle T, \varphi_j(x - \cdot)\rangle| \leqslant C \|\varphi_j(x - \cdot)\|_N = C \|\varphi_j\|_N$ pour tout $j \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in K - \mathrm{supp}(T)$. Au total, on obtient donc $|\psi_j(x)| \leqslant C \|\varphi_j\|_N$ pour tout j et pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, autrement dit $\|\psi_j\|_\infty \leqslant C \|\varphi_j\|_N$ pour tout $j \in \mathbb{N}$. Par conséquent, la suite (ψ_j) converge uniformément vers 0. Le même raisonnement s'applique aux dérivées des ψ_j, donc (ψ_j) converge bien vers 0 dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.

Définition B.5.4. *Si* S, T *sont deux distributions sur* $\mathbb{R}^n$ *et si* T *est à support compact, la* **convolée** *de* S *par* T *est la distribution* $S * T$ *définie par la formule* $\langle S * T, \varphi\rangle = \langle S, T \tilde{*} \varphi\rangle$.

Sous les hypothèses précédentes, on vérifie sans difficulté, à l'aide du lemme B.5.1, que pour tout $i \leqslant n$, on a

$$S * \frac{\partial T}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}(S * T) = \frac{\partial S}{\partial x_i} * T .$$

Enfin, il est clair que pour toute distribution T (à support compact), on a

$$\delta_0 * T = T .$$

Exercices

B.1. Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ et homogène de degré $-n$, c'est-à-dire vérifiant $f(\lambda x) \equiv \lambda^{-n} f(x)$ pour tout $\lambda > 0$.

1) On note $|\ |$ la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$. Montrer que la limite $\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x| \geqslant \varepsilon} f(x)\, \varphi(x)\, dm(x)$ existe pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ si et seulement si f vérifie $\int_{S^{n-1}} f d\sigma = 0$, où σ est la mesure de surface sur la sphère unité $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$.

2) Montrer que si la limite existe pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, alors on définit une distribution sur $\mathbb{R}^n$ en posant

$$\langle T, \varphi\rangle = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x| \geqslant \varepsilon} f(x) \varphi(x)\, dm(x) .$$

B.2. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, et soit (T_j) une suite de distributions sur Ω. On suppose que (T_j) converge simplement sur $\mathcal{D}(\Omega)$, autrement dit que $\langle T_j, \varphi \rangle$ admet une limite pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. La forme linéaire définie par

$$\langle T, \varphi \rangle = \lim_{j \to \infty} \langle T_j, \varphi \rangle$$

est-elle une distribution ?

B.3. Donner un exemple de distribution d'ordre infini.

B.4. Démontrer directement le corollaire B.1.4.

B.5. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On note t^k la fonction $t \mapsto t^k$.

1) À quelle condition une fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ peut-elle s'écrire sous la forme $t^k \psi$, où $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$?

2) Résoudre dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ l'équation $t^k S = 0$.

B.6. On note t la fonction $t \mapsto t$. Montrer que pour toute distribution $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, l'équation $tS = T$ admet une solution dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

B.7. On note $|t|$ la fonction $t \mapsto |t|$. Déterminer $[|t|]'$ et $[|t|]''$.

B.8. (Formule des sauts.)

Soit f une fonction de classe C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$, mais non nécessairement continue. On note $a_1, \ldots, a_n$ les éventuels points de discontinuité de f, et pour $i \leqslant n$, on note s_i le « saut » de la fonction f au point a_i : $s_i = f(a_i^+) - f(a_i^-)$. Établir la formule

$$[f]' = [f'] + \sum_{i=1}^{n} s_i \delta_{a_i} \ .$$

B.9. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}$. Quelle condition doit vérifier une fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ pour être la dérivée d'une fonction de $\mathcal{D}(\Omega)$?

B.10. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}$. Montrer que toute distribution sur Ω admet une primitive ; autrement dit, montrer que si $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, alors il existe une distribution $S \in \mathcal{D}'(\Omega)$ vérifiant $S' = T$.

B.11. Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ vérifiant $T' = 0$. Montrer que T est la distribution associée à une fonction constante.

B.12. Soit f une fonction localement intégrable sur $\mathbb{R}$, et soit F la fonction définie par $F(x) = \int_0^x f(t)\, dt$. Montrer qu'on a $F' = f$ au sens des distributions, autrement dit $[F]' = [f]$.

B.13. Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Pour $h > 0$, on définit $T^h \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ par la formule

$$\langle T^h, \varphi \rangle = \frac{1}{h} \langle T, \varphi_h - \varphi \rangle \ ,$$

où on a posé $\varphi_h(x) = \varphi(x - h)$. Montrer que T^h converge vers T' dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ quand h tend vers 0, ce qui signifie que $\langle T^h, \varphi \rangle$ tend vers $\langle T', \varphi \rangle$ pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.

B.14. Soit $F : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction lipschitzienne.

1) Pour $h \neq 0$, on pose

$$F^h(x) = \frac{F(x+h) - F(x)}{h} .$$

Montrer que les fonctions F^h sont bornées, avec $\sup_h \|F^h\|_\infty < \infty$.

2) En utilisant le théorème de Banach-Alaoglu et l'exercice précédent, montrer que la distribution $[F]'$ provient d'une fonction bornée.

3) Conclure qu'il existe une fonction $f \in L^\infty(\mathbb{R})$ telle que

$$F(x) = F(0) + \int_0^x f(t)\, dt$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$.

B.15. On note $\log|t|$, $\frac{1}{t}$ et $\frac{1}{t^2}$ les fonctions $t \mapsto \ln|t|$, $t \mapsto \frac{1}{t}$ et $t \mapsto \frac{1}{t^2}$, arbitrairement définies en 0.

1) Montrer que $\log|t|$ est localement intégrable sur $\mathbb{R}$; qu'en est-il de $\frac{1}{t}$ et de $\frac{1}{t^2}$?

2) On note $\mathrm{vp}(\frac{1}{t})$ la dérivée de la distribution $[\log|t|]$. Montrer que pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, on a

$$\left\langle \mathrm{vp}\left(\frac{1}{t}\right), \varphi \right\rangle = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|t| \geqslant \varepsilon} \frac{\varphi(t)}{t}\, dt .$$

3) On note $-\mathrm{pf}(\frac{1}{t^2})$ la dérivée de la distribution $\mathrm{vp}(\frac{1}{t})$. Montrer que pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, on a

$$\left\langle \mathrm{pf}\left(\frac{1}{t^2}\right), \varphi \right\rangle = \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\int_{|t| \geqslant \varepsilon} \frac{\varphi(t)}{t^2}\, dt - 2\,\frac{\varphi(0)}{\varepsilon} \right) .$$

B.16. (Solutions fondamentales.)

Si $P = P(\partial) = \sum a_k \partial^k$ est un opérateur différentiel à coefficients constants, on appelle **solution fondamentale** de P toute distribution $E \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ vérifiant $P(\partial)E = \delta_0$. Déterminer les solutions fondamentales de $P = \frac{d}{dt}$.

B.17. On note $\frac{1}{z}$ et $\log|z|$ les fonctions $z \mapsto \frac{1}{z}$ et $z \mapsto \ln|z|$, arbitrairement définies en 0.

1) Montrer que $\frac{1}{z}$ et $\log|z|$ sont localement intégrables sur $\mathbb{C}$; on note encore $\frac{1}{z}$ et $\log|z|$ les distributions associées.

2) En intégrant en coordonnées polaires, montrer que $\frac{1}{\pi z}$ est une solution fondamentale de l'opérateur de Cauchy-Riemann $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$, et que $\frac{1}{2\pi}\log|z|$ est une solution fondamentale de l'opérateur de Laplace Δ (voir l'exercice précédent pour la définition d'une solution fondamentale).

B.18. Soit n un entier supérieur ou égal à 3. On note $|\ |$ la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$, et r la fonction $x \mapsto |x|$.

1) Montrer que la fonction r^{2-n} – arbitrairement définie en 0 – est localement intégrable sur $\mathbb{R}^n$; on note encore r^{2-n} la distribution associée.

2) *a*) Calculer $\int r^{2-n}\Delta\varphi$ lorsque $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ est radiale.

b) En utilisant l'exercice 1.17, montrer que si f est une fonction radiale localement intégrable sur $\mathbb{R}^n$ et si $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, alors

$$\langle \Delta[f], \varphi \rangle = \langle \Delta[f], \varphi^* \rangle ,$$

où φ^* est la radialisée de φ.

c) On note σ_n la surface de la sphère unité euclidienne de $\mathbb{R}^n$. Montrer que $\mathrm{E} = \frac{1}{(2-n)\sigma_n} r^{2-n}$ est une solution fondamentale de l'opérateur de Laplace Δ (voir l'exercice B.16).

B.19. Soit E la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$\mathrm{E}(x,t) = \begin{cases} 1/2 & \text{si } t - |x| > 0 \\ 0 & \text{si } t - |x| \leqslant 0 \end{cases}$$

1) Montrer que E est localement intégrable.

2) Montrer que [E] est une solution fondamentale de l'opérateur des ondes $\Box = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ (voir l'exercice B.16).

B.20. Soit E la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$\mathrm{E}(x,t) = \frac{\mathrm{H}(t)}{\sqrt{4\pi t}}\, e^{-x^2/4t} ,$$

où $\mathrm{H}(t) = 0$ si $t < 0$ et $\mathrm{H}(t) = 1$ si $t \geqslant 0$.

1) Montrer que E est localement intégrable.

2) Montrer que [E] est une solution fondamentale de l'opérateur de la chaleur $\mathrm{P} = \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ (voir l'exercice B.16).

B.21. Soit u une fonction localement intégrable sur $\mathbb{R}^n$. Décrire le support de la distribution $[u]$. Est-il égal au support de la fonction u ?

B.22. Montrer que toute distribution à support compact est d'ordre fini.

B.23. (Support singulier.)

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. On dit qu'une distribution $\mathrm{T} \in \mathcal{D}'(\Omega)$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur un ouvert $\mathrm{W} \subset \Omega$ si la restriction de T à W est la distribution associée à une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$.

1) Montrer que si $\mathrm{T} \in \mathcal{D}'(\Omega)$, alors il existe un *plus grand* ouvert $\mathrm{W} \subset \Omega$ sur lequel T est $\mathcal{C}^\infty$. Le complémentaire de cet ouvert – relativement à Ω – s'appelle le **support singulier** de T ; on le note $\operatorname{supp}\operatorname{sing}(\mathrm{T})$.

2) Montrer qu'on a toujours $\operatorname{supp}\operatorname{sing}(\mathrm{T}) \subset \operatorname{supp}(\mathrm{T})$, et donner un exemple où l'inclusion est stricte.

3) Montrer que si $\mathrm{T} \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et si $f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$, alors

$$\operatorname{supp}\operatorname{sing}(\mathrm{T} + [f]) = \operatorname{supp}\operatorname{sing}(\mathrm{T}) .$$

B.24. Soit T une distribution sur $\mathbb{R}^n$ vérifiant $\mathrm{supp}(T) = \{0\}$.

1) Montrer que T est d'ordre fini.

2) *a*) On note $|\ |$ la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$. Montrer que si $M \in \mathbb{N}$ et si $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ vérifie $\partial^{\mathbf{m}}\psi(0) = 0$ pour tout $\mathbf{m} \in \mathbb{N}^n$ tel que $|\mathbf{m}| \leqslant M$, alors il existe une constante C telle que $|\psi(x)| \leqslant C|x|^{M+1}$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.

b) Soit $\chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$; pour $\varepsilon > 0$, on pose $\chi_\varepsilon(x) = \chi(x/\varepsilon)$. Déduire de 1) et 2)*a*) qu'il existe un entier N vérifiant la propriété suivante : pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ telle que $\partial^{\mathbf{m}}\varphi(0) = 0$, $|\mathbf{m}| \leqslant N$, on a $\langle T, \chi_\varepsilon\varphi\rangle = O(\varepsilon)$ quand $\varepsilon \to 0$.

c) Montrer qu'on a $\langle T, \varphi\rangle = 0$ pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ vérifiant $\partial^{\mathbf{m}}\varphi(0) = 0$, $|\mathbf{m}| \leqslant N$.

3) Montrer que T est une combinaison linéaire de dérivées de la masse de Dirac δ_0.

4) On suppose de plus que T est homogène de degré 0, ce qui signifie que pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ et pour tout $\lambda > 0$, on a $\langle T, \varphi(\lambda\ .)\rangle = \langle T, \varphi\rangle$, où $\varphi(\lambda\ .)$ est la fonction $x \mapsto \varphi(\lambda x)$. Montrer que T est proportionnelle à δ_0.

B.25. Montrer que l'exercice précédent s'applique à $T = \Delta \log|z|$ et $T = \Delta r^{2-n}$, $n \geqslant 3$. Retrouver ainsi les résultats des exercices B.18 et B.17.

B.26. Essayer de montrer que si S et T sont deux distributions sur $\mathbb{R}^n$ à supports compacts, alors $S * T = T * S$.

B.27. Montrer que si S, T sont deux distributions sur $\mathbb{R}^n$ et si T est à support compact, alors $\mathrm{supp}(S * T) \subset \mathrm{supp}(S) + \mathrm{supp}(T)$.

B.28. Montrer que si T est une distribution sur $\mathbb{R}$, alors $T' = T * \delta_0'$.

B.29. Soit $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$, et posons $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$. Essayer de justifier le raisonnement suivant : on a $F = f * H$, où $H = \mathbf{1}_{[0;+\infty[}$, donc

$$[F]' = [f] * [H]' = [f] * \delta_0 = [f]\ .$$

B.30. Soit $P = P(\partial)$ un opérateur différentiel à coefficients constants. Montrer que si E est une solution fondamentale de P (voir l'exercice B.16) et si T est une distribution à support compact, alors $S = E * T$ vérifie $P(\partial)S = T$.

B.31. Déterminer une solution fondamentale de $P = \frac{d^2}{dt^2}$ (voir l'exercice B.16), puis résoudre dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ l'équation $T'' = [f]$, où $f = \mathbf{1}_{[-1;1]}$.

B.32. Soient T_1, T_2 deux distributions sur $\mathbb{R}^n$, avec T_2 à support compact. Le but de l'exercice est de montrer qu'on a

$$\mathrm{supp\,sing}(T_1 * T_2) \subset \mathrm{supp\,sing}(T_1) + \mathrm{supp\,sing}(T_2)\ ,$$

où supp sing désigne le support singulier, défini à l'exercice B.23.

1) Montrer que si $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ et si W est un ouvert contenant supp sing(T), alors on peut écrire $T = A + B$, où la distribution A a son support contenu dans W, et la distribution B est $\mathcal{C}^\infty$ avec $\mathrm{supp}(B) \subset \mathrm{supp}(T)$.

2) On suppose que T_1 et T_2 sont toutes les deux à support compact, et on pose $K_j = \operatorname{supp}\operatorname{sing}(T_j)$.

a) Soit $\varepsilon > 0$ et posons $K_{j\varepsilon} = K_j + \overline{B}(0,\varepsilon)$. En utilisant 1), montrer qu'on a

$$\operatorname{supp}\operatorname{sing}(T_1 * T_2) \subset K_{1\varepsilon} + K_{2\varepsilon} \ .$$

b) Conclure dans ce cas particulier.

3) On suppose seulement T_2 à support compact.

a) Soit $M \geqslant 0$ tel que $\operatorname{supp}(T_2) \subset \overline{B}(0,M)$, et soit $R > 0$. Soit également $\theta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ égale à 1 au voisinage de la boule $\overline{B}(0,R+M)$. Montrer qu'on a $T_1 * T_2 = (\theta T_1) * T_2$ sur l'ouvert $B(0,R)$.

b) Montrer qu'on a

$$\operatorname{supp}\operatorname{sing}(T_1 * T_2) \cap B(0,R) \subset \operatorname{supp}\operatorname{sing}(T_1) + \operatorname{supp}\operatorname{sing}(T_2)$$

pour tout $R > 0$.

c) Conclure.

B.33. Cet exercice suppose connues les notions de support singulier et de solution fondamentale d'un opérateur différentiel (voir B.23 et B.16). Soit $P = P(\partial) = \sum a_k \partial^k$ un opérateur différentiel à coefficients constants. On suppose que P admet une solution fondamentale E de classe $\mathcal{C}^\infty$ en dehors de 0, autrement dit vérifiant $\operatorname{supp}\operatorname{sing}(E) \subset \{0\}$. Le but de l'exercice est de montrer que pour toute distribution $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, on a

$$\operatorname{supp}\operatorname{sing}(PT) = \operatorname{supp}\operatorname{sing}(T) \ .$$

1) Démontrer l'inclusion « évidente ».

2) Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ à support compact. Observer qu'on a $E * PT = T$, et démontrer le résultat dans ce cas à l'aide de l'exercice précédent.

3) Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ et soit $R > 0$.

a) Montrer que si χ est une fonction de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ égale à 1 au voisinage de la boule $\overline{B}(0,R)$, alors on peut écrire $P(\chi T) = \chi PT + S$, où la distribution S est nulle sur l'ouvert $B(0,R)$.

b) En déduire, à l'aide de 1) qu'on a $\operatorname{supp}\operatorname{sing}(T) \cap B(0,R) \subset \operatorname{supp}\operatorname{sing}(PT)$.

4) Démontrer le résultat souhaité.

5) Conclure que si T est une distribution telle que PT est $\mathcal{C}^\infty$, alors T est elle-même $\mathcal{C}^\infty$. On dit que P est un opérateur **hypoelliptique**.

Bibliographie

[1] L. V. Ahlfors, *Complex analysis*, McGraw-Hill 1953.

[2] S. Alinhac, P. Gérard, *Opérateurs pseudo-différentiels et théorème de Nash-Moser*, CNRS Éditions 1991.

[3] M. Andersson, *Topics in complex analysis*, Springer 1997.

[4] S. Axler, P. Bourdon, W. Ramey, *Harmonic function theory*, Springer 2001.

[5] W. de Azevedo Pribitkin, Laplace's integral, the Gamma function and beyond, *American Math. Monthly*, **109**, 2002.

[6] G. Bak, D. J. Newman, *Complex analysis*, Springer 1984.

[7] J. A. Baker, Integration over spheres and the divergence theorem for balls, *American Math. Monthly*, **104**, 1997.

[8] C. Berenstein, R. Gay, *Complex variables : an introduction*, Springer 1991.

[9] F. F. Bonsall, J. Duncan, *Complex normed algebras*, Springer 1973.

[10] N. Bourbaki, *Topologie générale*, Hermann 1974.

[11] H. Brézis, *Analyse fonctionnelle*, Masson 1987.

[12] A. Browder, *Introduction to function algebras*, Benjamin 1968.

[13] R. B. Burckel, *An introduction to classical complex analysis*, Academic Press 1979.

[14] R. B. Burckel, Three secrets about harmonic functions, *American Math. Monthly*, **104**, 1994.

[15] M. do Carmo, *Differential forms and applications*, Springer 1994.

[16] L. Carleson, T. W. Gamelin, *Complex dynamics*, Springer 1993.

[17] H. Cartan, *Cours de calcul différentiel*, Hermann 1964.

[18] H. Cartan, *Théorie élémentaire des fonctions analytiques*, Hermann 1961.

[19] B. Chabat, *Introduction à l'analyse complexe*, Éditions MIR 1990.

[20] K. Chandrasekharan, *Analytic number theory*, Springer 1968.

[21] G. Choquet, *Topologie*, Masson 1964.

[22] J. B. Conway, *Functions of one complex variable*, Springer 1973.

[23] R. Dautray, J. L. Lions, *Analyse mathématique et calcul numérique, vol. 2*, Masson 1987.

[24] G. Demengel, *Transformations de Laplace*, Ellipses 2002.

[25] J.D. Dixon, A brief proof of Cauchy's integral theorem, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **29**, 1971.

[26] P. Dolbeault, *Analyse complexe*, Masson 1990.

[27] L. C. Evans, *Partial Differential Equations*, AMS 2000.

[28] J. C. Evard, F. Jafari, A complex Rolle's theorem, *American Math. Monthly*, **99**, 1992.

[29] J. Faraut, *Calcul intégral*, Belin 2001.

[30] G. B. Folland, How to integrate a polynomial over a sphere, *American Math. Monthly*, **106**, 2001.

[31] W. H. J. Fuchs, *Topics in the theory of functions of one complex variable*, Van Nostrand 1967.

[32] W. Fulton, *Algebraic topology. A first course*, Springer 1995.

[33] T. W. Gamelin, *Uniform algebras*, Chelsea 1984.

[34] R. Godement, *Analyse mathématique*, Springer 2000-2003.

[35] S. Gonnord, N. Tosel, *Thèmes d'analyse pour l'agrégation*, Ellipses 1996.

[36] P. Henrici, *Applied and computational complex analysis*, Wiley 1988.

[37] M. Hervé, *Les fonctions analytiques*, PUF 1982.

[38] F. Hirsch, G. Lacombe, *Éléments d'analyse fonctionnelle*, Masson 1997.

[39] K. Hoffmann, *Banach spaces of analytic functions*, Dover 1988.

[40] L. Hörmander, *An introduction to complex analysis in several variables*, North-Holland 1973.

[41] Y. Katznelson, *An introduction to harmonic analysis*, rééd. Dover 1976.

[42] P. Koosis, *An introduction to* H^p *spaces*, Cambridge University Press 1980.

[43] S. G. Krantz, *Complex analysis : the geometric viewpoint*, Carus Math. Monographs 1990.

[44] C. Kuratowski, *Topologie*, rééd. Éditions Jacques Gabay 1992.

[45] J. Lafontaine, *Introduction aux variétés différentielles*, Presses Univ. de Grenoble 1996.

[46] F. Laudenbach, *Calcul différentiel et intégral*, Ed. de l'École Polytechnique (Ellipses) 2001.

[47] D. Leborgne, *Calcul différentiel complexe*, PUF 1991.

[48] D. H. Luecking, L. A. Rubel, *Complex analysis. A functional analysis approach*, Springer 1984.

[49] A. I. Markushevich, *Theory of functions of a complex variable*, Chelsea 1977.

[50] R. Narashiman, *Several complex variables*, The University of Chicago Press 1971.

[51] D. J. Newman, Fourier uniqueness via complex variables, *American Math. Monthly*, **81**, 1974.

[52] M. H. A. Newman, *Elements of the topology of plane sets of points*, rééd. Dover 1992.

[53] N. Nikolski, *Treatise on the shift operator*, Springer 1986.

[54] G. Pisier, *Similarity problems and completely bounded maps*, Springer 1995.

[55] H. Queffélec, *Topologie*, Masson 1998.

[56] H. Queffélec, C. Zuily, *Éléments d'analyse pour l'agrégation*, Dunod 2002.

[57] T. Ransford, *Potential theory in the complex plane*, Cambridge University Press 1995.

[58] R. Remmert, *Classical topics in complex function theory*, Springer 1998.

[59] L. A. Rubel, A complex variable proof of Hölder's inequality, *Proc. AMS*, **15**, 1969.

[60] W. Rudin, *Analyse fonctionnelle*, Dunod 1999.

[61] W. Rudin, *Principes d'analyse mathématique*, Dunod 1993.

[62] W. Rudin, *Analyse réelle et complexe*, nouvelle édition, Dunod 2002.

[63] S. Saks, A. Zygmund, *Fonctions analytiques*, Masson 1970.

[64] J. P. Serre, *Cours d'arithmétique*, PUF 1970.

[65] J. H. Shapiro, *Composition operators and classical function theory*, Springer 1993.

[66] J. H. Shapiro, Dynamics of linear operators, *preprint disponible à l'adresse* www.math.msu.edu/rshapiro.

[67] J. T. Schwartz, *Nonlinear functional analysis*, Gordon and Breach 1969.

[68] L. Schwartz, *Cours d'analyse, vol. 1-4*, Hermann 1991.

[69] L. Schwartz, *Théorie des distributions*, Hermann 1966.

[70] M. Spivak, *Calculus on manifolds*, Benjamin, W.A. 1965.

[71] E. C. Titchmarsh, *The theory of functions*, Oxford University Press 1976.

[72] J. Wermer, *Banach algebras and several complex variables*, Springer 1976.

[73] G. T. Whyburn, *Topological analysis*, Princeton University Press 1964.

[74] A. Yger, *Analyse complexe et distributions*, Ellipses 2001.

[75] C. Zuily, *Éléments de distributions et d'équations aux dérivées partielles*, Dunod 2002.

Commentaires bibliographiques succincts

On a indiqué dans la bibliographie uniquement les livres et articles qu'on a effectivement utilisés pour la rédaction de cet ouvrage. Plus quelques « grands classiques » incontournables.

Prérequis

Pour le calcul différentiel, voir Cartan [17] ou Laudenbach [46]. Pour l'intégration et la théorie de la mesure, voir Faraut [29], Laudenbach [46] ou Rudin [62]. Pour l'analyse fonctionnelle, voir Brézis [11], Hirsch-Lacombe [38] ou Rudin [60]. Pour la topologie, voir Queffélec [55] ou Choquet [21]. On consultera également avec profit les 4 tomes de Schwartz [68].

Chapitre 1

Pour en savoir plus sur les formes différentielles, on pourra consulter do Carmo [15], Cartan [17] ou Lafontaine [45] ; voir aussi Schwartz [68].

L'exercice 1.36 est tiré de Choquet [21]

Chapitre 2

Les groupes de cohomologie de de Rham sont des objets centraux en topologie algébrique. Pour une introduction à la topologie algébrique, on recommande Fulton [32].

Les idées de la preuve de la formule de Stokes s'adaptent sans grandes difficultés en dimension supérieure dès lors qu'on a défini adéquatement les objets sur lesquels on intègre. Cela conduit à la théorie des variétés différentielles, pour laquelle on pourra consulter do Carmo [15] ou Lafontaine [45]. Pour la formule de Stokes, on recommande également Spivak [70] ; voir aussi le tome 4 de Schwartz [68].

Les exercices 2.17, 2.18 et 2.34 sont tirés de do Carmo [15].

Chapitres 3 et 4

La présentation adoptée ici est très proche de celles de Andersson [3], Berenstein-Gay [8] et Hörmander [40] ; voir également les premiers chapitres de Dolbeault [26].

Pour un exposé beaucoup plus complet sur les séries entières à une et plusieurs variables, voir Cartan [18] et Hervé [37].

La démonstration directe de la formule de Cauchy pour un disque est tirée de Conway [22].

Pour un point de vue original (et intéressant) sur les fondements de la théorie, voir Luecking-Rubel [48].

L'exercice 3.5 est tiré de Evard-Jafari [28].

Les exercices 3.26 et 3.65 sont tirés de Rudin [61].

Les exercices 3.41, 3.42, 3.63, 3.67 et 3.68 sont tirés de Schwartz [68].

L'exercice 3.47 est tiré de Queffélec-Zuily [56]. Voir aussi Titchmarsh [71].

L'exercice 3.52 est dû à Alain Yger.

L'exercice 3.57 est tiré de Zuily [75]. Il existe plusieurs « théorèmes de Paley-Wiener » ; voir Katznelson [41] ou Rudin [62].

Les exercices 3.58 et 3.59 sont tirés de Demengel [24], une des rares références récentes en langue française sur la transformation de Laplace.

Pour en savoir plus sur les séries de Dirichlet (exercice 3.60) voir Chandrasekharan [20] ou Serre [64]. Voir aussi Queffélec-Zuily [56].

L'exercice 3.75 est emprunté à Rudin [62].

Les exercices 3.80 et 3.81, tirés de Gonnord-Tosel [35], donnent des exemples d'opérateurs **hypercycliques**. Pour en savoir plus sur cet intéressant sujet, on peut consulter Shapiro [66].

Le théorème de Beurling (exercice 3.95) est d'une grande importance en théorie des opérateurs, voir Nikolski [53]. La preuve donnée ici est tirée de Hoffmann [39] et Gonnord-Tosel [35].

L'exercice 3.96 est tiré de Berenstein-Gay [8].

L'exercice 4.24 est tiré de Luecking-Rubel [48].

L'exercice 4.35 est tiré de Newman [51].

L'exercice 4.36 est tiré de Remmert [58], dont la lecture est très instructive.

Le théorème de Gelfand-Mazur (exercice 4.38) et la formule du rayon spectral (exercice 4.39) sont des résultats de base de la théorie des algèbres de Banach. Voir par exemple Rudin [60].

Les exercices 4.40 et 4.70 sont tirés de Rudin [60].

L'exercice 4.44 est emprunté à Rudin [62].

L'exercice 4.47 est tiré de Queffélec [55].

L'exercice 4.49 est tiré de Rubel [59].

L'exercice 4.51 est tiré de Titchmarsh [71].

L'exercice 4.53 est tiré de Pisier [54].

Les deux preuves du théorème de maximalité de Wermer (exercices 4.56 et 4.57) viennent respectivement de Browder [12] et Rudin [62].

L'exercice 4.77 est tiré de Chandrasekharan [20].

Chapitre 5

Pour la définition de l'intégrale sur un chemin continu, on a suivi Cartan [18] et Hervé [37].

Certains passages et un certain nombre d'exercices sont très inspirés de Fulton [32].

On a choisi de ne pas parler de groupes d'homotopie ; voir Fulton [32] pour ces questions.

L'exercice 5.9 vient de Queffélec-Zuily [56].

Les exercices 5.18 et 5.19 établissent des résultats de base en topologie algébrique. Voir Fulton [32].

L'exercice 5.29 est emprunté à Ahlfors [1].

Les exercices 5.31 à 5.34 sont tirés de Fulton [32].

L'exercice 5.44 est tiré de Burckel [13].

Chapitre 6

La démonstration du théorème de Jordan donnée ici est très largement inspirée de Burckel [13] et Queffélec [55]. Voir également Henrici [36] pour une démonstration « simple » dans le cas d'une courbe de Jordan de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, et Gonnord-Tosel [35].

Pour le théorème de Brouwer en dimensions supérieures, la théorie du degré et la topologie de $\mathbb{R}^n$, voir Fulton [32], Lafontaine [45] ou Schwartz [67]. Voir également l'exercice 6.17, tiré de Gonnord-Tosel [35].

Une grande partie des exercices est tirée de Fulton [32].

Pour en savoir beaucoup plus sur la topologie du plan, voir Kuratowski [44] ou Newman [52].

Les exercices 6.18 et 6.19 viennent de Schwartz [68].

L'exercice 6.30 est tiré de Queffélec [55].

L'exercice 6.44 est tiré de Queffélec-Zuily [56].

Chapitre 7

La démonstration du théorème de Cauchy homologique donnée ici est tirée de Andersson [3] ; voir Ahlfors [1] pour la démonstration « classique », et Rudin [62], Godement [34] ou Dixon [25] pour une preuve récente et simple.

Pour en savoir plus sur l'homologie, voir Fulton [32] et Berenstein-Gay [8].

Chapitre 8

Pour tout ce qui concerne les résidus, on recommande la lecture de Ahlfors [1], Godement [34] et Berenstein-Gay [8], dont on a tiré un grand nombre d'exercices. Voir aussi Yger [74].

Les exercices 8.11 et 8.12, tirés de Cartan [18], concernent les fonctions dites elliptiques. Pour en savoir beaucoup plus sur la question, voir Godement [34], Markushevich [49] ou Saks-Zygmund [63].

Les exercices 8.14, 8.17 et 8.38 viennent de Bak-Newman [6].

L'exercice 8.20 est tiré de Burckel [13].

L'exercice 8.35 est dû à Éric Charpentier.

L'exercice 8.40 est tiré de de Azevedo Pribitkin [5].

L'exercice 8.41 est dû à Alain Yger. Le lecteur intéressé par le théorème des nombres premiers pourra consulter Chandrasekharan [20] ou Queffélec-Zuily [56].

L'exercice 8.42 est tiré de Leborgne [47].

L'exercice 8.43 est dû à Alain Yger. C'est probablement le plus difficile du livre.

Chapitre 9

Les résultats exposés ici correspondent essentiellement au premier chapitre de Hörmander [40] ; la présentation est très proche dans l'esprit.

La démonstration du théorème de Weierstrass donnée ici est inspirée de Berenstein-Gay [8].

Pour une preuve « constructive » du théorème de Runge, voir par exemple Burckel [13] ou Conway [22].

Le problème de l'approximation uniforme par des fonctions polynomiales ou rationnelles a été abondamment étudié. Voir à ce sujet Rudin [62], Gamelin [33] ou Wermer [72].

L'exercice 9.4 est tiré de Wermer [72].

L'exercice 9.5 est tiré de Faraut [29] et Titchmarsh [71].

L'exercice 9.6 (théorème de Müntz) est tiré de Rudin [62].

L'exercice 9.19 vient de Bourbaki [10].

Les exercices 9.24 à 9.26 sont tirés de Rudin [62].

Les exercices 9.29 à 9.32 établissent un théorème de Bezout dans diverses algèbres de fonctions. Il existe également une version du théorème de Bezout dans l'algèbre $H^\infty(\mathbb{D})$, considérablement plus difficile : c'est le **théorème de la couronne**, dû à L. Carleson. Voir Koosis [42] ou Andersson [3].

Les exercices 9.34 à 9.36 sont tirés de Luecking-Rubel [48].

La condition de Schwarz-Pick (exercice 9.38) est en fait nécessaire et suffisante pour réaliser l'interpolation par des fonctions de $H^\infty(\mathbb{D})$ de norme inférieure à 1, voir Nikolski [53].

L'exercice 9.39 établit que tout ouvert de $\mathbb{C}$ est ce qu'on appelle un **domaine d'holomorphie**. Le résultat est faux dans $\mathbb{C}^n$ dès que n est supérieur (ou égal) à 2 : c'est le contenu de l'exercice 9.40, tiré de Narashi-

man [50]. Le phénomène de Hartogs est l'un des faits les plus importants de la théorie des fonctions holomorphes de plusieurs variables.

Chapitre 10

Pour tous les aspects « géométriques », on s'est beaucoup inspiré de Ahlfors [1].

Pour la détermination des automorphismes de $\mathbb{D}$, $\mathbb{C}$ et $\mathbb{S}_2$, on a suivi Dolbeault [26].

Pour une preuve constructive du théorème de Riemann, voir par exemple Burckel [13].

On trouve dans Henrici [36] de nombreux exemples explicites de représentations conformes.

La preuve du théorème de Carathéodory donnée ici est tirée de Berenstein-Gay [8], où on trouvera la démonstration du fait admis en cours de route. Pour la preuve du fait en question, voir également l'exercice 10.43.

À propos du prolongement continu des biholomorphismes à la frontière, on pourra consulter Rudin [62] et Hervé [37]. Voir également Berenstein-Gay [8] pour l'existence d'un prolongement $\mathcal{C}^\infty$ lorsque le domaine est à bord $\mathcal{C}^\infty$.

Beaucoup d'exercices viennent de Andersson [3] et Berenstein-Gay [8].

Les exercices 10.8 et 10.9 sont tirés de Queffélec-Zuily [56].

L'exercice 10.10 est tiré de Carleson-Gamelin [16].

L'exercice 10.15 est tiré de Rudin [62].

L'exercice 10.28 vient de Bak-Newman [6].

Les exercices 10.37 et 10.45 sont tirés de Henrici [36].

Les exercices 10.48 à 10.53 sont tirés de Berenstein-Gay [8].

Pour la preuve classique du « petit » théorème de Picard, voir Ahlfors [1] ou Rudin [62].

Les deux derniers exercices du chapitre sont tirés de Krantz [43], dont la lecture est très enrichissante.

Chapitre 11

Pour les fonctions harmoniques en dimension quelconque, voir par exemple Axler-Bourdon-Ramey [4], Dautray-Lions [23] ou Evans [27].

La preuve « abstraite » de la formule de Poisson vient de Rudin [62].

Pour le théorème de dérivation de Lebesgue, voir Rudin [62] ou Schwartz [68]. Voir aussi Andersson [3] ou l'exercice 11.48.

Pour les espaces h^p et H^p, on pourra consulter Andersson [3], Hoffmann [39], Koosis [42] ou Rudin [62]. Voir également Gamelin [33] pour une présentation « abstraite ».

Les exercices 11.4 et 11.12 viennent de Ransford [57].

Les exercices 11.16 et 11.22 viennent du très bel article de Burckel [14].

L'exercice 11.20 est tiré de Pisier [54].

L'exercice 11.33 est tiré de Hoffmann [39]. Le résultat est généralisé à l'exercice 11.63 (théorème de Rudin-Carleson), qui est tiré de Gamelin [33].

Les exercices 11.54 à 11.62 établissent des résultats de base de la théorie des espaces de Hardy. Voir Gamelin [33], Hoffmann [39], Koosis [42].

L'exercice 11.64 est tiré de Hoffmann [39].

L'exercice 11.66 est tiré de Evans [27].

L'exercice 11.71 est tiré de Zuily [75].

L'exercice 11.72 est tiré de Baker [7] et Folland [30].

Chapitre 12

Comme indiqué au début du chapitre, la présentation est très largement inspirée de Ransford [57]. En particulier, le paragraphe sur le théorème d'unicité de la norme en est intégralement tiré. Beaucoup d'exercices viennent également de Ransford [57].

Pour le problème de Dirichlet, on a utilisé Fuchs [31] et Ransford [57].

Pour le théorème de Hartogs, on s'est inspiré de Chabat [19] et Narashiman [50]. Voir aussi Hervé [37].

Les exercices sur les opérateurs de composition viennent de Shapiro [65].

L'exercice 12.29 est tiré de Berenstein-Gay [8].

L'exercice 12.43 est tiré de Alinhac-Gérard [2].

Les exercices 12.46 et 12.47 sont tirés de Andersson [3].

L'exercice 12.68 est tiré de Bonsall-Duncan [9].

Appendice B

Pour un traitement beaucoup plus complet de la théorie des distributions, voir Hirsch-Lacombe [38], Zuily [75], ou bien sûr Schwartz [69].

La plupart des exercices viennent de Hirch-Lacombe [38] et Zuily [75].

Index

Les numéros en *italique* renvoient aux exercices

Abel (critères d'), *105*
Abel (lemme d'), 69
Abel (théorème d'), *105*
Aire (théorème de l'), *323*
d'Alembert (théorème de), 150, *222*, *316*
Algèbre du disque, 99
Alternée (application bilinéaire), 43
Application quotient associée à un lacet, 14
Argument, 77
Artin (théorème d'), *117*
Ascoli (théorème d'), 5
Automorphisme d'un ouvert de $\mathbb{S}_2$, 301

Banach-Alaoglu (théorème de), 5
Bergman (espace de), *112*, *122*
Bernoulli (nombres de), *109*
Bernoulli (polynômes de), *109*
Bessel (fonctions de), *168*
Beta (fonction), *117*
Beurling (théorème de), *122*
Bezout (équation de), *264*
Bezout (identité de), *293*
Biholomorphisme, 300
Biholomorphismes entre deux couronnes, *317*
Birkhoff (théorème de), *120*
Blaschke (condition de), 139
Blaschke (produit de), 164
Bloch (théorème de), *324*
Borel-Carathéodory (inégalité de), 156, *367*
Borel (théorème de), *167*
Borsuk (critère de), *226*
Borsuk (théorème de), 212
Borsuk-Ulam (théorème de), *225*
Brouwer (théorème de), 211
  dans $\mathbb{R}^n$, *223*

$\mathbb{C}$-analytique (fonction), 70
Cantor-Bernstein (théorème de), *224*
Caractérisation des disques, des demi-plans, *367*, *369*
Carathéodory (théorème de), 313
Cartan (théorème de), *316*
Carte locale, 54
Casorati-Weierstrass (théorème de), 145
Cauchy (formule de), 83
  homologique, 235
  homotopique, 195
Cauchy (inégalités de), 88, 338
Cauchy (noyau de), 99
Cauchy (théorème de), 81
  homologique, 235
  homotopique, 190
Cauchy (transformée de), 71, 97
Cauchy-Goursat (théorème de), 128
Cauchy-Pompeiu (formule de), 81
Cauchy-Riemann (équation de), 68
$\mathbb{C}$-dérivable (fonction), 65
Cercle de $\mathbb{S}_2$, 304
Changement de paramètre, 16
Chemin, 13
Compact à bord régulier, 48
Compléments (formule des), 163, 249
Conformément équivalents (ouverts), 300
Conjuguée harmonique, *366*
Convolution, 97, 431, 447
Coupure, 278
Cousin (problème de), 275
Cycle, 231

De Rham (cohomologie de), 42
Décomposition en éléments simples, *170*
Degré d'une application, 209
Dérivation, *429*, *441*
Dérivée, 65
Dérivée extérieure, 46
Dérivée logarithmique, 126
Dérivée normale, 361
Dérivées d'une distribution, 445
Détermination de l'argument, 77
  le long d'un chemin, 191
  principale, 77
Détermination du logarithme, 77
  le long d'un chemin, 191
  principale, 77
Détermination de $z^{1/k}$, 80
Dirichlet (problème de), 344, *373*, *379*, 406
Dirichlet (noyau de), *374*
Dirichlet (principe de), *379*

Dirichlet (séries de), *115*
Distribution, 443
Divergence (formule de la), 361, *380–381*
Division euclidienne, *264*
Duplication (formule de), *117*

Eilenberg (critère d'), 221
Éliminable (singularité), 144
Elliptiques (fonctions), *256*
Entière (fonction), 87
Équations de structure de $\mathbb{R}^n$, *59*
Équivalents (chemins, lacets), 16
Essentielle (singularité), 146
Euler (formule d'), *104*
Exacte (forme différentielle), 38
Exponentielle, 72

Facteur intégrant, *61*
Faiblement holomorphe (fonction), *171*
Fatou (théorème de), 350
Fejér (théorème de), *440*
Fermée (forme différentielle), 38
Fibonacci (nombres de), *109*
Fonction Γ
  caractérisations, *117*, *170*
  prolongement méromorphe, 147, 163
Fonction ζ, 91
  prolongement méromorphe, 147, *179*, 252
Forme différentielle
  de degré 1, 7
  de degré 2, 44
Formes linéaires continues sur $\mathcal{H}(\mathbb{D})$, *168*

Gauss (sommes de), *262*
Gelfand-Mazur (théorème de), *171*
Green (formule de), 362, *381*
Green (potentiel de), *426*

Hadamard (formule d'), 69
Hadamard (lemme d'), *441*
Hadamard (théorème des lacunes d'), *111*
Hadamard (théorème des trois cercles d'), 393
Hardy (espace de), 100, *377*
Harmonique (fonction), 327
Harnack (inégalités de), 339
Harnack (théorèmes de), 341, *371*
Hartogs (théorème de), 413
Hartogs (phénomène de), *295*
Hartogs-Rosenthal (théorème de), *285*
Herglotz (théorème de), *377*
Hölder (inégalité de), *173*
Holomorphe (fonction), 68, 298, 412
Homographie, 302
Homologue à 0 (cycle), 232
Homologues (cycles), 232
Homotopes (applications), 209
Homotopes (chemins, lacets), 187
Hurwitz (théorème de), 245
Hypoelliptique (opérateur différentiel), 403, *425*, *454*

Image ouverte (théorème de l'), 154, 211
Image réciproque
  d'une 1-forme, 12
  d'une 2-forme, 45
Indice, 193
Indice d'un champ de vecteurs, *205*
Injectivité de la transformation de Fourier, *170*
Intégrale curviligne, 17, 185
Intégration des 2-formes, 48
Intégration par parties, *376*, *379*
Intérieur d'une courbe de Jordan, 221
Interpolation de Lagrange, *255*
Inverse (chemin), 17
Inversion, 298
Isopérimétrique (inégalité), *228*
Isotropie (groupe d'), 301

Janiszewski (théorème de), 222
Jensen (formule de), 134, 404
Johnson (théorème de), 419
Jordan (chemin de, lacet de, courbe de), 15
Jordan (domaine de), 313
Jordan (théorème de), 220
  pour un polygone, *204*

Koebe (lemme de), *323*

Lacet, 14
Laplace (transformée de), *114*
Laplacien, 3
Laurent (série de), 141
Lavrentiev (théorème de), *285*
Lebesgue (lemme de), 184

Lebesgue (théorème de dérivation de), 350, *375*
Liouville (théorème de), 150, *422*, *424*, *426*
Littlewood (théorème de), 410
Localement constante (application), 184
Localement exacte (forme différentielle), 40
Localement finie (famille d'ensembles), 276, 436
Logarithme, 77
Longueur, 28
Lusternik-Schnirelman-Borsuk (théorème de), *226*

Mac Lane (théorème de), *119*
Majorant harmonique, *376*
Méromorphe (fonction), 147
Mittag-Leffler (théorème de), 276
  abstrait, *290*
Moebius (transformation de), 305
Monodromie (principe de), *202*
Montel (théorème de), 91
Morera (théorème de), 126
Moyenne (formule de la), 84
Multiplicité d'un pôle, 146
Multiplicité d'un zéro, 132
Müntz (théorème de), *288*

Nombres premiers (théorème des), *262*
Non-rétraction (théorème de), *63*, 211
Normal (vecteur), 22
Normale extérieure, 359
Noyau de sommabilité, *439*
Noyau reproduisant, 103

Opérateur de composition, 410
Orientation, 22

Paley-Wiener (théorème de), *113*
Paramétrage, 15
Paramétrage par longueur d'arc, *34*
Partie principale, 147
Partition de l'unité, 436, 437
Perron (méthode de), 406
Phragmén-Lindelöf (principe de), *172*, *422*
Picard (théorème de), *324*
Plateau (fonction), 434
Plus courts chemins, *35*
Poincaré (lemme de), 39, *59*
Poincaré (métrique de), *325*
Point fixe croissant (théorème du), *224*
Points singuliers d'une série entière, *110*
Poisson
  formule de, 335, *369*
  intégrale de, 342, *373*
  noyau de, 334, *371*, *373*
Pôle, 146
Positive (distribution), 399
Positivement orienté (chemin), 22
Potentiel logarithmique, 365
Préfaible (convergence), 6
Primitive, 38, 69
Primitive le long d'un chemin, 183
Principe de l'argument, 242
Principe du maximum, *32*, *104*, *119*, 155, 333, 388
Principe du prolongement analytique, 87, 331
Principe des zéros isolés, 133
Pringhsheim (théorème de), *110*
Procédés de sommation, *375*
Produit extérieur, 44
Produits infinis, 157
Projection stéréographique, 297
Propriété du majorant harmonique, 390
Propriété de la moyenne, 84, 153, 332, *372*, *382*
  pour les disques, 85, 332
Propriété de sous-moyenne, 153, 386, 390
Pseudo-hyperbolique (distance), *178*

Racines k-ièmes, 80
Radical d'un anneau, 418
$\mathbb{R}$-analytique (fonction), 330
Rayon de convergence, 69
Rayon spectral, 417
  formule du, *171*
Réelle (distribution), 399
Régulier, régulière (chemin, courbe), 14
Relativement compact, 92
Relèvement des chemins, *202*
Reparamétrisation C^1, *33*
Résidu, 239
Résidus (théorème des), 239
Restriction d'une distribution à un ouvert, 445
Riemann (sphère de), 297

Riemann (théorème de), 306
Riesz (théorème de convexité de), *424*
Riesz (théorème des frères), *378*
Riesz (théorème de décomposition de), 404
Riesz (théorème de représentation de), 5
Rouché (théorème de), 243
Rudin-Carleson (théorème de), *378*
Runge (théorème de), 266

Schwarz (lemme de), 156
  forme invariante, *177*
Schwarz (principe de réflection de), 128
Schwarz-Christoffel (formule de), *322*
Schwarz-Pick (condition de), *295*
Semi-continue supérieurement (fonction), 383
Semi-simple (algèbre), 419
Séparément holomorphe (fonction), 413
Série entière, 69
Similitude, 301
Simplement connexe, 190
Singularité isolée, 144
Solution fondamentale, *451, 452*
Sous-harmonique (fonction), 386
Spectre, 150
Stirling (formule de), *118*
Stokes (formule de), 37, 48
Stone-Tukey (théorème de), *225*
Subordination (principe de), *259*
Suite exhaustive de compacts, 92
Support
  d'une distribution, 447
  d'une fonction, 6
  d'une mesure, 4
Support singulier, *452–454*

Tauber (théorème de), *106*
Tietze-Urysohn (théorème de), 6
Toeplitz (conditions de), *375*
Transitivement (groupe opérant), 301
Translatés (lacets), 15
Trois droites, trois cercles (théorème des), *173, 422*
Type exponentiel (fonction entière de), *112*

Unicité de la norme (théorème d'), 420

Valeur au bord, 101, 358
Variation de l'argument, 193
Vesentini (théorème de), 418
Von Neumann (inégalité de), *175, 368, 370*

Weierstrass (fonction $\wp$ de), *257*
Weierstrass (théorème de convergence de), 90
Weierstrass (théorème de), 277
Wermer (théorème de maximalité de), *175, 176*
Weyl (lemme de), 370, 402
Whitney (théorème de), *166*

Zéro, 131

Index des notations

$\mathcal{A}^1(\Omega)$: formes différentielles de degré 1 sur Ω, 7
$\mathcal{A}^2(\Omega)$: formes différentielles de degré 2 sur Ω, 44
$\mathcal{A}^i_k(\Omega)$: i-formes différentielles de classe $\mathcal{C}^k$, 7, 44
$\mathbf{A}^2(\mathrm{E},\mathbb{K})$: applications bilinéaires alternées de E dans $\mathbb{K}$, 43
$\mathrm{A}(\mathbb{D})$: algèbre du disque, 99
Arg : détermination principale de l'argument, 77
$\mathrm{A}(\mathbb{D})$: algèbre du disque, 99

$\mathcal{C}(\mathrm{K})$: espace des fonctions continues sur K, 5
$[f], [\mu]$: distribution associée à la fonction f, à la mesure μ, 444

$\mathbb{D}$: disque unité $\{z \in \mathbb{C};\ |z| < 1\}$, 39
$\deg(f)$: degré de l'application f, 209
Δ : Laplacien, synonyme de $\sum \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$, 3
dz, $d\bar{z}$, 10
$(dz)_\gamma$: mesure associée à un chemin γ, 21
$\frac{\partial}{\partial z}$, $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$, 11
$\mathcal{D}(\Omega)$: fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ à support compact dans Ω, 443
$\mathcal{D}'(\Omega)$: distributions sur Ω, 444
$d\omega$: dérivée extérieure de la 1-forme ω, 46
$\partial \mathrm{V}$: frontière de V, ou paramétrage de ∂V positivement orienté relativement à V lorsque V est un disque, un rectangle ou un triangle, 26
δ_p : masse de Dirac au point p, 444

$*$: opération de convolution, 97, 431, 449

$\hat{\gamma}$: application quotient associée au lacet γ, 14
γ^- : chemin inverse de γ, 17
Γ : fonction Γ, 95
$\Gamma(\Omega)$: groupe des automorphismes de Ω, 301

$h(\Omega)$: ensemble des fonctions harmoniques sur Ω, 327
$h^p(\mathbb{D})$, 354
$\mathcal{H}(\Omega)$: ensemble des fonctions holomorphes sur Ω, 68
$\mathcal{H}(\mathbb{D},\mathbb{D})$: ensemble des fonctions $\varphi \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ vérifiant $\varphi(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$, 410
$\mathrm{H}^2(\mathbb{D})$, $\mathrm{H}^2(\mathbb{T})$: espace de Hardy, 100
$\mathrm{H}^\infty(\mathbb{D})$: ensemble des fonctions holomorphes bornées sur $\mathbb{D}$, 164

$\mathrm{I}(\gamma, p)$: indice du lacet γ par rapport au point p, 193
$\int_\gamma \omega$: intégrale de ω sur le chemin γ, 18, 185

k : noyau de Cauchy du disque unité, 100
k_a : fonction $\zeta \mapsto k(a,\zeta)$, 100
$\hat{\mathrm{K}}_\Omega$: enveloppe d'holomorphie de E dans Ω, 271

$\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{K})$: applications $\mathbb{R}$-linéaires de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{K}$, 7
$\mathcal{L}^2(\mathrm{E},\mathbb{K})$: applications bilinéaires de $\mathrm{E}\times\mathrm{E}$ dans $\mathbb{K}$, 43
Log : détermination principale du logarithme, 77

m : mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$, 4
$\mathcal{M}(\Omega)$: ensemble des fonctions méromorphes sur Ω, 147
$\hat{\mu}$: transformée de Cauchy de la mesure μ, 71, 97

∇ : gradient, synonyme de $(\partial_1, \ldots, \partial_n)$, 361
$\mathrm{N}_\gamma(t)$: vecteur normal à γ au point t, 22

$\varphi^*\omega$: image réciproque de ω par φ, 12, 45
P_Δ : noyau de Poisson du disque Δ, 334, 335
P_a : fonction $\zeta \mapsto P_\Delta(a,\zeta)$, 334, 335

Rad(B) : radical de l'anneau B, 418
$\rho(a)$: rayon spectral de a, 417
Res (f,a) : résidu de f au point a, 239

$\sigma(a)$: spectre de a, 150

$\mathbb{T}$: cercle unité $\{z \in \mathbb{C};\ |z| = 1\}$, 4

U_γ : ensemble des points de dérivabilité du chemin γ, 14
U^μ : potentiel logarithmique de la mesure μ, 365

ζ : fonction ζ, 91
$Z(f)$: ensemble des zéros de la fonction f, 131

Achevé d'imprimer sur les presses de l'Imprimerie BARNÉOUD
B.P. 44 - 53960 BONCHAMP-LÈS-LAVAL
Dépôt légal : Janvier 2004 - N° d'imprimeur : 14610
Imprimé en France

Ce livre traite de la théorie des fonctions d'une variable complexe. On y trouvera ce qui est habituellement enseigné dans un premier cours sur les fonctions holomorphes, ainsi qu'un certain nombre de développements plus avancés. Le livre pourra donc intéresser aussi bien les étudiants en troisième ou quatrième année d'université que les étudiants préparant l'agrégation.

Si les thèmes abordés sont bien sûr très classiques, le point de vue est moderne, inspiré par certains aspects de la théorie des fonctions holomorphes de plusieurs variables. En témoignent l'utilisation constante des formes différentielles, le recours occasionnel à la théorie des distributions, ou la place accordée aux fonctions sous-harmoniques. Parallèlement, les auteurs se sont attachés à mettre en valeur la position privilégiée de l'analyse complexe à la croisée des chemins entre la géométrie différentielle, la topologie, l'analyse fonctionnelle et l'analyse harmonique.

Une place très importante a été accordée aux exercices, qui visent à la fois à faciliter l'assimilation des contenus de base, et à proposer des ouvertures sur des sujets plus avancés.

Collection enseignement des mathématiques

38 €
ISBN 2-84225-052-4

9 782842 250522